Séance 8 : Thm fondamentaux + résultats asymptotiques

$\boxed{8.0}$ $V$ : $\mu = 30$ , $\sigma = 11$

$P[|V-\mu| \geq 15]$

$= P[|V-30| \geq 15]$ → utilisons l'inég. de B-T

où $k\sigma = 15 \iff k.11 = 15 \iff k = \frac{15}{11}$

$\Rightarrow k^2 = \frac{15^2}{11^2} \iff \frac{1}{k^2} = \left(\frac{11}{15}\right)^2$

$\overset{\text{B-T}}{\Rightarrow} P[|V-30| \geq 15] \leq \left(\frac{11}{15}\right)^2$

---

$\boxed{8.1}$ $f$ = fréquence absolue d'apparitions de Pile au cours de n jets

$V$ = fréquence relative (proportion)

$= f/n$ où $n = 10^8$

on cherche $P[|V - 1/2| \geq 10^{-3}]$

→ on peut utiliser l'inégalité de B-T si on parvient à montrer que $E[V] = 1/2$

$V = \frac{f}{n}$ or $f$ = nb de Pile au cours de n jets

= nb de réalisations de A au cours de n jets

où A : " obtenir un Pile " $p = P(A) = 1/2$

$\sim B(n, \frac{1}{2})$ $\Rightarrow E[f] = n.p = n.\frac{1}{2}$

$Var[f] = n.p(1-p) = n.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}$

$\Rightarrow V \sim \frac{1}{n} . B(n, \frac{1}{2})$

$$\Rightarrow E[V] = E\left[\frac{1}{n} \cdot f\right] = \frac{1}{n} E[f] = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{ok}$$

Pour appliquer B-T, il reste à trouver $\sigma^2 = Var[V]$

$$Var[V] = Var\left[\frac{1}{n} \cdot f\right] = \frac{1}{n^2} Var[f] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4n}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{10^8}} = \frac{1}{2 \cdot 10^4}$$

On cherche $P\left[|V - \frac{1}{2}| \geq 10^{-3}\right]$

$$\rightarrow k\sigma = 10^{-3} \iff k = 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^4 = 20$$

$$\Rightarrow k^2 = 400 \iff 1/k^2 = \frac{1}{400} = 0{,}0025$$

$$\overset{B-T}{\Rightarrow} P\left[|V - \frac{1}{2}| \geq 10^{-3}\right] \leq 0{,}0025$$

---

$\boxed{8.2}$ V = pluviosité annuelle en mm

$\mu = E[V] = 800$ mm

$\sigma = Var[V] = 100$ mm

$$P[600 \leq V \leq 1000] = P[|V - 800| \geq 200] = 1 - P[|V - 800| \leq 200$$

car V continu

$\Rightarrow$ on utilise l'inég. de B-T

où $k\sigma = 200 \iff k = \frac{200}{\sigma} = \frac{200}{100} = 2$

$$\Rightarrow k^2 = 4 \iff 1/k^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P[600 \leq V \leq 1000] \geq \underbrace{1 - \frac{1}{4}}_{3/4}$$

**8.3** X = tps mis pr parcourir la distance

$\mu = E[X] = 20$

$\sigma = Var[X] = 0{,}5$

$\Rightarrow P[19 \leq X \leq 21] = 1 - P[|X-20| \geq 1]$

on utilise B-T où $k\sigma = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{\sigma} = 2$

$\Rightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow 1/k^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow P[19 \leq X \leq 21] \geq \frac{3}{4}$

si $X \sim N(20, \frac{1}{2})$

$\Rightarrow P[X \leq 21] - P[X \leq 19]$

$= P[N(0,1) \leq \frac{21-20}{1/2}] - P[N(0,1) \leq \frac{19-20}{1/2}]$

$= P[N(0,1) \leq 2] - P[N(0,1) \leq -2] = 2P[N(0,1) \leq 2]$

$= 2(0{,}97725) - 1$

$= 0{,}9545$

**8.4** X = nb d'ordi en panne durant la 1ère année

= nb de réalisations de A parmi les 1000 ordi.

A = " un ordi tombe en panne au cours de la 1ère année " $p = P(A) = \frac{1}{200} = 0{,}$

$\Rightarrow X \sim B(1000, 0{,}005)$

On cherche $P[X = x] = P[\underbrace{B(1000, 0{,}005)}_{\text{pas ds les tables car n bcp trop gd}} = x]$

$\Rightarrow$ on utilise l'approximation d'une $B(n,p)$ par une $\mathcal{P}_\lambda$

$B(n,p) \approx \mathcal{P}_{np}$ lorsque $p < 0{,}1$ ici $p = 0{,}005 \rightarrow$ ok

$n > 30$ $n = 1000 \rightarrow$ ok

(rmq: on ne peut pas approximer par une $N(0,1)$ car $np = 5 \not> 5$)

$\Rightarrow P[X = x] \simeq P[\mathcal{P}_5 = x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \{0, \dots, 1000\} \\ \text{cf tables} & \text{si } x \in \{0, \dots, 1000\} \end{cases}$

ou $e^{-5} \; 5^{x}$

**83**

$X$ = nb de réalisations de $A$ au cours de 64 jets

où $A$ = " obtenir 5 Piles en lançant 5 pièces au cours d'un jet "

$\rightarrow p = P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$\Rightarrow X \sim \mathcal{B}\left(64, \left(\frac{1}{2}\right)^5\right)$

a) On cherche $P[X = k] = p_k$

$\Rightarrow p_k = C_{k}^{64} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]^k \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)^5\right]^{64-k}$

b) Pour calculer les valeurs de $p_k$, nous pouvons faire appel à l'approximation d'une $\mathcal{B}(n,p)$ par une $\mathcal{P}_\lambda$. (en effet, $\mathcal{B}(64, \frac{1}{32})$ n'est pas dans les tables) (ok car $p = \frac{1}{32} < 0,1$ et $n = 64 > 30$)

$\rightarrow p_k = P[\mathcal{B}(64, \frac{1}{32}) = k] \simeq P[\underbrace{\mathcal{P}_{64 \cdot \frac{1}{32}}}_{} = k] = \tilde{p}_k$

$\underbrace{P[\mathcal{P}_2 = k]}_{\text{cf tables}}$

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tilde{p}_k$ | 0,135 | 0,2707 | 0,2707 | 0,1804 | 0,0902 | 0,0361 | 0,012 | 0,0[illegible] |

on retrouve des valeurs très proches [illegible] des valeurs théoriques de $p_k$

$\boxed{86}$ $X$ = nb de bébés présentant un handicap dont la mère fumait pdt sa grossesse.

= nb de réalisations de $A$ parmi 20 bébés

où $A$ = " avoir une maman qui fumait "

$$p = P(A) = 40\% = 0,4$$

$$\Rightarrow X \sim B(30\,,\,0,4)$$

On cherche $P[X \geqslant 12] = 1 - P[B(30, 0,4) \overset{\leqslant 11}{<12}]$ $\rightarrow$ pas de les tables

On peut aussi calculer cette probabilité grâce à l'approximation normale. (Thm de De Moivre)

en effet : $np = 30 \cdot 0,4 = 12 > 5$

$nq = 30(1 - 0,4) = 18 > 5$

$$\Rightarrow P[X > 12] = 1 - P[B(30, 0,4) \leqslant 11]$$

$$\overset{\text{De Moivre}}{=} 1 - P\Bigg[\underbrace{\frac{B(30, 0,4) - 12}{\sqrt{12 \cdot 0,6}}}_{\approx N(0,1)} \leqslant \frac{11 - 12}{\sqrt{12 \cdot 0,6}}\Bigg]$$

$$\simeq 1 - P\left[N(0,1) \leqslant \frac{-1}{2,68}\right]$$

$$= 1 - P[N(0,1) \leqslant -0,37]$$

$$= 1 - P[N(0,1) \geqslant 0,37] \quad \text{sym \% 0}$$

$$= 1 - (1 - P[N(0,1) \leqslant 0,37]) \quad \text{v.a. c.}$$

$$= P[N(0,1) \leqslant 0,37]$$

$$= 0,6443$$

3.7 $X$ = nb de pièces défectueuses dans une boîte

= nb de réalisations de $A$ pour 100 pièces

où $A$ = " choisir une pièce défectueuse "

$\hookrightarrow p = P(A) = 0{,}02$

$\Rightarrow X \sim B(100\,,\,0{,}02)$

a) $P[X=0] = P[B(100, 0{,}02) = 0]$ $\rightarrow$ pas ds les tables

$$\text{OR}\quad \left.\begin{array}{l} p = 0{,}02 < 0{,}1 \\ n = 100 > 30 \end{array}\right\} \Rightarrow B(100, 0{,}02) \approx \mathcal{P}_{100 \cdot 0{,}02} = \mathcal{P}_2$$

$\Rightarrow P[X=0] \simeq P[\mathcal{P}_2 = 0] = 0{,}135$

b) $P[X \leq 2] \simeq P[\mathcal{P}_2 \leq 2]$

$= P[\mathcal{P}_2 = 0] + P[\mathcal{P}_2 = 1] + P[\mathcal{P}_2 = 2]$

$= 0{,}135 + 0{,}2707 + 0{,}2707$

$= 0{,}6764$

Rmq p/ le a) : ici on ne peut pas approximer par une $N(0,1)$ car $n.p = 2 \not\geq 5$

88

$f$ = fréquence absolue d'apparitions de Pile au cours de 200 jets

= nb de Pile au cours de 200 jets

$\sim B\left(200, \frac{1}{2}\right)$

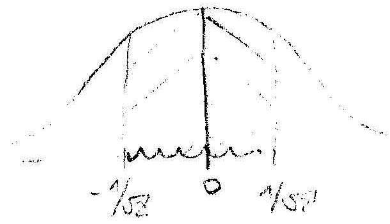
On cherche $P[95 \leq f \leq 105]$

Or $\left.\begin{array}{l} n.p = 200 \cdot \frac{1}{2} = 100 > 5 \\ n.q = 200 \cdot \frac{1}{2} = 100 > 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$ on peut appliquer l'approximation normale

$\Rightarrow P[95 \leq f \leq 105] = P\left[\frac{95-100}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2}}} \leq \frac{f-100}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2}}} \leq \frac{105-1}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2}}}\right.$

$= P\left[\frac{-\cancel{5}}{\cancel{5}\sqrt{2}} \leq N(0,1) \leq \frac{\cancel{5}}{\cancel{5}\sqrt{2}}\right]$

$= P\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq N(0,1) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$




$= 2\,P\left[N(0,1) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right] - 1$

0,71

$= 2(0,7611) - 1$

$= 0,5222$

8.9

$X_i$ = poids du sachet $i$

$X$ = poids d'une caisse de $n$ sachets ($n \simeq 100$)

$= \sum_{i=1}^{n} X_i$ où $X_i \perp\!\!\!\perp$ et $X_i \sim$ Distribution

$\mu = E[X] = 100$

$\sigma = \sqrt{Var[X]} = 0,5$

On cherche

1) $P[X > 101]$ Or $X$ est la somme de $n$ v.a $\perp\!\!\!\perp$ de $\bar{m}$ distrib

$\Rightarrow \dfrac{X-\mu}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{} N(0,1)$

$\Rightarrow \dfrac{X-\mu}{\sigma} \approx N(0,1)$ car $n$ est gd

$\Rightarrow P[X > 101] = P\Big[\underbrace{\dfrac{X-100}{0,5}}_{\approx N(0,1)} > \dfrac{101-100}{0,5}\Big]$

$1/1/2$

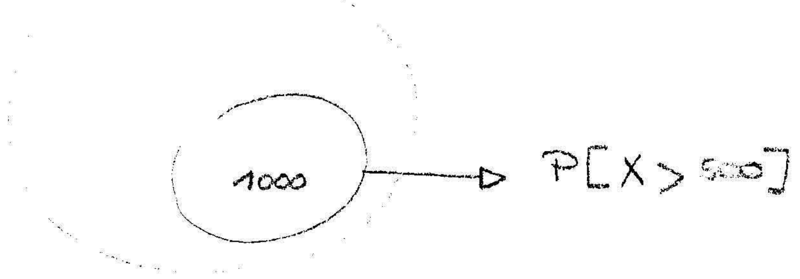
$\simeq P[N(0,1) > 2] = 1 - P[N(0,1) \leq 2] = 1 - 0,97725$
$= 0,02275$

2) $P[X < 99] \simeq P[N(0,1) < -2] \overset{\text{sym \% 0}}{=} P[N(0,1) > 2] = 0,02$

3) $P[99,5 \leq X \leq 100,5] = P[X \leq 100,5] - P[X < 99,5]$

$= P\Big[N(0,1) \leq \overset{1}{\dfrac{0,5}{0,5}}\Big] - P\Big[N(0,1) < \overset{-1}{\dfrac{-0,5}{0,5}}\Big]$

8.10 population → 40% favorable à A (




X = nb d'habitants favorables à A parmi les 1000 habitan
de l'échantillon

A = " être fav à A "

$p = P(A) = 40\%$

$\sim B(1000,\ 0{,}4)$

On cherche $P[X > 500] = P[\underbrace{B(1000,\ 0{,}4)}_{\text{pas ds les tables}} > 500]$

→ on peut approximer la $B(n,p)$, non pas par une $\mathcal{P}_\lambda$ ($p$ [illegible]

mais par une $N(0,1)$ car $n.p = 1000 \cdot 0{,}4 = 400 > 5$

$n.q = 1000 \cdot 0{,}6 = 600 > 5$

$$\Rightarrow P[X > 500] = P\left[\underbrace{\frac{X-400}{\sqrt{400 \cdot 0{,}6}}}_{\approx N(0,1)} > \frac{500-400}{\sqrt{400 \cdot 0{,}6}}\right]$$

$$\simeq P\left[N(0,1) > \frac{100}{15{,}4919}\right] = 1 - P[N(0,1) \leq 6{,}455]$$

$$= 1 - 1 = 0$$