7 VARIABLES ALEATOIRES PARTICULIERES - APPLICATIONS (SUITE)

Remarque : tout au long des exercices, on utilisera souvent le fait que la $N(0;1)$ a une fonction de densité symétrique par rapport à 0. En effet, les valeurs $F_{N(0;1)}(u)$ de la fonction de répartition présentes dans la table sont calculées seulement pour $u \geq 0$. Il n'est pas nécessaire de donner les valeurs de la fonction de répartitions pour des valeurs de u négatives car on peut facilement se ramener au cas où u est positif en utilisant la symétrie de la fonction de densité. En effet, $F_{N(0;1)}(-u) = P[N(0;1) \leq -u] = P[N(0,1) \geq u]$ comme illustré à la figure 1.

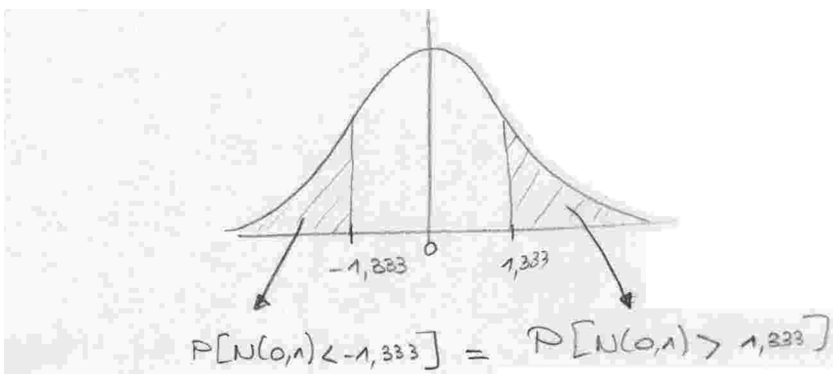

Figure 1: Illustration $P[N(0,1) \leq -u] = P[N(0,1) \geq u]$

Remarquons de plus que la même propriété s'applique à la variable aléatoire de student.

EXERCICE 7.1. : lecture des tables statistiques(suite)

1. $P[N(0;1) \leq 1,17] = F_{N(0;1)}(1,17) = 0,8790$

2. $P[N(10;3) \leq 5] = P[\frac{N(10;3)-10}{3} \leq \frac{5-10}{3}] = P[N(0;1) \leq \frac{-5}{3}] = P[N(0;1) \geq \frac{5}{3}] = 1 - P[N(0;1) < \frac{5}{3}] = 1 - P[N(0;1) \leq \frac{5}{3}] = 1 - F_{N(0;1)}(\frac{5}{3}) \cong 1 - F_{N(0;1)}(1,67) = 1 - 0,9525 = 0,0475$

3. $P[N(10;3) = 5] = 0$ (car $N(10;3)$ est une variable aléatoire continue)

4. $P[N(0;1) > -1] = P[N(0;1) < 1] = P[N(0;1) \leq 1] = F_{N(0;1)}(1) = 0,8413$

5. $P[-2 < N(0;1) < 3] = P[N(0;1) < 3] - P[N(0;1) \leq -2] = P[N(0;1) \leq 3] -$

$P[N(0;1) \geq 2] = P[N(0;1) \leq 3] - 1 + P[N(0;1) < 2] = P[N(0;1) \leq 3] - 1 + P[N(0;1) \leq 2] = F_{N(0;1)}(3) - 1 + F_{N(0;1)}(2) = 0,9987 - 1 + 0,9772 = 0,9759$

6. $P[N(0;1) < -3] = P[N(0;1) > 3] = 1 - P[N(0;1) \leq 3] = 1 - F_{N(0;1)}(3) = 1 - 0,9987 = 0,0013$

7. $P[N(0;1) < x] = 0,94 \Leftrightarrow F_{N(0;1)}(x) = 0,94 \Leftrightarrow x = 1,555$

8. $P[-x < N(0;1) < x] = P[N(0;1) < x] - P[N(0;1) \leq -x] = P[N(0;1) < x] - P[N(0;1) \geq x] = P[N(0;1) < x] - 1 + P[N(0;1) < x] = P[N(0;1) \leq x] - 1 + P[N(0;1) \leq x] = 2F_{N(0;1)}(x) - 1 = 0,9 \Leftrightarrow F_{N(0;1)}(x) = 0,95 \Leftrightarrow x = 1,645$

9. $P[\chi^2_{17} \leq x] = 0,95 \Leftrightarrow F_{\chi^2_{17}}(x) = 0,95 \Leftrightarrow x = \chi^2_{17;0,95} = 27,59$

10. $P[\chi^2_5 > x] = 0,9 \Leftrightarrow 1 - P[\chi^2_5 \leq x] = 0,9 \Leftrightarrow F_{\chi^2_5}(x) = 0,1 \Leftrightarrow x = \chi^2_{5;0,1} = 1,61$

11. $P[t_{20} \leq x] = 0,999 \Leftrightarrow F_{t_{20}}(x) = 0,999 \Leftrightarrow x = t_{20;0,999} = 3,552$

12. $P[-x < t_{10} < x] = P[t_{10} < x] - P[t_{10} \leq -x] = P[t_{10} \leq x] - P[t_{10} \geq x] = P[t_{10} \leq x] - 1 + P[t_{10} < x] = P[t_{10} \leq x] - 1 + P[t_{10} \leq x] = 2F_{t_{10}}(x) - 1 = 0,9 \Leftrightarrow F_{t_{10}}(x) = 0,95 \Leftrightarrow x = t_{10;0,95} = 1,812$

13. $P[F_{3;8} \leq x] = 0,95 \Leftrightarrow x = F_{3;8;0,95} = 4,07$

14. $P[F_{11;16}] \leq x] = 0,9$ Dans les tables, nous avons $P[F_{10;16} \leq y] = 0,9 \Leftrightarrow y = F_{10;16;0,9} = 2,03$ et $P[F_{12;16} \leq z] = 0,9 \Leftrightarrow z = F_{12;16;0,9} = 1,99$ et donc $x \cong \frac{2,03+1,99}{2} = 2,01$

15. $P[F_{20;3} \leq x] = P[F_{3;20} \geq \frac{1}{x}] = 1 - P[F_{3;20} < \frac{1}{x}] = 1 - P[F_{3;20} \leq \frac{1}{x}] = 0,1 \Leftrightarrow P[F_{3;20} \leq \frac{1}{x}] = 0,9 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = F_{3;20;0,9} = 2,38 \Leftrightarrow x = 0,4202$

EXERCICE 7.9.

Soit $X =$"Le poids d'un paquet de tabac". Dans ce cas, $X \sim N(101; 0,75)$ et on s'intéresse à

$$\begin{aligned} P[X \leq 100] &= P[\frac{X-101}{0,75} \leq \frac{100-101}{0,75}] = P[N(0;1) \leq \frac{-4}{3}] = P[N(0;1) \geq \frac{4}{3}] \\ &= 1 - P[N(0;1) < \frac{4}{3}] = 1 - P[N(0;1) \leq \frac{4}{3}] = 1 - F_{N(0;1)}(\frac{4}{3}) \\ &\cong 1 - F_{N(0;1)}(1,33) = 1 - 0,90824 = 0,09176 \cong 9\% \end{aligned}$$

Pour ramener cette proportion à 2% soit on diminue la variance de X (moins de dispersion) soit on augmente la moyenne de X.

1. On diminue σ :

$$\begin{aligned}
P[X \leq 100] &= P[\frac{X-101}{\sigma} \leq \frac{100-101}{\sigma}] = P[N(0;1) \leq \frac{-1}{\sigma}] = P[N(0;1) \geq \frac{1}{\sigma}] \\
&= 1 - P[N(0;1) < \frac{1}{\sigma}] = 1 - P[N(0;1) \leq \frac{1}{\sigma}] = 1 - F_{N(0;1)}(\frac{1}{\sigma}) = 2\% \\
&\Leftrightarrow F_{N(0;1)}(\frac{1}{\sigma}) = 0,98 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma} \cong 2,05 \\
&\Leftrightarrow \sigma \cong 0,50g
\end{aligned}$$

2. On augmente μ. Remarquons que μ doit être plus grand que $101g$.

$$\begin{aligned}
P[X \leq 100] &= P[\frac{X-\mu}{0,75} \leq \frac{100-\mu}{0,75}] = P[N(0;1) \leq \frac{100-\mu}{0,75}] \\
&= P[N(0;1) \geq \frac{\mu-100}{0,75}] (100-\mu<0) \\
&= 1 - P[N(0;1) < \frac{\mu-100}{0,75}] = 1 - P[N(0;1) \leq \frac{\mu-100}{0,75}] \\
&= 1 - F_{N(0;1)}(\frac{\mu-100}{0,75}) = 2\% \\
&\Leftrightarrow F_{N(0;1)}(\frac{\mu-100}{0,75}) = 0,98 \\
&\Leftrightarrow \frac{\mu-100}{0,75} \cong 2,05 \\
&\Leftrightarrow \mu \cong 101,54g
\end{aligned}$$

EXERCICE 7.10.

Soit X ="QI standard de Wechsler". Dans ce cas, $X \sim N(100;15)$.

1. On s'intéresse à

$$\begin{aligned}
P[X \geq 135] &= 1 - P[X < 135] = 1 - P[\frac{X-100}{15} < \frac{135-100}{15}] = 1 - P[N(0;1) \leq \frac{35}{15}] \\
&\cong 1 - F_{N(0;1)}(2,33) = 1 - 0,99010 = 0,0099 = 0,99\%
\end{aligned}$$

2. On cherche le 98^e percentile, c.-à-d. la valeur x telle que $P[X \leq x] = 0,98$. On a

$$P[X \leq x] = P[\frac{X-100}{15} \leq \frac{x-100}{15}] = F_{N(0;1)}(\frac{x-100}{15}) = 0,98.$$

   Il suffit donc de chercher le 98^e percentile d'une $N(0;1)$. Ce 98^e percentile est égale à $2,05$ et donc $x = 2,05 * 15 + 100 = 130,75$. En conclusion, un enfant sera admis à l'association si son QI est supérieur à 130,75.

EXERCICE 7.11.

Soit X ="QI des recrues de l'armée". Dans ce cas, $X \sim N(100;10)$.

1. $P[100 < X < 105] = P[X < 105] - P[X \leq 100] = P[N(0;1) \leq 0,5] - P[N(0;1) \leq 0] = 0,6915 - 0,5 = 0,1915 = 19,15\%$.

2. $P[X < 80] = P[N(0;1) < -2] = P[N(0;1) > 2] = 1 - P[N(0;1) \leq 2] = 1 - 0,9772 = 2,28\%$.

3. $P[X > 120] = P[X < 80] = 2,28\%$ (car X est symétrique par rapport à 100 : voir figure 2).

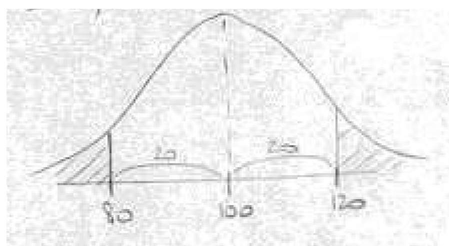

Figure 2: Illustration $P[X > 120] = P[X < 80]$

4. On cherche x tel que $P[X > x] = 0,1$: $P[X > x] = 1 - P[X \leq x] = 1 - P[N(0;1) \leq \frac{x-100}{10}] = 0,1 \Leftrightarrow F_{N(0;1)}(\frac{x-100}{10}) = 0,9 \Leftrightarrow \frac{x-100}{10} \cong 1,28 \Leftrightarrow x \cong 112,8$.

EXERCICE 7.14.

Soit $V \sim N(\mu, \sigma)$ et $W = aV + b$. Il faut trouver la densité de W.

Rappelons que

$$f_V(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Si $a = 0$, $W = b$ et donc W est une variable aléatoire dégénérée.

Si $a \neq 0$,

$$\begin{aligned} F_W(x) &= P[W \leq x] \\ &= P[aV + b \leq x] \\ &= \begin{cases} P[V \leq \frac{x-b}{a}] & si\ a > 0 \\ P[V \geq \frac{x-b}{a}] & si\ a < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} F_V(\frac{x-b}{a}) & si\ a > 0 \\ 1 - F_V(\frac{x-b}{a}) & si\ a < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Posons $y = \frac{x-b}{a}$. On a alors

$$\begin{aligned}
f_w(x) &= \begin{cases} \frac{d}{dy}(F_V(y))\frac{d}{dx}(y) & si\ a>0 \\ \frac{d}{dy}(1-F_V(y))\frac{d}{dx}(y) & si\ a<0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} f_V(y)\frac{1}{a} & si\ a>0 \\ -f_V(y)\frac{1}{a} & si\ a<0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(\frac{x-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}} & si\ a>0 \\ -\frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(\frac{x-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}} & si\ a<0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a}e^{\frac{-(x-(b+a\mu))^2}{2(a\sigma)^2}} & si\ a>0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}(-\sigma a)}e^{\frac{-(x-(b+a\mu))^2}{2(a\sigma)^2}} & si\ a<0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$W \sim \begin{cases} N(a\mu+b; a\sigma) & si\ a>0 \\ N(a\mu+b; -a\sigma) & si\ a<0 \end{cases}$$

Remarque : Intuitivement, nous savions déjà que la moyenne de W serait égale à $b + a\mu$ et que la variance serait égale à $a^2\sigma^2$ car :

$$E[W] = E[aV+b] = aE[V]+b = a\mu+b$$

$$Var[W] = Var[aV+b] = a^2Var[V] = a^2\sigma^2.$$

EXERCICE 7.15.

Soit $V \sim N(\mu, \sigma)$. Nous devons trouver μ et σ :

1. $$P[V \geq 16] = 1-P[V<16] = 1-P[N(0;1) \leq \frac{16-\mu}{\sigma}] = 0,1492 \Leftrightarrow F_{N(0;1)}(\frac{16-\mu}{\sigma}) = 0.8508$$

   et donc
   $$\frac{16-\mu}{\sigma} = 1,04$$

2. $$P[V \geq 9] = 1-P[V<9] = 1-P[N(0;1) \leq \frac{9-\mu}{\sigma}] = 0.5987 \Leftrightarrow F_{N(0;1)} = 0,4013$$

   Cette valeur de la fonction de distribution n'est pas présente dans la table. Mais comme la $N(0;1)$ est symétrique nous avons :

   $$P[N(0;1) \leq \frac{9-\mu}{\sigma}] = P[N(0;1) \geq \frac{\mu-9}{\sigma}] = 1-P[N(0;1) \leq \frac{\mu-9}{\sigma}] = 0,4013$$

$$\Updownarrow$$

$$F_{N(0;1)}(\frac{\mu-9}{\sigma}) = 0,5887$$

et donc

$$\frac{\mu-9}{\sigma} = 0,25$$

Il suffit donc de résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{\mu-9}{\sigma} = 1,04 \\ \frac{16-\mu}{\sigma} = 1,04 \end{cases}.$$

On trouve alors

$$\begin{cases} \mu = 10,3565 \\ \sigma = 5,4264 \end{cases}$$

EXERCICE 7.16.

Soit $V \sim N(0;1)$. Nous avons

$$\mu_k = E\Big[\big(V - E[V]\big)^k\Big] = E[V^k].$$

Rappel :

$$E[g(V)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_V(x) dx.$$

Dans ce cas,

$$E[V^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_V(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx.$$

Si k est impair, il est évident que $E[V^k] = 0$ car $h(x) = x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ est une fonction impaire.
Si k est pair

$$E[V^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-1} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx.$$

On intègre par partie avec

$$\begin{cases} f(x) = x^{k-1} & \to f'(x) = (k-1)x^{k-2} \\ g'(x) = x e^{\frac{-x^2}{2}} & \to g(x) = -e^{\frac{-x^2}{2}} \end{cases}.$$

Dans ce cas

$$\begin{aligned} E[V^k] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big([-x^{k-1} e^{\frac{-x^2}{2}}]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} (k-1) x^{k-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big([0+0] + (k-1) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx\Big) \\ &= (k-1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \\ &= (k-1)\mu_{k-2}. \end{aligned}$$

En procédant de la même manière pour μ_{k-2} on trouve

$$\mu_{k-2} = (k-3)\mu_{k-4}.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\mu_k &= (k-1)\mu_{k-2} \\
&= (k-1)(k-3)\mu_{k-4} \\
&= (k-1)(k-3)(k-5)\mu_{k-6} \\
&\vdots \\
&= (k-1)(k-3)(k-5)\dots 3\mu_2 \\
&= (k-1)(k-3)(k-5)\dots 3 \text{ (car } \mu_2 = \sigma = 1).
\end{aligned}$$

EXERCICE 7.19.

Soit $V \sim N(\mu, \sigma)$.

1. Vrai : $P[|V-\mu| < a] = P[-a < V-\mu < a] = P[V < a+\mu] - P[V \leq -a+\mu]$. En utilisant la symétrie de la fonction de densité par rapport à μ et comme $a+\mu$ et $-a+\mu$ se trouve à une même distance a de μ (comme illustré figure 3), nous avons que $P[V \leq -a+\mu] = P[V \geq a+\mu]$. Dans ce cas, $P[|V-\mu| < a] = P[V \leq a+\mu] - P[V \geq a+\mu] = F_V(a+\mu) - 1 + P[V < a+\mu] = F_V(a+\mu) - 1 + P[V \leq a+\mu] = 2F_V(a+\mu) - 1$.

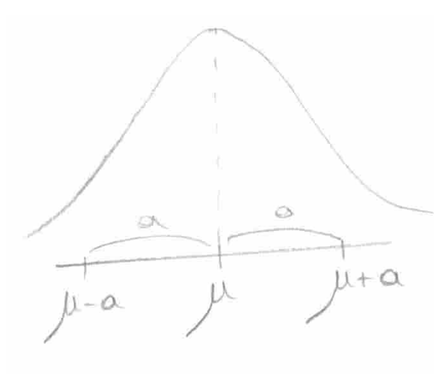

Figure 3: Illustration $P[V \leq -a+\mu] = P[V \geq a+\mu]$.

2. Faux car V est une variable aléatoire continue et donc $P[V = \mu] = 0$.

3. Vrai : $P[\frac{V-\mu}{\sigma} > 0] = P[N(0;1) > 0] = 1 - P[N(0;1) \leq 0] = 0,5$. Remarquons que cela est évident car la fonction de densité d'une $N(0;1)$ est symétrique par rapport à 0 et donc $P[V < 0] = P[V > 0] = 0,5$.

4. $P[V > 0] = P[V < 0]$ ssi $\mu = 0$ (voir figure 4).

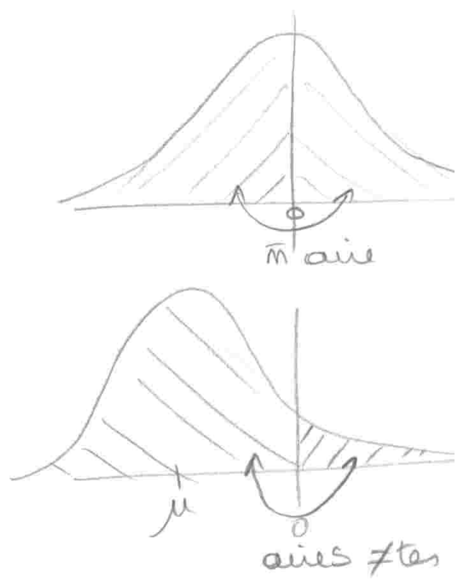

Figure 4: Illustration $P[V > 0] = P[V < 0]$ ssi $\mu = 0$.

5. Vrai : $P[V \leq \mu + 2\sigma =]P[\frac{V-\mu}{\sigma} \leq \frac{\mu+2\sigma-\mu}{\sigma}] = P[N(0;1) \geq 2] = 1 - P[N(o;1) < 2] = 1 - P[N(o;1) \leq 2] = 1 - F_{N(0;1)}(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$.

EXERCICE 7.20.

Soit $X =$"diamètre extérieur des axes" et $Y =$"diamètre intérieur des coussinets".

1. Dans ce cas, $X \sim N(20; 0,05)$ et $Y \sim N(20; 0,07)$. Et on s'intéresse à :

$$P[X > Y] = P[X - Y > 0].$$

Or, $X - Y \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}) \sim N(0; 0,086)$. Donc, $P[X - Y > 0] = 0,5$. Conclusion : dans 50% des cas, les axes ne pénétrerons pas dans les coussinets.

2. Dans ce cas, $X \sim N(19,95; 0,05)$ et $Y \sim N(20,05; 0,07)$ et on a $X - Y \sim N(-0,1; 0,086)$. On s'intéresse à $P[X > Y] = P[X - Y > 0] = P[N(0,1) > \frac{0+0,1}{0,086}] \cong 1 - P[N(0,1) \leq 1,16] = 1 - F_{N(0,1)}(1,16) = 1 - 0,8770 = 0,123$. En conclusion, environ 12,3% des axes ne pourront pénétrer dans les coussinets.

EXERCICE 7.21.

Soit $X_i =$"la demande du i^e mois" $(i = 1, \ldots, 4)$. Dans ce cas, $X_i \sim N(10000; 2000)$ $\forall i = 1, \ldots 4$ et si $Y =$"demande pour les 4 mois", on a $Y = \sum_{i=1}^{4} X_i \sim N(40000; \sqrt{4.(2000)^2})$. Soit S_{min} le stock à commander au début des 4 mois tel que $P[Y > S_{min}] < 0,1\% \Leftrightarrow 1 - P[Y \leq S_{min}] < 0,01 \Leftrightarrow P[N(0;1) \leq \frac{S_{min}-40000}{4000}] > 0,99 \Leftrightarrow F_{N(0;1)}(\frac{S_{min}-40000}{4000}) > 0,99 \Leftrightarrow \frac{S_{min}-40000}{4000} > 2,33 \Leftrightarrow S_{min} > 49320$.