TP 6 : opérations sur les variables aléatoires

Corrections

Exercice 6.1.

Soit X la durée de vie en jours d'un composant électronique. La variable aléatoire X suit une loi exponentielle $Exp(\lambda)$. Sa densité de probabilité, $f_X(x)$, est donc donnée par

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous voulons déterminer la fonction de répartition de Y, la durée de vie en heures du composant électronique. Remarquons au préalable que

$$Y = 24 \,.\, X.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(24 \,.\, X \leq y) = P(X \leq y/24) \\ &= F_X(y/24). \end{aligned}$$

Il nous suffit donc, pour déterminer $F_Y(y)$, de trouver la fonction de répartition de X. Par définition,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi) d\xi.$$

A présent distinguons les cas $x < 0$ et $x \geq 0$.

Pour $x < 0$, la fonction $f_X(\xi)$ est nulle pour $\xi < x$, ce qui implique que la fonction de répartition $F_X(x)$ est aussi nulle.

Pour $x \geq 0$, la fonction $f_X(\xi)$ est nulle pour $\xi < 0$, et prend la valeur $\lambda e^{-\lambda \xi}$ pour $x \geq \xi \geq 0$. Par conséquent,

$$F_X(x) = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda \xi} d\xi = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Nous obtenons donc

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Finalement, nous déduisons que

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ 1 - e^{-\lambda (y/24)} & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 6.2.

La variable V a comme densité de probabilité

$$f_V(x) = \begin{cases} k(4x^2 + x + 4) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Déterminer k

Afin de déterminer la valeur de k, nous utilisons l'égalité suivante

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_V(x)dx = 1,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\infty}^{0} f_V(x)dx + \int_{0}^{1} f_V(x)dx + \int_{1}^{\infty} f_V(x)dx = \int_{0}^{1} k(4x^2 + x + 4)dx \\ &= k\left[(4x^3)/3 + (x^2/2) + 4x\right]_0^1 = k[4/3 + 1/2 + 4] \\ &= k\ .\ 35/6. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$k = 6/35.$$

Calculer la densité de probabilité de $W = 3V + 1$

Nous allons d'abord calculer la fonction de répartition de W, $F_W(x)$, et nous utiliserons ensuite la relation suivante

$$\frac{dF_W(x)}{dx} = f_W(x).$$

Par définition,

$$F_W(x) = P(W \leq x) = P(3V + 1 \leq x) = P\left(V \leq (x-1)/3\right) = F_V\left([x-1]/3\right).$$

Nous sommes donc amenés à déterminer la fonction de répartition de V. En suivant un raisonnement similaire à l'exercice 6.1., nous déduisons que

$$F_V(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ \frac{6}{35}\left[(4y^3)/3 + (y^2)/2 + 4y\right] & \text{si } 0 \leq y \leq 1, \\ 1 & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} F_W(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } (x-1)/3 < 0, \\ \frac{6}{35}\left(\frac{4(x-1)^3}{81} + \frac{(x-1)^2}{18} + \frac{4(x-1)}{3}\right) & \text{si } 0 \leq (x-1)/3 \leq 1, \\ 1 & \text{si } (x-1)/3 > 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \frac{2}{35}\left(\frac{4(x-1)^3}{27} + \frac{(x-1)^2}{6} + 4(x-1)\right) & \text{si } 1 \leq x \leq 4, \\ 1 & \text{si } x > 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Afin de déterminer la fonction de densité $f_W(x)$, nous dérivons $F_W(x)$ par rapport à x, ce qui donne

$$f_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \frac{2}{35}\left(\frac{4x^2-5x+37}{9}\right) & \text{si } 1 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

Exercice 6.3.

Par hypothèse, nous connaissons $F_V(x)$ et nous cherchons à déterminer $F_{|V|}(x)$. Par définition,

$$F_{|V|}(x) = P(|V| \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ P(-x \leq V \leq x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Finalement, il nous reste à déterminer $P(-x \leq V \leq x)$, qui est donnée par

$$P(-x \leq V \leq x) \quad = \quad P(V \leq x) - P(V < -x) = F_V(x) - F_V(-x-0).$$

Nous avons utilisé la relation suivante

$$P(V < -x) = \lim_{y \to -x, y < -x} P(V < y) = \lim_{y \to -x, y < -x} F_V(y) = F_V(-x-0).$$

Exercice 6.4.

Soit V une variable uniforme sur $[0,1]$. Sa fonction de densité $f_V(x)$ et sa fonction de répartition $F_V(x)$ sont donc données par

$$f_V(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Nous voulons déterminer la densité de probabilité de V^2, $f_{V^2}(x)$. Pour cela, nous allons trouver $F_{V^2}(x)$ que nous allons dériver par rapport à x afin d'obtenir $f_{V^2}(x)$. Par définition,

$$F_{V^2}(x) \quad = \quad P(V^2 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ P(-\sqrt{x} \leq V \leq \sqrt{x}) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Si $0 \leq x \leq 1$, alors $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$, ce qui implique que

$$P(-\sqrt{x} \leq V \leq \sqrt{x}) = P(V \leq \sqrt{x}) - P(V < -\sqrt{x}) = P(V \leq \sqrt{x}) = F_V(\sqrt{x}) = \sqrt{x},$$

et nous obtenons finalement

$$F_{V^2}(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

En dérivant $F_{V^2}(x)$, nous déduisons que

$$f_{V^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Exercice 6.5.

Soit V une variable aléatoire continue dont la fonction de répartition est connue. Nous voulons calculer la fonction de répartition de $W = 1/V$, $F_W(w)$. Par définition, nous obtenons

$$F_W(w) = P(W \leq w) = P(1/V \leq w).$$

Comme nous ne connaissons pas le signe de w et de V, nous envisageons les cas $V > 0$ et $V < 0$, ce qui permet de réécrire $F_W(w)$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P\left[(1/V \leq w \text{ et } V > 0) \cup (1/V \leq w \text{ et } V < 0)\right] \\ &= P\left[1/V \leq w \text{ et } V > 0\right] + P\left[1/V \leq w \text{ et } V < 0\right]. \end{aligned}$$

A présent, envisageons tous les cas possibles pour w :

1. Premier cas : $w = 0$.

   $$F_W(0) = P[1/V \leq 0,\ V > 0] + P[1/V \leq 0,\ V < 0] = 0 + P[1/V \leq 0,\ V < 0].$$

   Dès que $V < 0$ nous avons $1/V \leq 0$ et inversément, par conséquent, comme la variable V est continue,

   $$F_W(0) = P[1/V \leq 0,\ V < 0] = P(V < 0) = P(V \leq 0) = F_V(0).$$

2. Deuxième cas : $w > 0$. De façon similaire, nous déduisons que

   $$\begin{aligned} F_W(w) &= P[1/V \leq w,\ V > 0] + P[1/V \leq w,\ V < 0] \\ &= P(V \geq 1/w) + P(V < 0) \\ &= 1 - P(V < 1/w) + P(V < 0) = 1 - P(V \leq 1/w) + P(V \leq 0) \\ &= 1 - F_V(1/w) + F_V(0). \end{aligned}$$

3. Troisième cas : $w < 0$. Nous obtenons finalement,

   $$\begin{aligned} F_W(w) &= P[1/V \leq w,\ V > 0] + P[1/V \leq w,\ V < 0] \\ &= 0 + P[1/w \leq V,\ V < 0] \\ &= P(1/w \leq V < 0) = P(V < 0) - P(V < 1/w) \\ &= P(V \leq 0) - P(V \leq 1/w) \\ &= F_V(0) - F_V(1/w). \end{aligned}$$

En regroupant les trois cas étudiés, nous obtenons

$$F_W(w) = \begin{cases} F_V(0) - F_V(1/w) & \text{si } w < 0, \\ F_V(0) & \text{si } w = 0, \\ 1 - F_V(1/w) + F_V(0) & \text{si } w > 0. \end{cases}$$

Exercice 6.6.

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $Exp(\lambda)$ c'est-à-dire que leurs fonctions de densité $f_X(\xi)$ et $f_Y(\xi)$ sont égales et données par

$$f_X(\xi) = f_Y(\xi) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\xi} & \text{si } \xi \geq 0, \\ 0 & \text{si } \xi < 0. \end{cases}$$

Le temps de fonctionnement avant l'occurence d'une panne pour les deux machines, notons-le Z, est donnée par la somme du temps de fonctionnement de chaque machine avant une panne, X et Y, c'est-à-dire que

$$Z = X + Y.$$

Déterminons la densité de probabilité $f_Z(z)$. Comme nous l'avons vu dans le cours, lorsque les variables X et Y sont indépendantes,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx.$$

La fonction $f_X(x)$ est nulle pour $x < 0$ et vaut $\lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$. La fonction $f_Y(z-x)$ est nulle pour $x > z$ et vaut $\lambda e^{-\lambda(z-x)}$ pour $x \leq z$. Nous déduisons donc que

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{[0,\infty]\cap[-\infty,z]} \lambda^2 e^{-\lambda x - \lambda(z-x)} dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0, \\ \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda z} dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z} & \text{si } z \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 6.7.

Soient V et W deux variable aléatoires indépendantes et continues. Nous voulons déterminer la fonction de répartition de $Z = V - W$, $F_Z(z)$, et sa fonction de densité $f_Z(z)$. Par définition,

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(V - W \leq z) = \int\int_{v,w|v-w\leq z} f_{(V,W)}(v,w) dv dw.$$

Effectuons le changement de variables suivant

$$v = x + y \quad \text{ et } w = x.$$

Par conséquent, la contrainte $v - w \leq z$ devient $y \leq z$ et la jacobien associé à cette transformation est donné par

$$J = det \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1.$$

La fonction de répartition $F_Z(z)$ devient

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{(V,W)}(x+y, x) |-1| dx \right) dy.$$

De plus, comme les variables V et W sont indépendantes, cette dernière égalité se réécrit

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_V(x+y) f_W(x) dx \right) dy.$$

Comme la densité de probabilité, $f_Z(y)$, et la fonction de répartition, $F_Z(z)$ sont liés par la relation

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(y) dy,$$

nous déduisons que la densité de probabilité $f_Z(y)$ est donné par

$$f_Z(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_V(x+y) f_W(x) dx.$$

Exercice 6.8.

Soient V et W deux variables aléatoires indépendantes distribuées uniformément sur l'intervalle $[0, 2]$ c'est-à-dire que

$$f_V(x) = f_W(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \in [0, 2], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Nous notons $Z = 2V + 3W$.

Calculer la valeur de la fonction de répartition pour $x = 2$ et pour $x = 6$

La fonction de répartition de Z, $F_Z(z)$, est donnée par

$$F_Z(z) = P(2V + 3W \leq z) = \int \int_{v,w|2v+3w \leq z} f_{(V,W)}(v, w) dv dw.$$

Effectuons le changement de variables suivant

$$v = x/2 \quad \text{et} \quad w = (y - x)/3.$$

Par conséquent, la contrainte $2v + 3w \leq z$ devient $y \leq z$ et le jacobien de cette transformation est donné par

$$J = det \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = 1/6$$

La fonction de répartition devient alors

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{(V,W)}(x/2, (y-x)/3) |\frac{1}{6}| dx \right) dy \\ &= \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_V(x/2) f_W\left([y-x]/3\right) dx \right) dy \end{aligned}$$

De plus,

$$f_V(x/2) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x/2 \in [0,2], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \in [0,4], \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{0}^{4} \frac{1}{2} f_W\left([y-x]/3\right) dx \right) dy \\ &= \frac{1}{12} \int_{0}^{4} \left(\int_{-\infty}^{z} f_W\left([y-x]/3\right) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Comme

$$f_W\left([y-x]/3\right) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } (y-x)/3 \in [0,2], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} = \begin{cases} 1/2 & \text{si } y \in [x, x+6], \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

nous déduisons que

$$F_Z(z) = \frac{1}{24} \int_{0}^{4} \left(\int_{]-\infty,z] \cap [x,x+6]} 1 \; dy \right) dx.$$

1. Lorsque $z = 2$, remarquons que $]-\infty, z] \cap [x, x+6] =]-\infty, 2] \cap [x, x+6]$ vaut $[x, 2]$ pour $x \in [0, 2]$ et vaut ϕ pour $x \in]2, 4]$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} F_Z(2) &= \frac{1}{24} \int_{0}^{2} \left(\int_{[x,2]} 1 \; dy \right) dx = \frac{1}{24} \int_{0}^{2} (2-x) dx \\ &= \frac{1}{24} \left[2x - (x^2)/2 \right]_0^2 = 1/12. \end{aligned}$$

2. Lorsque $z = 6$, remarquons que $]-\infty, z] \cap [x, x+6] =]-\infty, 6] \cap [x, x+6]$ vaut $[x, 6]$ pour $x \in [0, 6]$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} F_Z(2) &= \frac{1}{24} \int_{0}^{4} \left(\int_{[x,6]} 1 \; dy \right) dx = \frac{1}{24} \int_{0}^{4} (6-x) dx \\ &= \frac{1}{24} \left[6x - (x^2)/2 \right]_0^4 = 2/3. \end{aligned}$$

Quelle est la plus petite valeur de u telle que $P(Z \leq u) = 1$?

Nous savons que

$$F_Z(u) = P(Z \leq u) = \frac{1}{24} \int_0^4 \left(\int_{]-\infty,u] \cap [x,x+6]} 1 \; dy \right) dx.$$

La plus petite de u vérifiant $P(Z \leq u) = 1$ est la plus petite valeur pour laquelle $]-\infty, u] \cap [x, x+6] = [x, x+6]$. Comme x varie de 0 à 4, clairement,

$$u = 10.$$

Vérifions que $P(Z \leq 10) = 1$:

$$F_Z(10) = \frac{1}{24} \int_0^4 \left(\int_x^{x+6} dy \right) dx = \frac{1}{24} \int_0^4 6 \; dx = 1.$$

Exercice 6.9.

Soient X et Y les côtés de l'objet que nous mesurons (ces mesures sont indépendantes). La machine utilisée pour mesurer la longueur des côtés détectera une erreur lorsque les longueurs seront soit strictement inférieures à $l-1$ soit strictement supérieures à $l+1$. Par conséquent, chaque côté aura une longueur de $(l+\epsilon)$ mm où $\epsilon \sim U[-1,1]$. Rappelons que si $\epsilon \sim U[-1,1]$, sa fonction de répartition ainsi que sa densité de probabilité sont données par

$$F_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ x/2 & \text{si } x \in [-1,1], \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases} \quad \text{et} \quad f_\epsilon(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \in [-1,1], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Montrons que si $T = l + \epsilon$, alors $T \sim U[l-1, l+1]$. Comme toujours, calculons d'abord la fonction de répartition de T pour ensuite dériver sa densité de probabilité. Par définition,

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) = P(l+\epsilon \leq t) = P(\epsilon \leq t-l) = F_\epsilon(t-l) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t-l < -1 \\ (t-l)/2 & \text{si } t-l \in [-1,1], \\ 1 & \text{si } t-l > 1. \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < l-1 \\ (t-l)/2 & \text{si } t \in [l-1,l+1], \\ 1 & \text{si } t > l+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement,

$$f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = \begin{cases} 1/2 & \text{si } t \in [l-1,l+1], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Nous cherchons la loi de la surface de l'objet, notée Z. Cette surface étant égal au produit des longueurs des côtés, nous voulons déterminer la loi de

$$Z = X.Y,$$

où X et Y suivent des lois uniformes $U[l-1, l+1]$. La fonction de répartition, $F_Z(z)$, est donnée par

$$F_Z(z) = \int\int_{x,y|x.y\leq z} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy.$$

Effectuons le changement de variables suivant

$$x = v \quad \text{et} \quad y = w/v.$$

Par conséquent, la contrainte $x.y \leq z$ devient $w \leq z$ et le jacobien de la transformation est donné par

$$J = det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w/(v^2) & 1/v \end{pmatrix} = 1/v.$$

La fonction de répartition se réécrit

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(v, w/v)|1/v|dv\right)dw.$$

Etant donné que les variables X et Y sont indépendantes et que X est de loi uniforme dans $[l-1, l+1]$,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(v)f_Y(w/v)|1/v|dv\right)dw \\ &= \int_{-\infty}^{z}\left(\int_{l-1}^{l+1} \frac{1}{2}f_Y(w/v)\frac{1}{v}dv\right)dw. \end{aligned}$$

Comme

$$f_Y(w/v) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } w/v \in [l-1, l+1], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} = \begin{cases} 1/2 & \text{si } w/(l+1) \leq v \leq w/(l-1), \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

la fonction de répartition devient

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z}\left(\int_{[l-1,l+1]\cap[w/(l+1),w/(l-1)]} \frac{1}{4v}dv\right)dw,$$

et la fonction de densité est alors donnée par

$$f_Z(w) = \int_{[l-1,l+1]\cap[w/(l+1),w/(l-1)]} \frac{1}{4v}dv.$$

Discutons à présent en fonction des différentes valeurs prises par w.

1. Si $w/(l-1) < l-1$ c'est-à-dire si $w < (l-1)^2$, alors

   $$[l-1, l+1] \cap [w/(l+1), w/(l-1)] = \phi,$$

   et $f_Z(w) = 0$.

2. Si $w/(l-1) \in [l-1, l+1]$, c'est-à-dire si $w \in [(l-1)^2, (l-1)(l+1)]$ nous remarquons qu'alors $w/(l+1) < (l-1)$, ce qui implique que

$$[l-1, l+1] \cap [w/(l+1), w/(l-1)] = [l-1, w/(l-1)],$$

et la fonction de densité est donnée par

$$f_Z(w) = \int_{l-1}^{w/(l-1)} \frac{1}{4v} dv = \frac{1}{4} \left[ln\left(w/(l-1)\right) - ln(l-1) \right] = \frac{1}{4} ln\left(\frac{w}{(l-1)^2} \right).$$

3. Si $w/(l-1) > l+1$, c'est-à-dire si $w > (l+1)(l-1)$, remarquons directement que $w/(l+1) > (l-1)$. Distinguons à présent deux sous-cas :

$$w/(l+1) < (l+1) \quad \text{et} \quad w/(l+1) > (l+1).$$

Pour le premier sous-cas, c'est-à-dire pour

$$w \in [(l-1)(l+1), (l+1)^2],$$

nous obtenons que

$$[l-1, l+1] \cap [w/(l+1), w/(l-1)] = [w/(l+1), l+1],$$

et la fonction de densité vaut donc

$$f_Z(w) = \int_{w/(l+1)}^{l+1} \frac{1}{4v} dv = \frac{1}{4} \left[ln\left(l+1\right) - ln\left(w/(l+1)\right) \right] = \frac{1}{4} ln\left(\frac{(l+1)^2}{w} \right).$$

Pour le second sous-cas, $[l-1, l+1] \cap [w/(l+1), w/(l-1)] = \phi$ et la fonction de densité est nulle.

En regroupant les résultats obtenus dans chaque cas, nous obtenons

$$f_Z(w) = \begin{cases} \frac{1}{4} ln\left(\frac{w}{(l-1)^2}\right) & \text{si } w \in [(l-1)^2, (l-1)(l+1)], \\ \frac{1}{4} ln\left(\frac{(l+1)^2}{w}\right) & \text{si } w \in [(l-1)(l+1), (l+1)^2], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Exercice 6.10.

Soient V et W deux variables aléatoires non-négatives, indépendantes et de densités de probabilité f_V et f_W. Nous voulons calculer la densité de probabilité de $Z = V/W$. Nous allons, comme toujours, d'abord déterminer la fonction de répartition de Z, $F_Z(z)$, pour ensuite dériver sa densité de probabilité, $f_Z(x)$. Par définition,

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(V/W \leq z) = \int\int_{v,w|v/w \leq z} f_{(V,W)}(v, w) dv dw.$$

Effectuons le changement de variables suivant

$$v = x\ .\ y \quad \text{et} \quad w = y.$$

Par conséquent, la contrainte $v/w \leq z$ devient $x \leq z$ et le jacobien associé à cette transformation est donné par

$$J = det \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = y.$$

La fonction de répartition $F_Z(z)$ se réécrit alors

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{(V,W)}(x.y, y)|y|dy \right) dx.$$

Comme les variables V et W sont indépendantes et qu'elles sont positives,

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{0}^{\infty} f_V(x.y) f_W(y) y\ dy \right) dx = \int_{0}^{z} \left(\int_{0}^{\infty} f_V(x.y) f_W(y) y\ dy \right) dx.$$

Etant donné que la fonction de densité $f_Z(x)$ et la fonction de répartition $F_Z(z)$ sont liés par la relation

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(x)dx,$$

nous déduisons directement que

$$f_Z(x) = \begin{cases} \int_0^\infty y f_V(x.y) f_W(y) dy & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$