3 LA NOTION DE PROBABILITÉ ET SES PROPRIÉTÉS : CORRIGÉS

EXERCICE 3.1.

1. Résultats $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   Evénements $= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \ldots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$.

2. Résultats = {{pile 1€, pile 2€}, {pile 1€, face 2€}, {face 1€, pile 2€}, {face 1€, face 2€}}=E

   Evénements = les 16 sous-ensembles de E.

3. Résultats = {{2 piles}, {2 faces}, {1 pile et 1 face}}=E.

   Evénements = les 8 sous-ensembles de E.

EXERCICE 3.2.

1. $1 = P(E) = P(\emptyset \cup E) = P(\emptyset) + P(E) = P(\emptyset) + 1 \Rightarrow P(\emptyset) = 0$,

2. $1 = P(E) = P(A \cup A^*) = P(A) + P(A^*)$,

3. $P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$,

4. $A \subset E \Rightarrow P(A) \leq P(E) = 1$,

5. $\left.\begin{array}{l} P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) \\ P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A) \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

EXERCICE 3.3.

$P(A \cup B) = \dfrac{7}{12}$ $\quad P(A^* \cup B^*) = \dfrac{3}{4}$ $\quad P(A^* \cap B^*) = \dfrac{5}{12}$

$P(A^* \cup B) = \dfrac{11}{12}$ $\quad P(A^* \cap B) = \dfrac{1}{4}$ $\quad P(A^*) = \dfrac{2}{3}$

$P(A/B) = 1/2$

EXERCICE 3.4.

$$
\begin{aligned}
P(A^* \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) \\
&= P(B)\,[1 - P(A)] = P(B) \cdot P(A^*)
\end{aligned}
$$

Il n'est pas nécessaire de démontrer les 2 autres propriétés. (Justifier)

EXERCICE 3.5.

Utiliser $P(A) = \frac{\sharp A}{\sharp E} = \frac{\text{nb cas favorables}}{\text{nb cas possibles}}$

$$P(A) = 1/2 \qquad P(B) = 1/2 \qquad P(C) = 1/2$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

EXERCICE 3.6.

Soit $P(\hat{A}) \neq 0$, $P(\bar{B}) \neq 0$ et $\hat{A} \cap \hat{B} \neq \emptyset$ (incompatibles).
Alors $P(\hat{A} \cap \hat{B}) = 0 \neq P(\hat{A}) \cdot P(\hat{B})$ (pas indépendants).

EXERCICE 3.7.

Démontration par récurrence.

EXERCICE 3.8.

1) et 4) sont correctes.

EXERCICE 3.9.

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(4,1),(6,1)\} \\ A \cup B &= \{\{(1,j), j = 1 \ldots 6\}, \{(i,1), i = 2, \ldots, 6\}, (2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(3,6), \\ &\quad (4,3),(5,2),(5,4),(5,6),(6,3),(6,5)\} \end{aligned}$$

$$A \cap B^* = \{(2,3),(4,5),(2,5),(3,2),(3,4),(3,6),(4,3),(4,5),(5,2),(5,4),(5,6),(6,3),(6,5)\}$$

$P(A \cap B) = 1/6, P(A \cup B) = 23/36, P(A \cap B^*) = 1/3$

EXERCICE 3.10.

Démonstration par récurrence.