

6 OPÉRATIONS SUR LES VARIABLES ALÉATOIRES

EXERCICE 6.1.

Si $X \sim \text{Exp}(\lambda)^{(*)}$ est la durée de vie (en jours) d'un composant électronique, quelle est la fonction de répartition de la durée de vie Y de ce composant exprimée en heures?

La variable aléatoire X suit une loi Exponentielle de paramètre λ ($X \sim \text{Exp}(\lambda)$) ssi $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$; 0 sinon.

EXERCICE 6.2.

La variable aléatoire V a comme densité de probabilité

$$f_V(x) = \begin{cases} k(4x^2 + x + 4), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

- Déterminer k ;
- Calculer la densité de probabilité de $W = 3V + 1$.

EXERCICE 6.3.

Calculer la fonction de répartition de $W = |V|$, connaissant la fonction de répartition F de V .

EXERCICE 6.4.

Soit V une variable uniforme sur $[0, 1]$. Etudier la distribution de V^2 .

EXERCICE 6.5.

Soit V une variable aléatoire continue dont la fonction de répartition F est connue. Calculer la fonction de répartition de $W = \frac{1}{V}$.

EXERCICE 6.6.

Dans un atelier, une machine A façonne des pièces en métal. Lorsque cette machine A tombe en panne, instantanément une seconde machine B identique se met en route et prend le relais. Quelle est la loi de probabilité donnant le temps de fonctionnement avant l'occurrence d'une panne pour les deux machines? Si X et Y sont respectivement le temps de fonctionnement des machines A et B, alors $X \sim Y \sim \text{Exp}(\lambda)$.

EXERCICE 6.7.

V et W sont 2 variables aléatoires indépendantes continues; calculer la fonction de répartition et la densité de probabilité de $Z = V - W$.

EXERCICE 6.8.

V et W sont 2 variables aléatoires indépendantes distribuées uniformément sur l'intervalle $[0, 2]$ et $Z = 2V + 3W$.

- a) Calculer la valeur de la fonction de répartition $F_Z(x)$ pour $x = 2$ et pour $x = 6$;
- b) Quelle est la plus petite valeur u telle que

$$\mathbb{P}[Z \leq u] = 1.$$

EXERCICE 6.9.

Lors d'un contrôle de qualité, on mesure la longueur et la largeur de pièces carrées identiques, dont le côté est égal à l mm. Si les mesures sont effectuées avec une règle capable de mesurer au mm près et que l'on arrondit la valeur mesurée à l'unité millimétrique la plus proche, quelle sera la loi de probabilité pour la surface de l'objet calculée en faisant le produit de ces deux mesures?

EXERCICE 6.10.

Soient V et W deux variables non-négatives, indépendantes et de densités de probabilité f_V et f_W .

Calculer la densité de probabilité de $Z = \frac{V}{W}$.