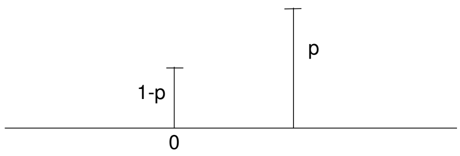
5 VARIABLES ET VECTEURS ALÉATOIRES: CORRIGÉS

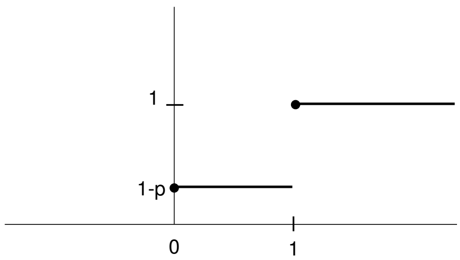
EXERCICE 5.1.

Distribution de probabilité:

Valeurs possibles	0	1
Probabilités	$1-p$	p



Fonction de répartition: $$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$



Moyenne: $\mu = \sum_i p_i x_i = (1-p) \times 0 + p \times 1 = p$

Variance: $\sigma^2 = \sum_i p_i x_i^2 - \mu^2 = (1-p) \times 0 + p \times 1 - p^2 = p(1-p)$

Médiane: $\mu_{1/2} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 1/2 \\ 1/2 & \text{si } p = 1/2 \\ 1 & \text{si } p > 1/2 \end{cases}$

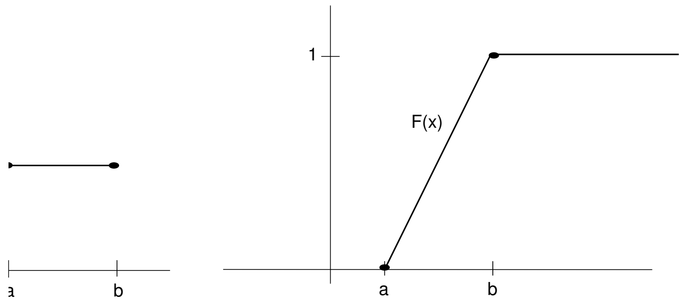
Fonction génératrice: $\psi(t) = \sum_i p_i e^{x_i t} = (1-p) \times 1 + p \times e^t = 1 + p(e^t - 1)$

EXERCICE 5.2.

Densité de probabilité: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [a,b] \\ \dfrac{1}{b-a} & x \in [a,b] \end{cases}$

car $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{b-a}$

<u>Fonction de répartition</u>: $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x \geq t \end{cases}$



<u>Moyenne</u>: $\mu = \displaystyle\int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{a+b}{2}$

<u>Variance</u>: $\sigma^2 = \displaystyle\int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)}{12}$

<u>Médiane</u>: $\mu_{1/2} = \dfrac{a+b}{2}$

<u>Fonction génératrice</u>: $\psi(t) = \displaystyle\int_a^b \frac{e^{xt}}{b-a}\, dx = \frac{1}{t}\left(\frac{e^{tb}-e^{ta}}{b-a}\right).$

EXERCICE 5.3.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$

$P[V \leq \frac{1}{3}] = F(1/3) = \int_{-\infty}^{1/3} f(x)dx = \frac{55}{243}$

$P[V \leq 3/4_{V>1/3}] = \frac{P[1/3<V\leq 3/4]}{P[V>1/3]} = \frac{F(3/4)-F(1/3)}{1-F(1/3)} \approx 0,49$

EXERCICE 5.4.

$IQ = [\mu_{1/4}, \mu_{3/4}] = [-\frac{1}{a}\ln(3/4), -\frac{1}{a}\ln(1/4)]$

EXERCICE 5.5.

Il faut vérifier que les deux propriétés de la densité de probabilité sont vérifiées:

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

2) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

La fonction f est une densité de probabilité uniquement dans le 4ème cas.

EXERCICE 5.6.

V = nombre d'AS $\in \{0, 1, 2\}$

W = nombre de ROIS $\in \{0, 1, 2\}$

V \ W	0	1	2	$p_{i.}$
0	$\left(\frac{44}{52}\right)^2$	$\frac{8 \times 44}{(52)^2}$	$\left(\frac{4}{52}\right)^2$	$\left(\frac{48}{52}\right)^2$
1	$\frac{8 \times 44}{(52)^2}$	$\frac{32}{(52)^2}$	0	$\frac{8 \times 48}{(52)^2}$
2	$\left(\frac{4}{52}\right)^2$	0	0	$\left(\frac{4}{52}\right)^2$
$p_{.j}$	$\left(\frac{48}{52}\right)^2$	$\frac{8 \times 48}{(52)^2}$	$\left(\frac{4}{52}\right)^2$	

V et W ne sont pas indépendantes car $\exists(i,j)$ tq $p_{ij} \neq p_{i.}p_{.j}$, par exemple le couple (1,2).

EXERCICE 5.7.

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq a \text{ et } y \geq a \\ y^2/a^2 & \text{si } y \text{ et } 0 < y < a \\ \dfrac{2}{a^2}\left(xy - \dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } 0 < x < y < a \\ \dfrac{2}{a^2}\left((ax - \dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } 0 < x < a \leq y \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq a \\ \dfrac{2}{a^2}(a-x) & \text{si } 0 < x < a \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \text{ ou } y \geq a \\ \dfrac{2}{a^2}y & \text{si } 0 < y < a \end{cases}$$

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{2x}{a} - \dfrac{x^2}{a^2}y & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

$$F_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ y^2/a^2 & \text{si } 0 \leq y \leq a \\ 1 & \text{si } y \geq a \end{cases}$$

$$\mu_1 = \frac{a}{3};\ \mu_2 = \frac{2a}{3};\ \sigma_1^2 = \frac{a^2}{18} = \sigma_2^2,\ \rho = \frac{1}{2}$$

Droite de régression de W en V : $y = \dfrac{1}{2}(x+a)$

Droite de régression de V en W : $x = \dfrac{y}{2}$

Variance résiduelles $= \dfrac{a^2}{24}$

$$P[V \leq \frac{a}{3}] = \frac{5}{9} \qquad P\left[V \leq \frac{2a}{3}/V > \frac{a}{3}\right] = \frac{P\left[\frac{a}{3} < V \leq \frac{2a}{3}\right]}{P[V > \frac{a}{3}]} = 3/4$$