7 VARIABLES ALEATOIRES PARTICULIERES - APPLICATIONS

EXERCICE 7.1. : lecture des tables statistiques

$B(n,p)$ = binomiale de paramètre p et d'exposant n;

P_λ = Poisson de paramètre de λ

$N(\mu,\sigma)$ = normale de moyenne μ et d'écart-type σ;

$\chi^2_{(n)} = \chi^2$ à n degrés de liberté;

$t_{(n)}$ = Student à n degrés de liberté;

$F_{m,n}$ = Snedecor à m et n degrés de liberté.

En se basant sur les tables, déterminer x dans chacune des expressions suivantes :

$P[B(3,.2)=1]=x$	$P[N(0,1)>-1]=x$
$P[B(15,.4)\leq 10]=x$	$P[-2<N(0,1)<3]=x$
$P[B(9,.8)<3]=x$	$P[N(0,1)<-3]=x$
$P[2<B(10,.5)<7]=x$	$P[N(0,1)<x]=0,94$
$P[B(5,.3)\leq x]=0,97$	$P[-x<N(0,1)<x]=0,9$
$P[P_{4.4}\leq 4]=x$	$P[\chi^2_{(17)}\leq x]=0,95$
$P[P_{8.4}=X]=0,129$	$P[\chi^2_{(5)}>x]=0,9$
$P[P_x=9]=0,0363$	$P[t_{(20)}<x]=0,999$
$P[P_4>5]=x$	$P[-x<t_{(10)}<x]=0,9$
$P[N(0,1)\leq 1,17]=x$	$P[F_{3,8}\leq x]=0.95$
$P[N(10,3)\leq 5]=x$	$P[F_{11,16}\leq x]=0,9$
$P[N(10,3)=5]=x$	$P[F_{20,3}\leq x]=0,1$

EXERCICE 7.2.

Un réseau météorologique expérimental est installé en zone rurale. Il est composé de 20 stations réparties dans la région. Chaque matin, un opérateur local transmet par téléphone la température minimale journalière de sa station vers un bureau central qui l'enregistre. On estime que la probabilité qu'une mesure soit incorrecte (mal lue, mal transmise, mal encodée,...) est égale à 0,05 pour chaque mesure, quel que soit l'opérateur.

1. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune mesure incorrecte sur les 20 mesures enregistrées chaque jour?

2. Donner la probabilité pour le nombre d'enregistrements ne comportant pas de mesures incorrectes parmi 7 enregistrements consécutifs (soit une semaine d'enregistrements).

EXERCICE 7.3.

Des boîtes de conserve sont conditionnées par carton de 40 boîtes à leur sortie de l'usine. Pour leur vente en supermarché, le contenu de chaque carton est reconditionné en 8 paquets de 5 boîtes. Si le carton contenait 4 boîtes défectueuses, quelle serait la probabilité qu'un des paquets de 5 boîtes pris au hasard contienne x boîtes défectueuses?

EXERCICE 7.4.

On considère que les éruptions du Vésuve susceptibles de produire des dommages majeures suivent une loi de Poisson, où le nombre moyen d'éruptions sur un intervalle de temps t est 0,0003 t pour les éruptions les plus dangereuses (de type plinéen, telles que celle de 79 AJC ayant enseveli Pompeï). Quelle est la probabilité d'observer au moins une éruption de ce type durant

1. le siècle à venir?
2. le millénaire à venir?

EXERCICE 7.5.

Un commerçant vend en moyenne 5 téléviseurs par mois. Il a la possibilité de réapprovisionner son stock au début de chaque mois. Combien de téléviseurs doit-il avoir en stock au début de chaque mois de telle sorte que le risque de manquer de téléviseur soit inférieur à 5% ?

On suppose que les achats sont indépendants les uns des autres et peuvent se produire à tout instant avec la même chance.

EXERCICE 7.6.

Un individu voudrait s'acheter un nouveau téléphone portable lui permettant de consulter ses emails. Par jour, il évalue que le volume des emails reçus est une variable aléatoire de Poisson de paramètre 1500 Ko. On suppose qu'il lit ses emails une fois par jour et qu'il les efface tous ensuite. Quelle devrait être la taille de la carte mémoire pour que la probabilité de saturation soit inférieure à 10 % ?

EXERCICE 7.7.

Pour l'étude des sols d'une région, on envisage d'effectuer des tests à partir d'échantillons prélevés sur le terrain. Cinq échantillons doivent être soumis aux tests, et l'on sait que la probabilité qu'un échantillon prélevé s'avère être inadéquat (endommagé, atypique,...) est de 0,2. Si l'on veut être assuré de diposer de cinq échantillons utilisables avec une probabilité au moins égale à 0,99, combien d'échantillons faut-il prélever?

EXERCICE 7.8.

Une chaîne de télévision organise un jeu au cours duquel on pose des questions à choix multiples à un candidat (3 choix possibles pour chaque question). L'épreuve est éliminatoire; le candidat dispose au départ d'un capital de 5 points et perd un point à chaque mauvaise réponse qu'il donne. Le jeu s'arrête après 10 questions (le candidat gagne alors le gros lot s'il lui reste au moins un point), ou avant si le candidat n'a plus de points. Quelle est la probabilité qu'un candidat gagne le gros lot si

1. il donne les réponses au hasard?
2. il peut toujours éliminer l'une des deux mauvaises réponses et choisit au hasard l'une des deux réponses restantes?

EXERCICE 7.9.

Une machine est utilisée en vue de remplir automatiquement des paquets de tabac, dont le poids net garanti est de 100 g. Des fluctuations aléatoires de poids existent cependant et, par mesure de prudence, le producteur décide de donner à ces paquets un poids moyen de 101 g. En supposant que la distribution des poids est normale et d'écart-type 0,75 (ce qui est vérifiable expérimentalement : cf. inférence statistique), dans quelle proportion des cas le poids net des paquets serait-il inférieur au minimum garanti ? Comment peut-on ramener cette proportion à 2 % :

1. par un réglage de la machine, sans changer le poids moyen des paquets
2. en changeant le poids moyen des paquets ?

EXERCICE 7.10.

Le quotient intellectuel QI standard de Wechsler est défini de la façon suivante: une note de 100 points correspond à la moyenne obtenue lors de l'étalonnage du test d'intelligence pour une catégorie d'âge, et l'on ajoute ou l'on retranche 15 points pour un écart égal à l'écart-type (un $QI > 100$ correspond ainsi à une intelligence supérieure à la moyenne). En pratique, la fonction de probabilité du QI est celle d'une loi normale.

1. Si l'on considère qu'un enfant ayant un $QI \geq 135$ est surdoué, quelle est la fréquence théorique des enfants surdoués dans une population?
2. Considérons une association dont le critère d'admission est un score supérieur ou égal au 98ème percentile à tout test standardisé et supervisé de QI. Quelle est la valeur du QI de Wechsler qu'il faut avoir pour y être admis?

EXERCICE 7.11.

En supposant que le quotient intellectuel des recrues de l'armée soit une $N(100, 10)$, calculer :

a) la proportion de recrues ayant un Q.I. compris entre 100 et 105
b) la proportion de recrues ayant un Q.I. inférieur à 80
c) la proportion de recrues ayant un Q.I. supérieur à 120
d) le Q.I. dépassé par 10 % des recrues.

EXERCICE 7.12.

Le temps entre 2 arrivées successives d'automobilistes à une pompe d'essence est en moyenne de 3 minutes et est distribué suivant une exponentielle négative. Quel est le pourcentage de cas où ce temps est supérieur à 5 minutes ?

EXERCICE 7.13.

Pour des ampoules électriques d'une marque donnée, on a pu déterminer que leur durée de vie, de moyenne de 320 jours, suit une loi exponentielle.

1. Quelle est la probabilité qu'une ampoule reste en fonction durant plus d'une année?
2. Calculer le temps x tel que la probabilité que la durée de vie excède ce temps soit égale à $1/2$.

EXERCICE 7.14.

Sachant que V est une $N(\mu, \sigma)$, que peut-on dire de $W = aV + b$?

EXERCICE 7.15.

Sachant que V est une $N(\mu, \sigma)$, que $P[V \geq 16] = 0,1492$ et que $P[V \geq 9] = 0,5987$, trouver μ et σ.

EXERCICE 7.16.

Soit V une variable normale réduite. Calculer μ_k, $\forall k$.

EXERCICE 7.17.

Soient V et W deux variables exponentielles négatives indépendantes de paramètres a_1 et a_2. Calculer la fonction de répartition de $S = \min(V, W)$ et de $T = \max(V, W)$.

EXERCICE 7.18.

En supposant que le nombre de bactéries présentes dans un milieu de culture d'un volume suffisamment important est distribué selon une Poisson et, qu'en moyenne, ce milieu contient une bactérie par centimètre cube, déterminer :

a) la probabilité qu'un échantillon d'un centimètre cube prélevé dans ce milieu ne contienne aucune bactérie;

b) la probabilité qu'un échantillon de 5 centimètres cubes prélevé dans ce milieu ne contienne aucune bactérie.

EXERCICE 7.19.

Si V est une $N(\mu, \sigma)$ de fonction de répartition $F(x)$, alors

A. $\mathbb{P}[|V-\mu|<a] = 2F(\mu+a)-1$

B. $\mathbb{P}[V=\mu] = 1/2$

C. $\mathbb{P}\left[\dfrac{V-\mu}{\sigma}>0\right] = 1/2$

D. $\mathbb{P}[V>0] = \mathbb{P}[V<0]$

E. $\mathbb{P}[V \geq \mu+2\sigma] = 0,0228$.

Indiquer les affirmations correctes.

EXERCICE 7.20.

Un industriel fabrique en série des axes et des coussinets d'axes de 2 cm de diamètre moyen. Le diamètre extérieur des axes est une variable normale d'écart-type 0,05mm et le diamètre intérieur des coussinets est une variable normale d'écart-type 0,07 mm. Si on associe au hasard un coussinet à chaque axe, dans quelle proportion des cas les axes ne pourront-ils pas pénétrer dans les coussinets. Que devient cette proportion si on prévoit en moyenne un jeu de 0,1 mm en donnant aux axes un diamètre moyen égal à 19,95 mm et aux coussinets un diamètre moyen de 20,05 mm.

EXERCICE 7.21.

Vous devez approvisionner un stock de marchandises pour 4 mois. La demande mensuelle suit une loi normale de moyenne 10 000 et d'écart-type 2 000 et on suppose qu'il y a indépendance d'un mois à l'autre. Quelle quantité de marchandises faut-il commander au moins pour que la probabilité d'avoir une rupture de stock soit inférieure à 1 % ?

EXERCICE 7.22.

On suppose que la durée de vie d'un élément radioactif possède une distribution exponentielle négative de moyenne égale à 5. Lorsqu'on mesure cette durée de vie, on commet une erreur aléatoire, indépendante de la durée de vie, et distribuée de façon uniforme dans l'intervalle $[0; 0,1]$. Déterminer la densité de probabilité de la durée de vie mesurée.

EXERCICE 7.23.

Déterminer la densité de probabilité de la variable de Student.