3 LA NOTION DE PROBABILITE ET SES PROPRIETES

EXERCICE 3.1.

Décrire les ensembles de résultats et d'événements relatifs aux expériences suivantes :

1. jeter un dé,
2. jeter 1 pièce de 1 euro et 1 pièce de 2 euros,
3. jeter 2 pièces indiscernables.

EXERCICE 3.2.

A partir des axiomes de la théorie des probabilités, démontrer les propriétés suivantes :

1. $P(\emptyset) = 0$,
2. $P(A) + P(A^*) = 1$, où $A^* = E \setminus A$,
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,
4. $P(A) \leq 1, \quad \forall A \subset E$,
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

EXERCICE 3.3.

Sachant que $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$, calculer $P(A \cup B)$, $P(A^* \cup B^*)$, $P(A^* \cap B^*)$, $P(A^* \cup B)$, $P(A^* \cap B)$, $P(A^*)$, $P(A/B)$.
Note: se rappeler les lois de de Morgan :

$$\begin{aligned} (A \cup B)^* &= A^* \cap B^* \\ (A \cap B)^* &= A^* \cup B^* \end{aligned}$$

EXERCICE 3.4.

Démontrer que si A et B sont indépendants, alors A^* et B sont indépendants, A et B^* sont indépendants, A^* et B^* sont indépendants.

EXERCICE 3.5.

On jette 2 fois un dé et on considère les 3 événements suivants :

$A =$ "le premier résultat est impair"

$B =$ "le deuxième résultat est impair"

$C =$ "la somme des 2 résultats est impaire"

Démontrer que ces événements sont indépendants 2 à 2 mais qu'ils ne sont pas indépendants.

EXERCICE 3.6.

Dans l'expérience précédente, A et B sont indépendants mais ne sont pas incompatibles; si $D =$ "le premier résultat est pair", alors A et D sont incompatibles mais ne sont pas indépendants (justifier).

Démontrer, de façon générale, que si 2 événements de probabilités non-nulles sont incompatibles, alors ils ne peuvent pas être indépendants.

EXERCICE 3.7.

Démontrer que si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sont des événements associés à une certaine expérience, on a:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_m/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{m-1})$$

EXERCICE 3.8.

Si A, B, C sont 3 événements indépendants 2 à 2 et de probabilités non nulles, alors

1. $\mathbb{P}(A^* \cap B^*) = \mathbb{P}(A^*) \cdot \mathbb{P}(B^*)$
2. $\mathbb{P}(A^* \cap B^* \cap C^*) = \mathbb{P}(A^*) \cdot \mathbb{P}(B^*) \cdot \mathbb{P}(C^*)$
3. $\mathbb{P}(B \cap C)/A) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$
4. $\mathbb{P}((A \cap C)^*) = \mathbb{P}(A^*) \cdot \mathbb{P}(C) + 1 - \mathbb{P}(C)$

Indiquer les égalités correctes.

EXERCICE 3.9.

Soit E l'ensemble des résultats de l'expérience qui consiste à lancer 2 dés discernables, A l'événement "la somme des points est impaire" et B l'événement "au moins un des 2 points est 1".

Décrire les événements $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \cap B^*$ en tant que parties de E et calculer leurs probabilités.

EXERCICE 3.10.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n événements liés à une expérience aléatoire. Démontrer l'inégalité suivante :

$$P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$