4 PROBLEMES COMBINATOIRES

EXERCICE 4.1.

On tire 2 cartes d'un jeu de 52 cartes

1) avec remplacement 2) sans remplacement

Quelle est la probabilité d'avoir

a) 2 as b) comme 2^e carte un as c) au moins 1 as

EXERCICE 4.2.

Un tableau de contrôle électrique comporte 3 interrupteurs, dénotés par I, II et III, qui peuvent être chacun soit en position "ON" soit en position "OFF".

1. Construire un arbre pour représenter toutes les configurations possibles de ces 3 interrupteurs.
2. Donner l'espace des résultats possibles Ω.
3. Donner l'ensemble des résultats possibles qui constituent les évènements suivants:
   - A: "au moins un interrupteur en position ON"
   - B: "interrupteur I en position ON"
   - C: "aucun interrupteur en position ON"
   - D: "4 interrupteurs sont en position ON"
4. Les évènements A et B sont-ils disjoints? Idem pour A et C et pour A et D?
5. Si à tout moment chacun des interrupteurs peut tout aussi bien être sur "ON" que sur "OFF", quelle est la probabilité qu'aucun des interrupteurs ne soit sur "ON"?

EXERCICE 4.3.

Un système informatique utilise des mots de passe formés de 5 lettres suivies d'un chiffre.

1. Combien y a-t-il de mots de passe possibles?
2. Combien de mots de passe contiennent 3 fois la lettre "A" et deux fois la lettre "B" et un chiffre pair?

3. Si vous oubliez votre mot de passe mais que vous vous rappelez qu'il a les caractéristiques du point précédent, quelle est la probabilité que vous trouviez le bon code au premier essai?

EXERCICE 4.4

Une étude a montré que 80% des accidents en industrie métallurgique proviennent d'une erreur humaine et 40% proviennent d'un dysfonctionnement mécanique. 35% induisent les deux types de problèmes. Lorsqu'un accident se produit, quelle est la probabilité qu'une erreur humaine soit la seule responsable?

EXERCICE 4.5.

Sur un serveur, le code login attribué à un utilisateur est par défaut sa date d'anniversaire (sans tenir compte de l'année de naissance). Quelle est la probabilité que 2 personnes au moins, parmi n personnes choisies au hasard, se voient attribuer le même code (année = 365 jours)?

EXERCICE 4.6.

Au cours de n lancements d'une pièce de monnaie équilibrée quelle est la probabilité que "face" apparaisse

1. n fois
2. au moins une fois
3. n fois sachant qu'il est apparu $(n-1)$ fois au moins

EXERCICE 4.7.

On réceptionne un lot de pièces mécaniques dans lequel la probabilité d'avoir une pièce défectueuse est $0,01$.
Combien de pièces faut-il observer pour que la probabilité d'avoir au moins une pièce mauvaise soit $> \frac{1}{2}$?

EXERCICE 4.8.

La majorité des substances polluantes de l'eau sont organiques. La plupart de ces substances étant détruites par des bactéries qui ont besoin d'oxygène pour vivre, un excès de matières organiques peut provenir d'un manque d'oxygène dans l'eau. Ceci peut être nuisible à d'autres organismes aquatiques. La demande en oxygène des bactéries est appelée "biological oxygen demand" (BOD). Une étude des cours d'eau localisés près d'un complexe industriel révèle que 35% d'entre eux ont un BOD élevé, 10% ont une forte acidité et 40% des cours d'eau avec une forte acidité ont un BOD élevé. Quelle est la probabilité qu'un cours d'eau aléatoirement sélectionné comporte les deux caractéristiques?

EXERCICE 4.9.

Une chaîne de production est composée d'une unité principale A_1 et de trois unités secondaires B_1, B_2, B_3. On envisage d'ajouter une deuxième unité principale A_2. Les produits fabriqués par la chaîne doivent passer d'abord par une unité principale, ensuite par une unité secondaire. En cas de surcharge électrique du réseau, chaque unité principale et secondaire peut tomber en panne indépendamment des autres unités avec des probabilités respectives égales à 20% et 40%. De combien diminue la probabilté d'un arrêt de la chaîne lors d'une surcharge électrique lorsqu'on ajoute une unité principale?

EXERCICE 4.10.

Un test se base sur un questionnaire à choix multiples composé de 4 questions. La probabilité pour que l'individu A réponde correctement à une question choisie au hasard est de $3/5$ et celle de B est de $2/3$. On considère que l'individu aura réussi le test s'il a répondu correctement à au moins 2 questions. Calculer la probabilité pour que

a) A et B réussissent

b) seul A réussisse

c) au moins un des 2 réussissent.

EXERCICE 4.11.

Quelle est la probabilité que face apparaisse au moins 2 fois au cours de n jets d'une pièce équilibrée ?

EXERCICE 4.12.

Un jeu de 52 cartes est réparti au hasard en 2 paquets de 26 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir 13 rouges et 13 noires dans chaque paquet?

EXERCICE 4.13.

La probabilité pour qu'un tireur atteigne une cible est de 2/3. S'il tire 4 fois, quelle est la probabilité qu'il atteigne la cible

a) exactement 2 fois

b) au moins 3 fois

c) au moins 1 fois

EXERCICE 4.14.

En lançant 18 dés, quelle est la probabilité d'obtenir chaque face 3 fois?

EXERCICE 4.15.

On distribue au hasard et un par un des objets dans n boîtes et on s'arrête dès qu'un objet est mis dans une boîte déjà occupée. Quelle est la probabilité p_k de stopper en distribuant le k^{e} objet ?

EXERCICE 4.16.

Dans une ville ravagée par un tremblement de terre, certains architecte n'ont pas respecté les normes de construction, soit en ayant omis de placer une dalle de fondation spéciale et très coûteuse, soit en ayant sous-dimensionné cette dalle. Sur base d'un modèle théorique, on a estimé que pour le tremblement de terre ayant eu lieu, les risques d'effondrement d'un immeuble sont de 85% si la dalle n'est pas présente, de 25% si elle est sous-dimensionnée et de 1% si elle est correctement dimensionnée. Des contrôles antérieurs à l'accident ont montré que pour 5% des constructions, il y avait fraude; la dalle était sous-dimensionnée dans 80% des cas et absente dans 20% des cas.

1. Pour un immeuble effondré pris au hasard, quelle est la probabilité qu'il ne soit pas muni d'une dalle?
2. Pour un immeuble non effondré, quelle est la probabilité qu'il soit muni d'une dalle correctement dimensionnée?
3. Un deuxième tremblement de terre survient quelques jours après le premier. Quelle est la probabilité qu'un immeuble muni d'une dalle sous-dimensionnée soit intacte après cette deuxième secousse?

EXERCICE 4.17.

Actuellement, de nombreuses données sont communiquées via des réseaux de communication publiques tels que des satellites, des réseaux téléphoniques,... Lorsqu'un message est réceptionné, il doit être authentifié. Cette authentification se fait en utilisant une clé secrète. Malgré le fait que cette clé soit secrète, il y a toujours une possibilité que celle-ci tombe entre de mauvaises mains, ceci entraînant la possibilité qu'un message non-authentique apparaisse comme authentique. Supposons que 95% des messages reçus soient authentiques. De plus, supposons que 0,1% de tous les messages non-authentiques sont envoyés avec la bonne clé (rmq: les messages authentiques sont tous envoyés avec la bonne clé). Quelle est la probabilité qu'un message envoyé avec la bonne clé soit authentique?

EXERCICE 4.18.

Une urne se compose de 4 boules blanches (hypothèse H_1) soit de 2 boules blanches et de 2 noires (hypothèse H_2). On extrait avec remplacement n boules de l'urne et on constate qu'elles sont toutes blanches. Que devient la probabilité de H_1 après cette expérience sachant qu'a priori cette probabilité était égale à t ?