5 VARIABLES ET VECTEURS ALEATOIRES

EXERCICE 5.1. : variable indicatrice

Au cours d'une expérience, un événement peut se réaliser avec une probabilité p. On lui associe la variable V_A qui vaut 1 si A se réalise et 0 sinon. Calculer sa distribution de probabilité, sa fonction de répartition (+ graphiques), sa moyenne, sa variance, sa médiane et sa fonction génératrice.

EXERCICE 5.2. : variable uniforme

La variable uniforme sur l'intervalle $[a,b]$ est la variable continue dont la densité de probabilité est constante sur $[a,b]$ et nulle en dehors. Calculer la densité de probabilité, la fonction de répartition (+ graphiques), la moyenne, la variance, la médiane et la fonction génératrice de cette variable.

EXERCICE 5.3.

Déterminer k de telle sorte que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} k(4x^3+2) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.
Soit V une variable aléatoire ayant f comme densité de probabilité.
Calculer

$$P\left[V \le \frac{1}{3}\right] \text{ et } P\left[V \le \frac{3}{4} \Big/ V > \frac{1}{3}\right]$$

EXERCICE 5.4.

On considère un algorithme permettant de résoudre des problèmes du type "plus court chemin". L'expérience a montré que le temps mis par l'algorithme pour résoudre un problème particulier pouvait être modélisé en utilisant la variable aléatoire dont la densité de probabilité est:

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & x > 0 \quad (a > 0) \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

Déterminer l'écart interquartile de cette variable aléatoire.

EXERCICE 5.5.

Soient f_1 et f_2 deux densités de probabilité à 1 dimension. Indiquer si f est également une densité de probabilité dans les cas suivants :

1. $f = 1,7f_1 - 0,7f_2$
2. $f = f_1 \cdot f_2$
3. $f = f_1 + f_2$
4. $f = \lambda f_1 + (1-\lambda) f_2$ où $0 \leq \lambda \leq 1$.

EXERCICE 5.6.

On tire indépendamment une carte dans un premier jeu de cartes et une carte dans un deuxième jeu.
V est la variable aléatoire “nombre d’as” et W est la variable aléatoire “nombre de rois”. Déterminer la distribution de probabilité du couple (V, W). Ces variables sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 5.7.

La densité de probabilité du vecteur $Z = (V, W)$ vaut

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{a^2} & \text{Si } 0 \leq x \leq y \leq a, \\ 0 & \text{ailleurs;} \end{cases}$$

calculer $F, f_1, f_2, F_1, F_2, \mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$, les équations des droites de régression et les variances résiduelles; calculer

$$P\left[V \leq \frac{a}{3}\right], \quad P\left[V \leq \frac{2a}{3} \Big/ V > \frac{a}{3}\right].$$