

TP 7 : Variables aléatoires particulières

Rappel théorique

Variables aléatoires discrètes

Binomiale

Nombre de réalisations d'un événement A au cours de n expériences indépendantes. L'événement A se réalise avec une probabilité p .

Distribution : $P[B(n, p) = k] = C_k^n p^k (1 - p)^{n-k}$ ($k \in \mathbb{N}$)

Moyenne : $\mu = np$

Variance $\sigma^2 = np(1 - p)$

fonction génératrice des moments : $\psi(t) = (pe^t + (1 - p))^n$

Propriétés :

1. $B(n_1, p) + B(n_2, p) = B(n_1 + n_2, p)$ (on suppose les deux binomiales indépendantes)
2. $P[B(n, p) = k] = P[B(n, 1 - p) = n - k]$

Poisson

$$P_\lambda = \lim_{p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, np \rightarrow \lambda} B(n, p)$$

Distribution : $P[P_\lambda = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ ($k \in \mathbb{N}$)

Moyenne : $\mu = \lambda$

Variance $\sigma^2 = \lambda$

fonction génératrice des moments : $e^{\lambda(e^t - 1)}$

Propriété : $P_{\lambda_1} + P_{\lambda_2} = P_{\lambda_1 + \lambda_2}$ (on suppose les deux poissons indépendants)

Variables aléatoires continues

Uniforme

$$\text{Densité : } \begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \notin [a, b] \\ f(x) = \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \end{cases}$$

Moyenne : $\mu = \frac{a+b}{2}$

Variance $\sigma^2 = \frac{b-a}{12}$

fonction génératrice des moments : $\frac{1}{t} \frac{e^{tb} - e^{ta}}{b-a}$

Exponentielle

Temps entre deux réalisations successives d'un événement A distribué selon une exponentielle.

$$\text{Densité : } \begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Moyenne : $\mu = \frac{1}{\lambda}$

Variance $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

fonction génératrice des moments : $\frac{\lambda}{\lambda-t}$ ($t < \lambda$)

Normale(μ, σ)

Densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

fonction génératrice des moments : $e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

Propriétés :

1. $N(\mu_1, \sigma_1) + N(\mu_2, \sigma_2) = N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$ (on suppose les deux normales indépendantes)
2. Graphique densité : cloche symétrique par rapport à μ

χ_n^2

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^n N(0, 1)^2$$

$$\text{Densité : } f(x) = \begin{cases} \frac{x^{n/2-1} e^{-x/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Moyenne : $\mu = n$

Variance $\sigma^2 = 2n$

Fonction génératrice des moments $\psi(t) = (1 - 2t)^{-n/2}$

Student

$$t_n = \frac{V}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i^2}}$$

où $V, V_i (i = 1 \dots, n)$ sont des $N(0, \sigma)$ indépendantes.

Propriété : densité en cloche symétrique par rapport à 0.

Fisher-Snedecor

$$F_{mn} = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m V_i^2}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W_j^2}$$

où $V_1, \dots, V_m$ et $W_1, \dots, W_n$ sont des $N(0, \sigma)$ indépendantes

Propriété : $P[F_{m,n} \geq x] = P[F_{n,m} \leq \frac{1}{x}]$