7 VARIABLES ALEATOIRES PARTICULIERES - APPLICATIONS

EXERCICE 7.1. : lecture des tables statistiques

1. $P[B(3;0,2)=1] = P[B(3;0,2)\leq 1] - P[B(3;0,2)\leq 0] = F_{B(3;0,2)}(1) - F_{B(3;0,2)}(0) = 0,8960 - 0,5120 = 0,3840.$

2. $P[B(15;0,4)\leq 10] = F_{B(15;0,4)}(10) = 0,9907.$

3. $P[B(9;0,8)<3] = P[B(9;0,8)=0]+P[B(9;0,8)=1]+P[B(9;0,8)=2] = P[B(9;0,2)=9] + P[B(9;0,2)=8] + P[B(9;0,2)=7] = P[B(9;0,2)\geq 7] = 1 - P[B(9;0,2)<7] = 1 - P[B(9;0,2)\leq 6] = 1 - F_{B(9;0,2)}(6) = 1 - 0,9997 = 0,0003$ (Remarque : on ne trouve pas la valeur $p=0,8$ dans les tables).

4. $P[2 < B(10;0,5) < 7] = P[B(10;0,5) < 7] - P[B(10;0,5)\leq 2] = P[B(10;0,5)\leq 6] - P[B(10;0,5)\leq 2] = F_{B(10;0,5)}(6) - F_{B(10;0,5)}(2) = 0,8281 - 0,0547 = 0,7734.$

5. $P[B(5;0,3)\leq x] = 0,97 \Leftrightarrow F_{B(5;0,3)}(x) = 0,97 \Leftrightarrow x = 3.$

6. $P[P_{4,4}\leq 4] = F_{P_{4,4}}(4) = \sum_{i=0}^{4} p_i = 0,0123 + 0,0540 + 0,1188 + 0,1743 + 0,1917 = 0,5511.$

7. $P[P_{8,4} = x] = 0,129 \Leftrightarrow x = 9.$

8. $P[P_x = 9] \Leftrightarrow x = 5.$

9. $P[P_4 > 5] = 1 - P[P_4 \leq 5] = 1 - \sum_{i=0}^{5} p_i = 1 - 0,7852 = 0,2148.$

EXERCICE 7.2.

1. Soit X=“Le nombre de mesures incorrectes parmi les 20 relevées” $\Rightarrow X \sim B(20;0,05)$. On s'intéresse alors à,

$$P[X=0] = P[X\leq 0] = F_{B(20;0,05)}(0) = 0.3585$$

2. Soit Y =“Le nombre de mesures incorrectes pendant les 7 jours”$\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{7} X_i$ où X_i=“Le nombre de mesures incorrectes parmi les 20 relevées du i^e jour de la semaine” $(i \in \{1,\ldots,7\}) \Rightarrow Y \sim B(140;0,05)$ car $X_i \sim B(20;0,05) \forall i \in \{1,\ldots,7\}$. On s'intéresse alors à,

$$P[Y=0] = C_{140}^{0} 0,05^0 0,95^{140} = 0,95^{140} = 0,00076086$$

Autre méthode : Soit Z ="Le nombre de jours où aucune mesure incorrecte n'a été relevée parmi les 7 jours considérés". Dans ce cas, $Z \sim B(7; 0,3585)$ et on s'intéresse à

$$P[Z = 7] = C_7^7 0,3585^7 0,6415^0 = 0,3585^7 = 0,00076086$$

Remarque : on peut également approximer ce dernier résultat en utilisant les tables en prenant $n = 7$ et $p = 0,35$. En effet, $P[Z = 7] = P[Z \leq 7] - P[Z \leq 6] \cong F_{B(7;0,35)}(7) - F_{B(7;0,35)}(6) = 1 - 0.9994 = 0.0006$

EXERCICE 7.3.

Soit Y ="le nombre de boîtes défectueuses dans un paquet de 5 boîtes". Premièrement, remarquons que Y ne suit pas une $Bin(5; 0,1)$. Pour que cela soit vrai il faudrait que la probabilité de tirer une boîte défectueuse soit toujours égale à 0,1 mais ce n'est pas le cas (cela dépend si on a déjà tiré une boîte défectueuse ou pas).

Il faut en fait utiliser une Hypergéométrique : supposons que nous sommes confrontés à un ensemble contenant N objets. Dans cet ensemble pN ont une certaine propriété ($p \in [0, 1]$) et qN ne l'ont pas ($q = 1 - p$). On extrait n objets de cet ensemble et on s'intéresse à la variable aléatoire X qui représente le nombre d'objets ayant la propriété dans les n sélectionnés.

La variable X suit une loi Hypergéométrique (notation $X \sim H(n, p, N)$) et on peut calculer sa distribution de probabilité de la façon suivante :

$$P[X = k] = \frac{C_{pN}^k C_{qN}^{n-k}}{C_N^n}.$$

avec $k \in \{0, 1, \ldots, pN\}$.

Dans l'exercice, $N = 40; n = 5; p = 0,1$, nous avons donc $Y \sim H(5; 0,1; 40)$. Dans ce cas, on obtient :

$$P[Y = x] = \frac{C_4^x C_{36}^{5-x}}{C_{40}^5}$$

avec $x \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Remarque : on peut cependant approximer une Hypergéométrique par une binomiale mais il faut pour cela que $10n < N$. Ce qui n'est pas le cas dans l'exercice.

EXERCICE 7.4.

Complément à l'énoncé : t est en années.

1. Soit X ="le nombre d'éruptions pendant 100 années". Dans ce cas, $X \sim P_{0,03}$ et on s'intéresse à :

$$\begin{aligned} P[X \geq 1] &= 1 - P[X < 1] = 1 - P[X \leq 0] = 1 - P[X = 0] \\ &= 1 - e^{-0,03} \frac{(0,03)^0}{0!} = 1 - e^{-0,03} = 0,0296. \end{aligned}$$

2. Soit Y ="le nombre d'éruptions pendant 1000 années". Dans ce cas, $Y \sim P_{0,3}$ et on s'intéresse à :

$$P[Y \geq 1] = 1 - P[Y < 1] = 1 - P[Y \leq 0] = 1 - P[Y = 0] = 1 - 0,7408 = 0,2592.$$

EXERCICE 7.5.

Soit X ="Le nombre de télés vendues par mois". Dans ce cas, $X \sim P_5$ et on cherche la valeur x_{min} de cette variable telle que

$$P[X > x_{min}] \leq 0,05 \Leftrightarrow 1 - P[X \leq x_{min}] \leq 0,05 \Leftrightarrow P[X \leq x_{min}] \geq 0,95.$$

Grâce à la table, on voit que $x_{min} = 9$. En effet, $P[X \leq 8] = \sum_{i=0}^{8} p_i = 0,0067 + 0,0337 + 0,0842 + 0,1404 + 0,1755 + 0,1755 + 0,1462 + 0,1044 + 0,0653 = 0,9319 < 0.95$ et $P[X \leq 9] = P[X \leq 8] + p_9 = 0,9319 + 0.0363 = 0,9682 \geq 0,95$.

EXERCICE 7.7.

Soit X ="Le nombre d'échantillons prélevés inadéquats". Dans ce cas, $X \sim Bin(n; 0,2)$ et il faut déterminer n tel que

$$P[X \leq n - 5] \geq 0,99.$$

Grâce à la table, on trouve que $n \geq 10$. En effet :
$n = 5 :\ P[X = 0] = 0,3277$
$n = 6 :\ P[X \leq 1] = 0,6554$
$n = 7 :\ P[X \leq 2] = 0,8520$
$n = 8 :\ P[X \leq 3] = 0,9437$
$n = 9 :\ P[X \leq 4] = 0,9804$
$n = 10 :\ P[X \leq 5] = 0,9936.$

EXERCICE 7.8.

1. Soit X =“Le nombre de réponses erronées du candidat au 10 questions´´. Dans ce cas, $X \sim Bin(10;2/3)$ et pour que le candidat gagne il faut que $X < 5$. On calcule donc :

$$\begin{aligned} P[X < 5] &= P[Bin(10;2/3) < 5] = P[Bin(10;1/3) > 5] \\ &= 1 - P[Bin(10;1/3) \leq 5] = 1 - 0,9234 = 0,0766. \end{aligned}$$

2. Ici $X \sim Bin(10;0,5)$ et donc :

$$P[X < 5] = P[X \leq 4] = 0,3770.$$

EXERCICE 7.18.

1. Soit X =“nombre de bactéries présentes dans un centimètre cube”. Dans ce cas, $X \sim P_1$ et on s'intéresse à

$$P[X = 0] = 0,3679.$$

2. Soit Y =“nombre de bactéries présentes dans 5 centimètres cubes”. Dans ce cas, $Y = \sum_{i=1}^{5} X_i$ où X_i =“nombre de bactéries présentes dans le i^e centimètre cube”. Donc, $X \sim P_5$ et on s'intéresse à

$$P[Y = 0] = 0,0067.$$

EXERCICE 7.12.

Soit T =“Temps entre deux arrivées successives d'automobilistes à la pompe”. Dans ce cas, $T \sim Exp(1/3)$ et on s'intéresse à

$$P[T > 5] = \int_5^{+\infty} \frac{1}{3} e^{\frac{-x}{3}}\, dx = e^{\frac{-5}{3}}.$$

ou

$$P[T > 5] = 1 - P[T \leq 5] = 1 - (1 - e^{\frac{-5}{3}}) = e^{\frac{-5}{3}}.$$

Rappel : si $X \sim Exp(\lambda)$, $F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

EXERCICE 7.17.

1. Soit $S = \min\{V, W\}$.

$$\begin{aligned}
F_S(x) &= P[S \le x] \\
&= P[\min\{V,W\} \le x](\min\{V,W\} \le x : V \le x \text{ et } W \le x,\ V \le x \le W \text{ ou } W \le x \le V) \\
&= 1 - P[\min\{V,W\} > x](\min\{V,W\} > x : V > x \text{ et } W > x \text{ (1 seul cas!)}) \\
&= 1 - P[V > x \text{ et } W > x] \\
&= 1 - P[V > x]P[W > x] \text{ (}V\text{indépendante de } W) \\
&= 1 - \big(1 - P[V \le x]\big)\big(1 - P[W \le x]\big) \\
&= 1 - \big(1 - F_V(x)\big)\big(1 - F_W(x)\big) \\
&= \begin{cases} 1-(1-0)(1-0) & si\ x<0 \\ 1-\big(1-(1-e^{-a_1x})\big)\big(1-(1-e^{-a_2x})\big) & si\ x \ge 0 \end{cases} \text{(voir rappel exercice 12)} \\
&= \begin{cases} 0 & si\ x<0 \\ 1-e^{-(a_1+a_2)x} & si\ x \ge 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{1}$$

Conclusion : $S \sim Exp(a_1 + a_2)$.

2. Soit $T = \max\{V, W\}$.

$$\begin{aligned}
F_T(x) &= P[T \le x] \\
&= P[\max\{V,W\} \le x](\max\{V,W\} \le x : V \le x \text{ et } W \le x \text{ (1 seul cas!)}) \\
&= P[V \le x \text{ et } W \le x] \\
&= P[V \le x]P[W \le x] \text{ (}V\text{indépendante de } W) \\
&= F_V(x)F_W(x) \\
&= \begin{cases} 0 & si\ x<0 \\ (1-e^{-a_1x})(1-e^{-a_2x}) & si\ x \ge 0 \end{cases} \text{(voir rappel exercice 12)}
\end{aligned} \tag{2}$$

EXERCICE 7.22.

Soit $X =$"durée de vie d'un élément radioactif". Dans ce cas, $X \sim Exp(1/5)$. Soit $Y =$"erreur commise sur la mesure de la durée de vie". Dans ce cas, $Y \sim U[0; 0,1]$. Rappelons que :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{5}e^{\frac{-x}{5}} & si\ x \ge 0 \end{cases}$$

et

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \notin [0;0,1] \\ \frac{1}{0,1} = 10 & si\ x \in [0;0,1] \end{cases}$$

Soit $Z =$"durée de vie mesurée". Dans ce cas $Z = X + Y$.

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(u)(x-u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X)}(u) f_Y(x-u)du \text{ (X indépendante de Y)} \end{aligned}$$

Pour que $f_{(X)}(u)f_Y(x-u) \neq 0$ il faut que $u \geq 0$ et $x - u \in [0;0,1] \Leftrightarrow u \in [0;+\infty] \cap [x-0,1;x]$

Remarquons que

$$[0;+\infty] \cap [x-0,1;x] = \begin{cases} \emptyset & si\ x < 0 \\ [0,x] & si\ 0 \leq x < 0,1 \\ [x-0,1;x] & si\ x \geq 0,1 \end{cases}.$$

Nous avons donc que

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \int_0^x \frac{1}{5} e^{\frac{-u}{5}} 10du & si\ 0 \leq x < 0,1 \\ \int_{x-0,1}^x \frac{1}{5} e^{\frac{-u}{5}} 10du & si\ x \geq 0,1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 10e^{-\frac{x}{5}} - 10 & si\ 0 \leq x < 0,1 \\ 10e^{-\frac{x}{5}} - 10e^{-\frac{x-0,1}{5}} & si\ x \geq 0,1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$(4)$$