4 PROBLÈMES COMBINATOIRES: CORRIGÉS

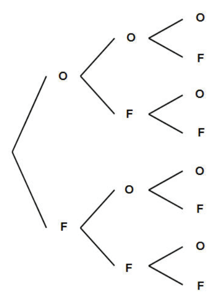
EXERCICE 4.1.

1) a) $\left(\dfrac{1}{13}\right)^2$ b) $\dfrac{1}{13}$ c) $1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2$

2) a) $\dfrac{4\times 3}{52\times 51}$ b) $\dfrac{1}{13}$ c) $1-\dfrac{48\times 47}{52\times 51}$

EXERCICE 4.2.

1. arbre:



2. $\Omega = \{OOO, OOF, OFO, OFF, FOO, FOF, FFO, FFF\}$

3.
   - A = {OOO, OOF, OFO, FOO, OFF, FOF, FFO} $= \Omega \backslash \{FFF\}$
   - B = {OOO, OOF, OFO, OFF}
   - C = {FFF}
   - D = ϕ

4. non; oui; oui

5. $P[(I=F)\cap(II=F)\cap(III=F)]$
   $= P[I=F]P[II=F]P[III=F]$ (independance)
   $= (1/2)^3 = 1/8$

EXERCICE 4.3.

1. $(26)^5 10$

2. $\frac{5!}{3!2!}5 = 50$

3. $\frac{\text{nb cas favorables}}{\text{nb cas possibles}} = \frac{1}{50}$

EXERCICE 4.4

A = "erreur humaine" ; B = "dysfonctionnement"

$P[A \setminus B] = P[A \cup B] - P[B]$ (disjoints)

$= P[A] - P[A \cap B] = 0,45$

EXERCICE 4.5.

$1 - \frac{365 \times 364 \times ... \times (365-n+1)}{(365)^n} = 1 - \frac{A_n^{365}}{(365)^n}$ $\qquad$ (> 70 pour $n = 30$)

EXERCICE 4.6.

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^n$
2. $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
3. $P[n|(n-1)\text{au moins}] = \frac{P[n \cap (n-1)]}{P[(n-1)\text{au moins}]} = \frac{P[n]}{P[n \text{ exactement}] + P[(n-1) \text{ exactement}]}$
   $= \frac{(1/2)^n}{(1/2)^n + (1/2)^{n-1}.1/2.n} = \frac{1}{n+1}$

EXERCICE 4.7.

$= 1 - P[\text{aucune défectueuse}]$

$= 1 - P[(\text{1ère pas déf.}) \cap (\text{2ème pas déf.}) \cap ... \cap (\text{nème pas déf.})]$

$= 1 - (0,99)^n > 1/2 \Rightarrow n > 69$

EXERCICE 4.8.

A = "acidité"; B ="BOD élevé"

$P[A \cap B] = P[A].P[A|B] = 10\%.40\% = 4\%$

EXERCICE 4.9.

Remarque : $P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] + P[C] - P[A \cap B] - P[B \cap C] - P[A \cap C] + P[A \cap B \cap C]$

1. A= "l'unité A fonctionne" ; B_i = "l'unité B_i fonctionne"

$$\begin{aligned} P[\text{arrêt}] &= 1 - P[\text{fonctionne}] \\ &= 1 - P[A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)] \\ &= 1 - P[A](3P[B_i] - 3P[B_i]^2 + P[B_i]^3)(\text{indépendance}) \\ &= 0,2512 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} P[\text{arrêt}] &= P[A^* \cup (B_1^* \cap B_2^* \cap B_3^*)] \\ &= P[A^*] + P[B_1^* \cap B_2^* \cap B_3^*] - P[A^* \cap B_1^* \cap B_2^* \cap B_3^*] \\ &= P[A^*] + P[B_i^*]^3 - P[A^*]P[B_i^*]^3 (\text{indépendance}) \\ &= 0.2512 \end{aligned}$$

2. A_i = "l'unité A_i fonctionne" ; B_i = "l'unité B_i fonctionne"

$$\begin{aligned} P[\text{arrêt}] &= 1 - P[\text{fonctionne}] \\ &= 1 - P[(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)] \\ &= 1 - (2P[A_i] - P[A_i]^2)(3P[B_i] - 3P[B_i]^2 + P[B_i]^3)(\text{indépendance}) \\ &= 0,1014 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} P[\text{arrêt}] &= P[(A_1^* \cap A_2^*) \cup (B_1^* \cap B_2^* \cap B_3^*)] \\ &= P[A_1^* \cap A_2^*] + P[B_1^* \cap B_2^* \cap B_3^*] - P[A_1^* \cap A_2^* \cap B_1^* \cap B_2^* \cap B_3^*] \\ &= P[A_i^*]^2 + P[B_i^*]^3 - P[A_i^*]^2 P[B_i]^3 (\text{indépendance}) \\ &= 0.2512 \end{aligned}$$

EXERCICE 4.10.

A = "A réussit" ; B = "B réussit"
$P[A] = (3/5)^4 + C_4^3(3/5)^3(2/5) + C_4^2(3/5)^2(2/5)^2$ ou
$P[A] = 1 - (2/5)^4 - (2/5)^3(3/5)C_4^1$
$P[B] = (2/3)^4 + C_4^3(2/3)^3(1/3) + C_4^2(2/3)^2(1/3)^2$ ou
$P[B] = 1 - (1/3)^4 - (1/3)^3(2/3)C_4^1$

a) $P[A \cap B] = P[A].P[B]$ (indépendance)

b) $P[A \cap B^*] = P[A].P[B^*] = P[A].(1 - P[B])$ (indépendance)

c) $1 - P[A^* \cap B^*] = 1 - (P[A^*].P[B^*])$ (indépendance)

EXERCICE 4.11.

$1 - P[0 \text{ ou } 1 \text{ fois face}] = 1 - \frac{n+1}{2^n}$

EXERCICE 4.12.

Soient A="Avoir 13 rouges et 13 noires dans le premier paquet" et B="Avoir 13 rouges et 13 noires dans le deuxième paquet"
Cela revient à calculer la probabilité d'avoir un paquet avec 13 rouges et 13 noires En effet : $P[A \cap B] = P[A]P[B|A]$ et $P[B|A] = 1$.
Cas possibles : nombre de façons de choisir un paquet de 26 cartes parmi les 52 cartes : C_{52}^{26}
Cas favorables : nombre de possibilités de prendre 13 rouges parmi 26 rouges * nombre de possibilités de prendre 13 noires parmi 26 noires : $C_{26}^{13}.C_{26}^{13}$
Solution : $\frac{C_{26}^{13}.C_{26}^{13}}{C_{52}^{26}}$

EXERCICE 4.13.

a) $(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^2 C_4^2 = 8/27$

b) $(\frac{2}{3})^3 \frac{1}{3} C_4^3 + (\frac{2}{3})^4 = 16/27$

c) $1 - \frac{1}{3}^4 = 80/81$

EXERCICE 4.14.

Il faut compter toutes les permutations **différentes** de ce vecteur:
$\underbrace{(1,1,1,2,2,2,3,3,3,...,6,6,6)}_{\text{18 composantes}}$

$\frac{(18!)}{(3!)^6}/(6^{18}) = 0,001351$

EXERCICE 4.15.

$$p_k = \underbrace{\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)}{n \ \ n \ \dots \ n \ \ n}}_{(k-1) \text{ réussites}} . \qquad \underbrace{\frac{k-1}{n}}_{\text{1er échec au } k\text{ème essai}}$$

EXERCICE 4.16.

(application de la formule de Bayès)
E = "effondrement"
A = "dalle absente" ; S = "dalle sous-dimensionnée" ; C = "dalle correctement dimensionnée"
$P[E|A] = 0,85$; $P[E|S] = 0,25$; $P[E|C] = 0,01$
$P[A] = 20\%5\% = 0,01$; $P[S] = 80\%5\% = 0,04$; $P[C] = 0,95$

1. $P[A|E] = \frac{P[E|A].P[A]}{P[E|A].P[A]+P[E|S].P[S]+P[E|C].P[C]} = 0,304$

2. $P[C|E^*] = 0,968$

EXERCICE 4.17.

(application de la formule de Bayès)

A = "authentique" ; B = "bonne clé"

$P[A] = 0.95$ $P[B|A^*] = 0.001$ $P[B|A] = 1$

Solution : $P[A|B] = \frac{P[B|A]P[A]}{P[B|A]P[A]+P[B|A^*]P[A^*]} = 0.9999$

EXERCICE 4.18.

(application de la formule de Bayès)

E = "extraire n boules blanches"

$P[H_1] = t,\ P[H_2] = 1 - t,\ P[E|H_1] = 1,\ P[E|H_2] = (1/2)^n$

$$\Rightarrow P[H_1|E] = \frac{t}{t + (1-t)(\frac{1}{2})^n}$$