

# Cordes, poutres, plaques : équilibre et vibrations

25 novembre 2010 - Version provisoire

## 1 Introduction

Cette note a pour but de présenter quelques sujets qui conduisent à la résolution de problèmes de calcul numérique typiques :

1. Résolution d'une équation non linéaire à une inconnue.
2. Calcul d'une intégrale simple.
3. Résolution d'un système d'équations linéaires.
4. Résolution de problèmes aux conditions aux limites pour une équation différentielle ordinaire.

## 2 Position d'équilibre et mouvement d'une corde

### 2.1 Le modèle mathématique

Soit une corde homogène, de masse linéique constante  $\mu$ , qui, en position de repos, est tendue horizontalement le long de l'axe  $x$  avec une tension  $T$ . On se propose de déterminer sa position d'équilibre et d'étudier ses modes propres de vibration sous les hypothèses suivantes :

1. Le mouvement est restreint au plan  $Oxz$  et les déformations de la corde sont petites.
2. La corde est infiniment souple et chacun de ses éléments, lorsqu'il est en mouvement, conserve l'abscisse qu'il avait au repos.
3. Le poids de la corde est négligeable face aux forces de tension et aux forces extérieures.

Soit un petit déplacement d'un élément de longueur  $dx$  de la corde dans la direction transversale  $Oz$ , décrit à l'instant  $t$  par la fonction  $u(x, t)$ . L'hypothèse des petites déformations implique que la pente de la corde est faible en tout point à tout instant ce qui se traduit par la condition  $|\frac{\partial u}{\partial x}| = |u_x(x)| = |\tan \alpha(x)| \ll 1$ . Isolons l'élément de corde compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  et appliquons la loi de Newton à l'élément de masse  $\mu dx$  correspondant (voir figure (1)). Soit  $\bar{T}(x)$  la tension au point d'abscisse  $x$  qu'exerce la partie droite sur la partie gauche. Il vient :

$$\mu dx \cdot \bar{a} = \bar{T}(x + dx) - \bar{T}(x) + \bar{f} dx \quad (1)$$

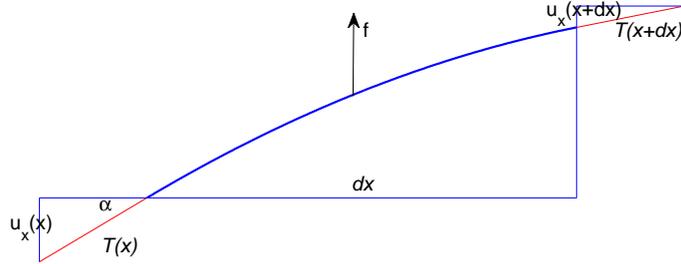


FIGURE 1 – Forces agissant sur l'élément de corde  $dx$ .

Où  $\bar{a}$  et  $\bar{f}$  sont respectivement, l'accélération transversale de l'élément de masse  $\mu dx$  et la force linéique qui lui est appliquée (dans la direction  $z$ ).

L'équation du mouvement de la corde s'écrit donc :

$$\mu \bar{a} = \frac{\partial \bar{T}(x)}{\partial x} + \bar{f} \quad (2)$$

Comme il n'y a ni déplacement, ni forces extérieures appliquées dans la direction longitudinale (selon  $x$ ), le module  $T$  de la tension peut être considéré comme constant. En effet,  $\bar{T}(x) \cdot \bar{1}_x = T \cdot \cos \alpha \approx T$ , puisque  $\cos \alpha \approx 1$ , car  $\alpha$  est petit. L'équation (2) devient :

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \cdot \bar{1}_z + f \quad (3)$$

ou encore

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial (T \sin \alpha)}{\partial x} + f \quad (4)$$

Comme l'angle  $\alpha$  est petit<sup>1</sup>, on a les approximations  $\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \frac{\partial u}{\partial x} = u_x$  et l'équation du mouvement de la corde prend la forme :

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \quad (5)$$

Si on suppose que le déplacement de la corde est freiné par un amortissement visqueux, on obtient finalement :

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - d \frac{\partial u}{\partial t} + f \quad (6)$$

Il faut évidemment associer à l'équation (6) des conditions initiales et aux limites pertinentes. Ainsi, pour une corde qui, au repos, occupe le domaine  $x \in [0, l]$  et dont les extrémités sont fixées, les conditions aux limites s'écrivent :

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (7)$$

1. L'ouverture de l'angle  $\alpha$  représenté sur la figure 1 est exagérée pour la lisibilité du dessin.

En l'absence de force extérieure et d'amortissement visqueux, l'équation (6) se simplifie en :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8)$$

avec  $c^2 = \frac{T}{\mu}$  où  $c$  est la vitesse de propagation de l'onde qui parcourt la corde. Tandis que dans le cas statique (absence de mouvement) (6) s'écrit :

$$T \frac{d^2 u}{dx^2} + f = 0 \quad (9)$$

## 2.2 Application : équilibre d'une corde.

Le calcul approché de la déformée d'une corde de longueur  $l$ , fixée en  $x = 0$  et en  $x = l$  et soumise à une force répartie modélisée par la fonction  $f(x) = -kx \cdot (l - x)$  et à une tension constante  $T$ , conduit à la résolution du problème aux conditions aux limites suivant :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{k}{T} x \cdot (l - x) \quad (10)$$

$$u(0) = u(l) = 0 \quad (11)$$

### 2.2.1 Résolution numérique

Pour résoudre le système (10), (11) de manière approchée, on applique la méthode des différences finies (voir notes de cours 10.8.2). On partage l'intervalle sur lequel on veut calculer une approximation de la fonction  $u(x)$  en  $N$  intervalles égaux, de longueur  $h$  au moyen des points  $x_i = (i - 1) \cdot h$  avec  $i = 2, 3, \dots, N$  et l'on pose  $x_1 = 0$  et  $x_{N+1} = l$ .

En chaque point  $x_i$  on remplace  $\frac{d^2 u}{dx^2}$  par son approximation  $\frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2}$  pour obtenir le système algébrique tridiagonal de  $N - 1$  équations pour les  $N - 1$  inconnues  $u(x_i)$  avec  $i = 2, 3, \dots, N$  :

$$\frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} = \frac{k}{T} x_i \cdot (l - x_i), \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (12)$$

Dans le système (12) les valeurs de la déflexion de la corde en ses extrémités sont fixées par les conditions aux limites (11) qui impliquent d'avoir

$$u(x_1 = 0) = u(x_{N+1} = l) = 0 \quad (13)$$

Le traitement numérique du problème aux conditions aux limites (10), (11) a donc conduit à la résolution du système algébrique linéaire (12) qui peut être traité par une des méthodes étudiées aux chapitres 3 et 4 des notes de cours mais également au moyen d'un algorithme spécifique aux systèmes tridiagonaux (algorithme de Thomas). Les résultats présentés sur les diagrammes de la figure 2 ont été obtenus avec  $k = T = 1$  pour une corde de longueur  $l = 2$ . On peut constater que les solutions approchées avec des petites valeurs de  $N$  sont raisonnablement proches de la solution analytique tracée en rouge sur le dernier diagramme.

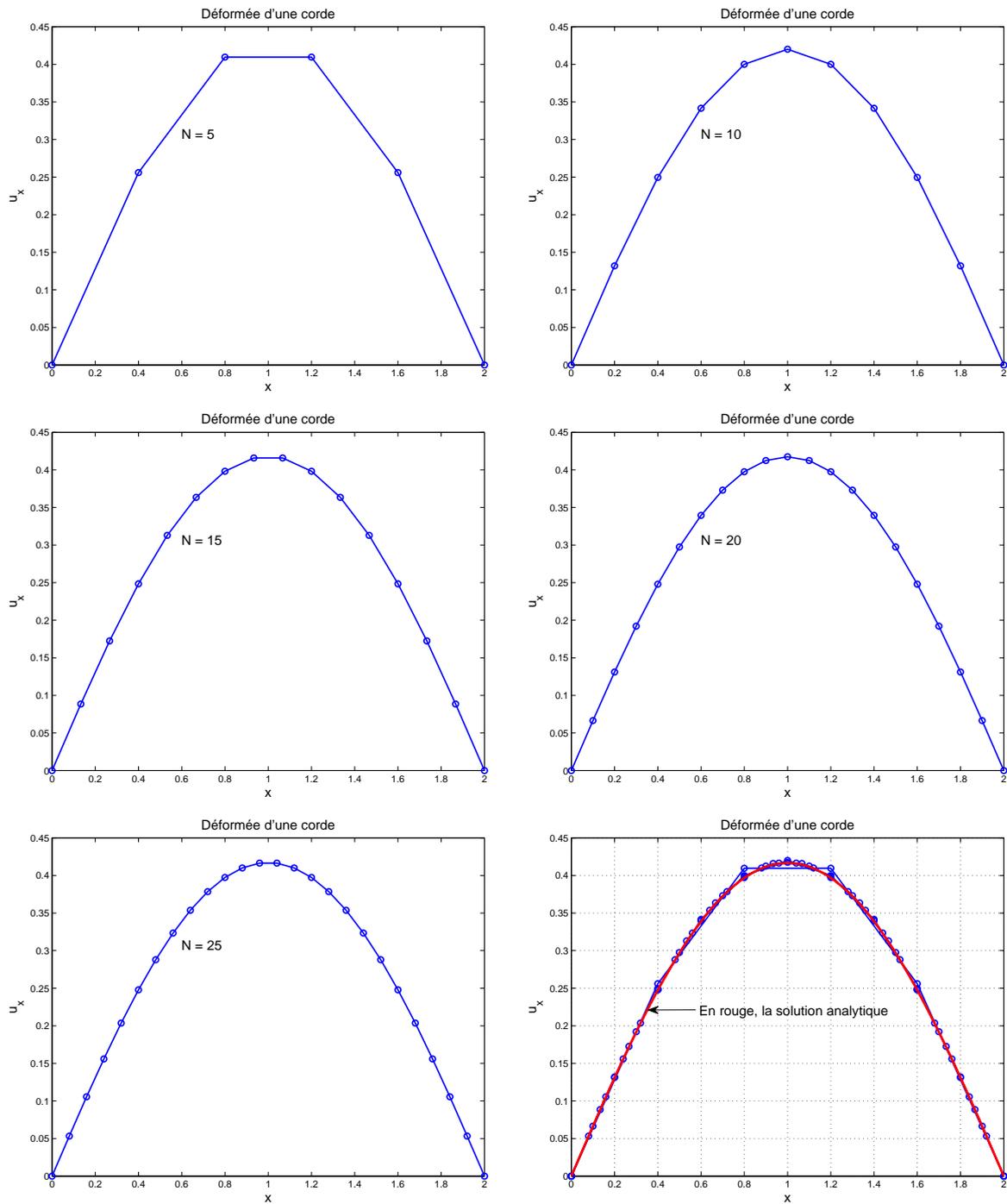


FIGURE 2 – Diverses approximations et solution analytique du problème (10), (11).

### 3 Position d'équilibre et mouvement d'une poutre

#### 3.1 Le modèle mathématique

Soit une poutre de longueur  $l$ , de masse linéique  $\mu$ , de section droite  $A$  et le système d'axes  $Oxyz$  orienté de façon à ce que les axes  $Oz$  et  $Oy$  correspondent aux axes d'inertie

principaux de la section. Sous certaines conditions, analogues à celles que nous avons envisagées dans le cas de la corde<sup>2</sup> et avec des notations semblables, on obtient l'équation aux dérivées partielles (14) à laquelle il convient d'ajouter les conditions initiales et aux limites adéquates (voir par exemple [1] page 187).

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{I}{A} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = p - \frac{\partial q}{\partial x} \quad (14)$$

$E(x)$  est le module de Young et  $I(x)$  le moment d'inertie géométrique de la section  $A(x)$ . La charge et le moment de flexion par unité de longueur, appliqués à la poutre, sont respectivement  $p(x, t)$  et  $q(x, t)$ .

L'équation des vibrations libres ( $p(x, t) = 0$  et  $q(x, t) = 0$ ) de la poutre (15) s'obtient à partir de (14) en faisant l'hypothèse que le mouvement est harmonique et qu'on peut séparer les variables en écrivant  $u(x, t) = u(x) \sin \omega t$  (veuillez excuser l'abus de notation...).

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) - \mu \omega^2 u + \omega^2 \frac{d}{dx} \left( \mu \frac{I}{A} \frac{du}{dx} \right) = 0 \quad (15)$$

Si la rigidité flexionnelle  $EI$  et la masse linéique  $\mu$  sont constantes le long de la poutre, dans l'hypothèse où le rapport  $\frac{I}{A}$  est faible, l'équation aux modes propres de vibration devient :

$$\frac{d^4 u}{dx^4} - \omega^2 \frac{\mu}{EI} u = 0 \quad (16)$$

que l'on peut mettre sous la forme réduite suivante :

$$\frac{d^4 \eta}{dx^4} - \lambda^4 \eta = 0 \quad (17)$$

où l'on a posé  $x = \frac{x}{l}$ ,  $\eta = \frac{u}{l}$  et  $\lambda^4 = \frac{\omega^2 \mu l^4}{EI}$ .

Il faut évidemment adjoindre à (17) les 4 conditions aux limites nécessaires.

### 3.2 Application : modes propres d'une poutre encastree

Les conditions aux limites qui traduisent l'encastrement d'une poutre de longueur réduite unitaire sont

$$\eta(0) = \eta(1) = 0 \quad (18)$$

et

$$\frac{d\eta}{dx}(0) = \frac{d\eta}{dx}(1) = 0 \quad (19)$$

Le problème constitué des équations (17), (18) et (19) n'admet généralement que la solution triviale, sauf pour une infinité de valeurs particulières de  $\lambda$ . Ces valeurs particulières sont appelées valeurs propres et à chacune d'elles est associée une fonction propre qui vérifie à la fois l'équation différentielle et les conditions aux limites. Cette fonction est définie à un facteur non nul près<sup>3</sup>.

---

2. Elles sont un peu plus complexes...

3. Noter le parallèle avec les valeurs et vecteurs propres d'une matrice.

On montre facilement qu'une solution de l'équation (17) peut s'écrire

$$\eta(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x + C \cosh \lambda x + D \sinh \lambda x \quad (20)$$

que l'on peut également mettre sous la forme

$$\eta(x) = A s_1(\lambda x) + B c_1(\lambda x) + C s_2(\lambda x) + D c_2(\lambda x) \quad (21)$$

où les fonctions  $s_1, c_1, s_2$  et  $c_2$  sont les fonctions de Duncan

$$s_1(\lambda x) = \sin \lambda x + \sinh \lambda x \quad (22)$$

$$c_1(\lambda x) = \cos \lambda x + \cosh \lambda x \quad (23)$$

$$s_2(\lambda x) = -\sin \lambda x + \sinh \lambda x \quad (24)$$

$$c_2(\lambda x) = -\cos \lambda x + \cosh \lambda x \quad (25)$$

Les constantes arbitraires  $A, B, C$  et  $D$  qui apparaissent dans les équations (20) ou (21) doivent être choisies de façon à ce que les conditions aux limites soient satisfaites, ce qui, pour l'équation (21) impose que l'on ait :

$$A = B = 0 \quad (26)$$

$$C s_2(\lambda) + D c_2(\lambda) = 0 \quad (27)$$

$$C \lambda c_2(\lambda) + D \lambda s_1(\lambda) = 0$$

Le système linéaire homogène de deux équations (27) n'admet que la solution triviale sauf si son déterminant s'annule, auquel cas il admet une infinité de solutions. Moyennant un peu d'algèbre on obtient comme déterminant

$$2(\cos \lambda \cdot \cosh \lambda - 1) \quad (28)$$

qui, annulé, donne l'équation aux valeurs propres, c'est-à-dire la condition à remplir pour que le problème différentiel admette une solution non identiquement nulle :

$$\cos \lambda \cdot \cosh \lambda = 1 \quad (29)$$

Elle possède une infinité dénombrable de solutions distinctes que nous noterons  $\lambda_n$  et qui s'obtiennent aisément à l'aide d'un des algorithmes étudiés au chapitre 2 de [2].

A chaque valeur propre  $\lambda_n$  est associée une fonction propre que l'on obtient par résolution du système (27). Ainsi, si l'on choisit  $C = c_2(\lambda_n)$  il en découle  $D = s_2(\lambda_n)$  et la fonction propre correspondante, définie à un facteur multiplicatif constant près, s'écrit

$$\eta_n(x) = c_2(\lambda_n) s_2(\lambda_n x) - s_2(\lambda_n) c_2(\lambda_n x) \quad (30)$$

ou sous la forme équivalente

$$\eta_n(x) = c_2(\lambda_n) \frac{s_2(\lambda_n x)}{s_2(\lambda_n)} - c_2(\lambda_n x) \quad (31)$$

On peut démontrer que les fonctions propres du problème de type Sturm-Liouville constitué des équations (17) à (19) forment un ensemble complet. Ceci implique que toute fonction, d'une variable, de classe  $C^4$  qui s'annule avec sa dérivée première en  $x = 0$  et  $x = 1$  peut être approchée aussi bien que l'on veut à l'aide d'un développement en série de Fourier généralisée de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_n(x) \quad (32)$$

où les réels  $a_n$  peuvent être choisis arbitrairement.

A titre d'exemple, les 10 plus petites valeurs propres sont données dans le tableau 3. On peut démontrer que deux valeurs propres successives diffèrent d'un nombre d'autant plus proche de  $\pi$  que  $n$  est élevé.

$n$	$\lambda_n$
1	4.730040744862704
2	10.995607838001671
3	14.137165491257464
4	17.278759657399480
5	20.420352245626059
6	23.561944902040455
7	26.703537555508188
8	29.845130209103253
9	32.986722862692822
10	36.128315516282626

FIGURE 3 – Valeurs approchées de  $\lambda_n$  pour  $n = 1, 2, \dots, 10$ .

Les figures 4 et 5 présentent les six premières fonctions propres et leurs dérivées premières sur l'intervalle  $[0, 1]$ . On peut remarquer que les fonctions  $\eta_n(x)$  coupent  $n - 1$  fois l'axe des  $x$  entre les bornes de leur domaine de définition et que les fonctions d'indice impair sont symétriques tandis que les fonction d'indice pair sont antisymétriques, par rapport au milieu de l'intervalle.

### 3.3 Application : équilibre d'une poutre encastrée chargée

En l'absence de mouvement, si le module de Young  $E$  et le moment d'inertie  $I$  sont constants et si le moment de flexion par unité de longueur est nul, l'équation (14) se réduit à l'équation d'équilibre d'une poutre de propriétés géométriques et mécaniques constantes soumise à une charge linéique, à savoir

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{p(x)}{EI} \quad (33)$$

ou, sous forme adimensionnelle

$$\frac{d^4 \eta}{dx^4} = \beta(x) \quad (34)$$

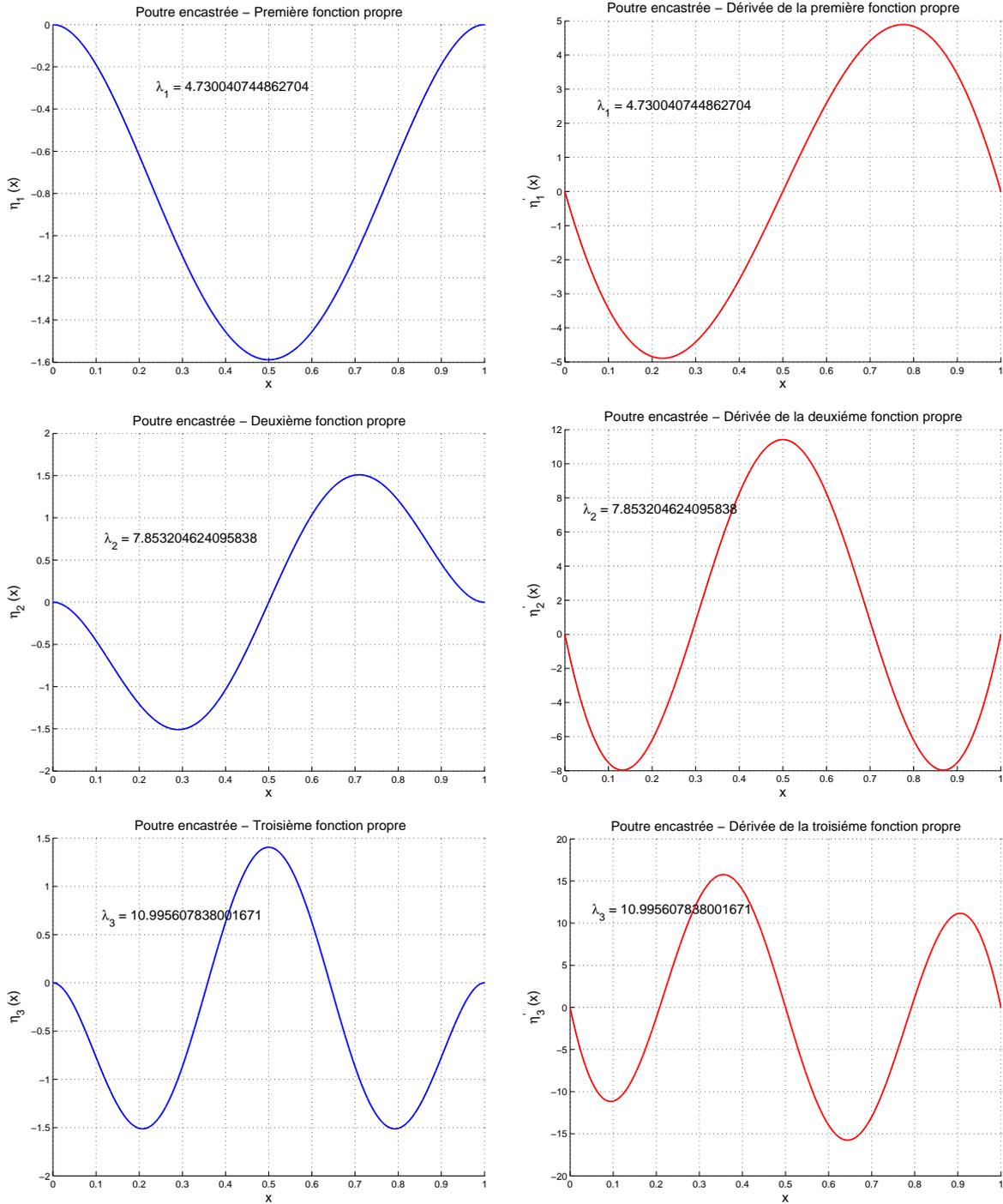


FIGURE 4 – Les fonctions propres d’indices 1, 2 et 3 et leurs dérivées.

Nous nous limitons ici au cas de la poutre encastrée de longueur réduite unitaire, les conditions aux limites à adjoindre à l’équation (34) sont donc données par les équations (18) et (19).

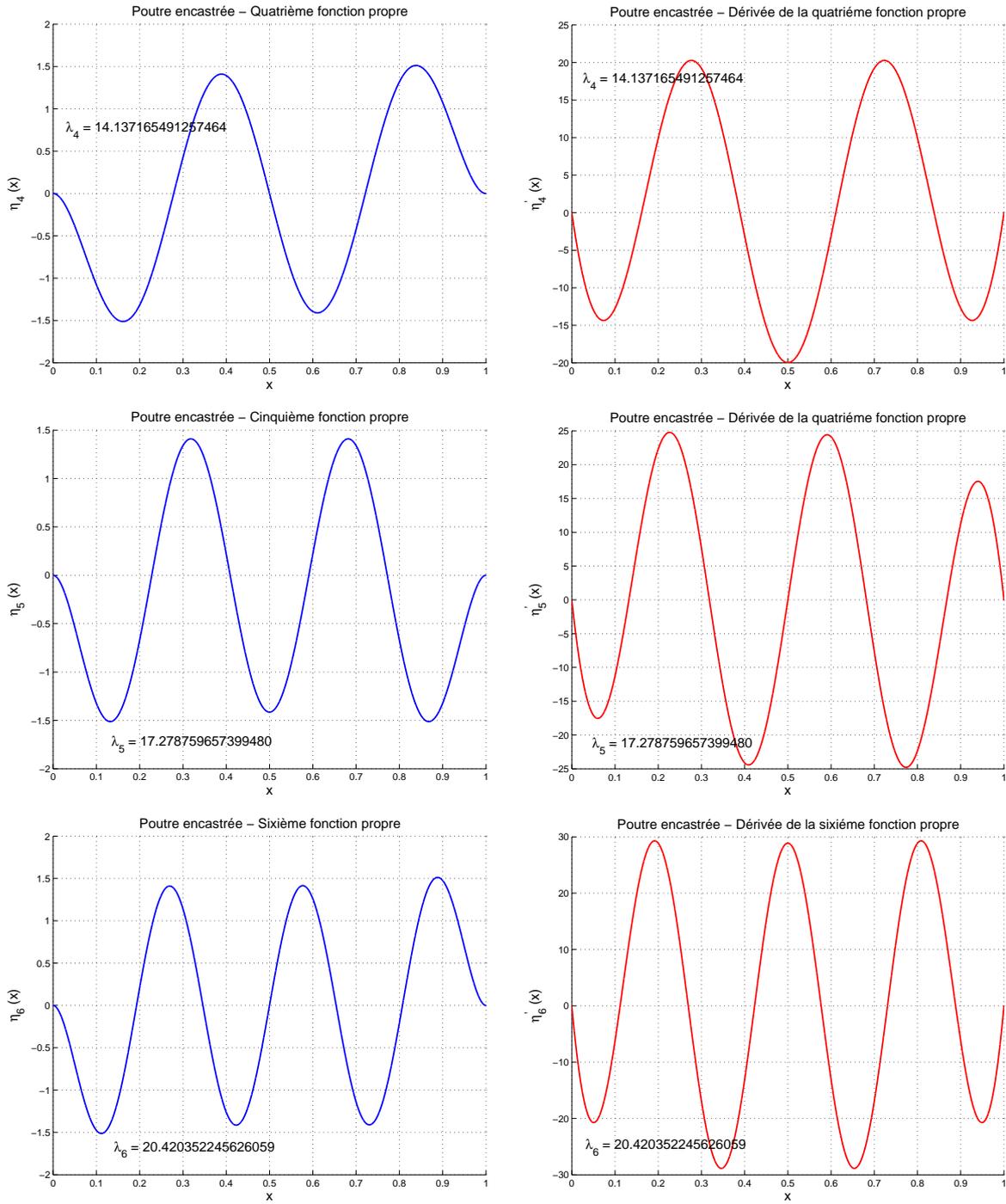


FIGURE 5 – Les fonctions propres d’indices 4, 5 et 6 et leurs dérivées.

### 3.3.1 Charge répartie parabolique

Considérons une charge répartie<sup>4</sup> parabolique de la forme

$$\beta(x) = x \cdot (1 - x) \tag{35}$$

4. Les variables sont réduites, nous ne le rappelons pas systématiquement.

et recherchons la solution du problème (34), (18) et (19) sous la forme (32). L'équation (34) devient

$$\frac{d^4\eta}{dx^4}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{d^4\eta_{2n-1}}{dx^4}(x) = x.(1-x) \quad (36)$$

ou encore

$$\frac{d^4\eta}{dx^4}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_{2n-1}^4 \eta_{2n-1}(x) = x.(1-x) \quad (37)$$

La question qui se pose est donc de définir un critère qui permette de faire un "bon choix" des constantes  $a_n$ .

Bien que l'on puisse calculer les constantes  $a_n$  qui fournissent la solution analytique exacte du problème<sup>5</sup>, dès qu'il s'agit d'obtenir des résultats numériques, nous devons nous contenter de solutions approchées de la forme

$$\sum_{n=1}^N a_n \eta_{2n-1}(x) \quad (38)$$

obtenues en limitant la somme infinie à un nombre fini de termes. L'idée, ou le pari sous-jacent, est que si l'on augmente la valeur de  $N$  on gagne en précision.

### Méthode de collocation

Une première approche particulièrement simple est de choisir des constantes  $a_n$  de façon à ce que l'équation (39) soit vérifiée en  $N$  points distincts de l'intervalle  $[0, 1]$  d'abscisses  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) que l'on appelle points de collocation.

$$\sum_{n=1}^N a_n \lambda_{2n-1}^4 \eta_{2n-1}(x) = x.(1-x) \quad (39)$$

Cette procédure conduit au système algébrique linéaire de  $N$  équations à  $N$  inconnues (40).

$$\sum_{n=1}^N a_n \lambda_{2n-1}^4 \eta_{2n-1}(x_i) = x_i.(1-x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (40)$$

La figure 6 présente la solution analytique (en rouge) et les approximations obtenues en prenant 1, 2 ou 3 points de collocation équirépartis sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

La figure 7 montre l'évolution de l'erreur  $\epsilon$  pour  $N = 1, 2, \dots, 12$ . Le diagramme présente

$\log_{10} \epsilon$  en fonction de  $N$  où l'on a posé  $\epsilon = \max_{x \in [0, 1]} \left| \eta(x) - \sum_{n=1}^N a_n \lambda_{2n-1}^4 \eta_{2n-1}(x) \right|$ .

### Remarques

1. La solution du problème est symétrique et seuls les modes propres symétriques contribuent aux solutions approchées ce qui explique que dans les expressions (36) à (40) on n'utilise qu'une fonction  $\eta_n$  sur deux.

---

5. Cf. plus loin, méthode de Galerkin.

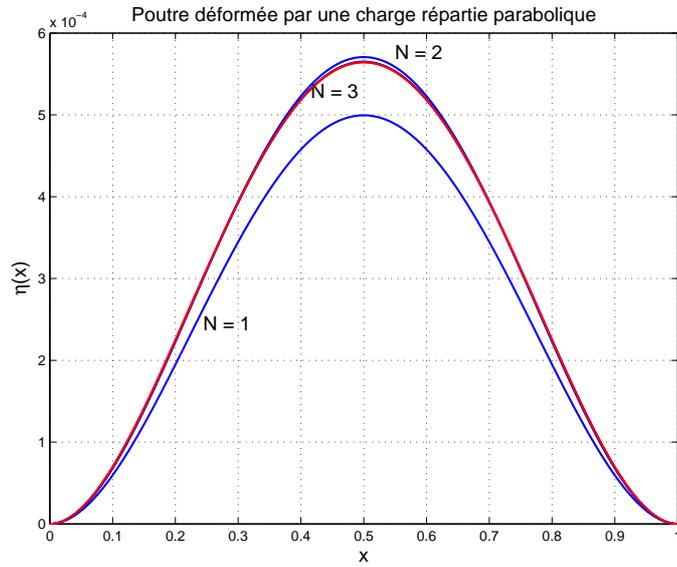


FIGURE 6 – Les approximations numériques sont représentées en bleu et la solution analytique en rouge. On constate que pour  $N = 3$  la solution approchée est quasiment confondue avec la solution exacte.

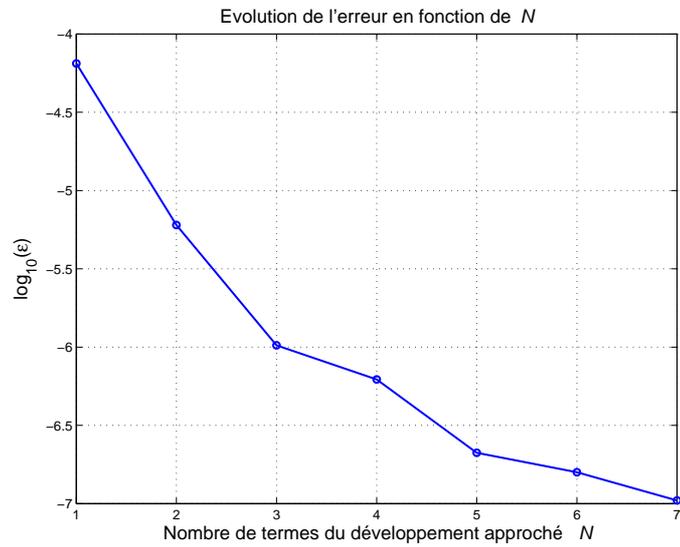


FIGURE 7 – Evolution de  $\log_{10} \epsilon$  en fonction de  $N$ .

2. Si l'on augmente le nombre de points de collocation au delà de 10 les solutions approchées deviennent instables et s'écartent fortement de la solution analytique au voisinage de  $x = 1$ .

### Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin consiste à calculer les constantes  $a_n$  de façon à annuler le résidu  $\rho(x)$  défini au départ de l'équation (37), soit :

$$\rho(x) = \frac{d^4\eta}{dx^4}(x) - x.(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_{2n-1}^4 \eta_{2n-1}(x) - x.(1-x) \quad (41)$$

La technique revient à annuler la projection du résidu sur chacune des fonctions propres  $\eta_{2m-1}(x)$  ce qui fournit les coefficients  $a_n$  sous la forme d'une intégrale simple :

$$\int_0^1 \rho(x) \eta_{2m-1}(x) dx = \int_0^1 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_{2n-1}^4 \eta_{2n-1}(x) - x.(1-x) \right] \eta_{2m-1}(x) dx = 0 \quad (42)$$

Si on utilise la forme (31) des fonctions propres  $\eta_n(x)$ , les constantes  $a_m$  valent :

$$a_m = \frac{1}{\lambda_{2m-1}^4} \int_0^1 x.(1-x) \eta_{2m-1}(x) dx \quad m = 1, 2, \dots \quad (43)$$

en effet, les fonctions  $\eta_n(x) = c_2(\lambda_n) \frac{s_2(\lambda_n x)}{s_2(\lambda_n)} + c_2(\lambda_n x)$  sont orthonormales sur  $[0, 1]$  ce qui implique que :

$$\int_0^1 \eta_n(x) \eta_m(x) dx = \delta_{mn} \quad (44)$$

où  $\delta_{mn}$  est le premier symbole de Kronecker ( $\delta_{mn} = 1$  si  $m = n$  et  $\delta_{mn} = 0$  si  $m \neq n$ ).

Le calcul explicite des intégrales qui apparaissent dans l'équation (43) ne pose guère de problème, même si "à la main" il s'avère un peu long. On trouve sans difficulté les valeurs "analytiques" et "numériques" des dix premiers coefficients  $a_{2n-1}$ , elles sont fournies dans le tableau 8.

Comme on peut le remarquer, les valeurs numériques sont proches des valeurs analytiques pour les indices  $n < 9$  mais s'en écartent pour les indices supérieurs. La première colonne qui montre les valeurs "analytiques" a été obtenue en calculant les intégrales de l'équation (43) au moyen du calculateur symbolique de Maple (implémenté dans Matlab) et en évaluant les résultats numériquement, tandis que la deuxième colonne a été obtenue par intégration numérique directe via la procédure `quadgk` de Matlab<sup>6</sup> en utilisant les tolérances les plus exigeantes possibles.

---

6. Cette procédure est spécialement conseillée pour les fonctions qui oscillent beaucoup dans l'intervalle d'intégration

$n$	$a_n$ "analytique"	$a_n$ "numérique"
1	$-3.571664856628366e - 004$	$-3.571664856628369e - 004$
3	$-2.263312584398329e - 006$	$-2.263312584400719e - 006$
5	$-1.503088697138577e - 007$	$-1.503088696955065e - 007$
7	$-2.337723565101276e - 008$	$-2.337723755581684e - 008$
9	$-5.660240249189111e - 009$	$-5.660190186657328e - 009$
11	$-1.862912909011505e - 009$	$-1.775802040900868e - 009$
13	0	$1.706026635395490e - 010$
15	0	$-3.738356992779210e - 010$
17	0	$-2.195178278583613e - 007$
19	0	$-8.046475096285270e - 004$

FIGURE 8 – Valeurs des coefficients  $a_{2n-1}$  pour  $n = 1, 2, \dots, 10$ .

### 3.3.2 Charge répartie dissymétrique

Considérons une charge répartie de la forme

$$\beta(x) = x(1 - x^{3/4} \exp(1 - x)) \quad (45)$$

Mutatis mutandis, toutes les considérations qui précèdent restent d'application, à ceci près que l'on doit tenir compte à la fois des fonctions propres paires et impaires dans le développement approchant la fonction  $\eta(x)$  cherchée puisque la charge répartie n'est ni symétrique, ni antisymétrique, on pose donc :

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^N b_n \eta_n(x) \quad (46)$$

#### Méthode de collocation

Les coefficients  $b_n$  s'obtiennent de manière analogue aux  $a_n$  (voir équations (39) et (40)), soit en résolvant le système algébrique linéaire de  $N$  équations à  $N$  inconnues (47)

$$\sum_{n=1}^N b_n \lambda_{2n-1}^4 \eta_{2n-1}(x_i) = x_i(1 - x_i^{3/4} \exp(1 - x_i)) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (47)$$

#### Méthode de Galerkin

Quant aux coefficients  $b_n$  obtenus par la méthode de Galerkin, ils sont donnés par les équations (48)

$$b_m = \frac{1}{\lambda_m^4} \int_0^1 x(1 - x^{3/4} \exp(1 - x)) \eta_m(x) dx \quad m = 1, 2, \dots \quad (48)$$

A titre documentaire les cinq premiers coefficients calculés au moyen des équations (47) et (48) sont donnés dans le tableau de la figure 9.

La figure 10 présente la solution obtenue par la méthode de Galerkin lorsqu'on conserve 5 (en rouge) ou 8 coefficients (en cyan)  $b_n$  et les approximations obtenues en prenant de 1 à 5 points de collocation équirépartis sur l'intervalle  $[0, 1]$  (en bleu).

$n$	$b_n$ "collocation"	$b_n$ "Galerkin"
1	$-2.327116672582429e - 005$	$-2.324283206045527e - 005$
2	$-8.150330137055355e - 006$	$-8.135877647695893e - 006$
3	$-5.953284406263848e - 007$	$-6.040743688996679e - 007$
4	$-2.605150863141348e - 007$	$-2.721129128026721e - 007$
5	$-2.829603840715711e - 008$	$-4.601728008764746e - 008$

FIGURE 9 – Valeurs des coefficients  $b_n$  pour  $n = 1, 2, \dots, 5$ .

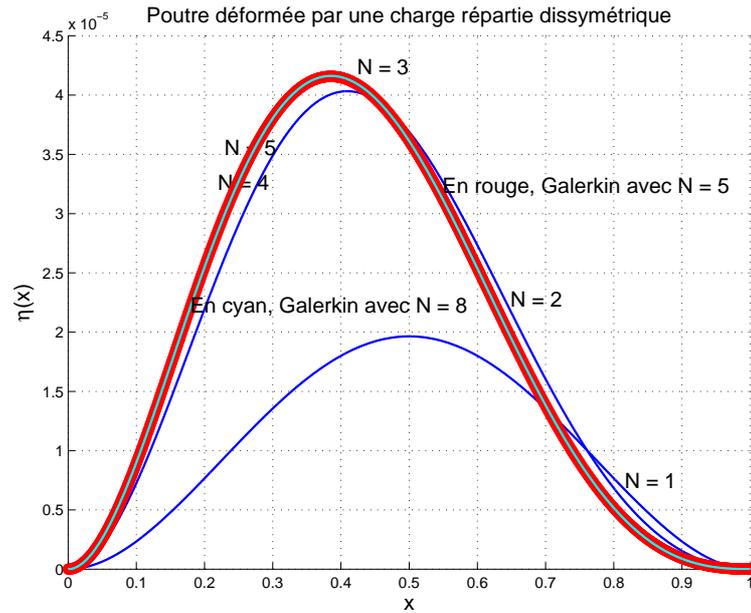


FIGURE 10 – Les approximations numériques obtenues par collocation sont représentées en bleu ( $N = 1, \dots, 5$ ) et les approximations de Galerkin en rouge ( $N = 5$ ) ou cyan ( $N = 8$ ). On constate que pour  $N = 5$  les solutions approchées par les deux méthodes sont quasiment confondues.

## Références

- [1] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des vibrations - Application à la dynamique des structures*. Ed. Masson, 1996.
- [2] M. Tolley. *Analyse numérique. Notes de cours*, Université Libre de Bruxelles, <http://homepages.ulb.ac.be/~mtolley>, 2009.