Université Libre de Bruxelles
Faculté des sciences appliquées
Service de mathématiques
Analyse numérique
Année académique 2010-2011

Séance d'exercices n°9

Intégration numérique

Exercice 1

Calculez l'intégrale définie $\int_0^{\pi/4} \arctan(u)du$ par la méthode des trapèzes. Donnez un majorant de l'erreur commise et déterminez le nombre d'intervalles de division du domaine d'intégration pour que l'erreur soit de l'ordre de 10^{-8}.

Exercice 2

Calculez l'approximation $S_3(16)$ (Romberg) de l'intégrale définie $\int_0^1 \sin\frac{\pi\varphi^2}{2}d\varphi$ et comparez les résultats à ceux que vous obtenez grâce à la procédure *quad*.

Exercice 3

Ecrivez un programme pour calculer une valeur approchée de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$

a) par la méthode des trapèzes;
b) par la méthode de Simpson;
c) par la méthode de Romberg.

Utilisez ces programmes pour tabuler l'intégrale de Fresnel $C(u) = \int_0^u \cos\frac{\pi\varphi^2}{2}d\varphi$ dans l'intervalle [0 5].

Exercice 4

Calculez une approximation de l'intégrale de l'exercice 1 en appliquant la méthode de Gauss-Legendre à 5 points.

NB : les poids et abscisses sont

x_i	w_i
-0.906179845938664	0.236926885056189
-0.538469310105683	0.478628670499366
0.000000000000000	0.568888888888889
0.538469310105683	0.478628670499366
0.906179845938664	0.236926885056189

Corrigé partiel de la séance d'exercices n°9

Exercice 1

```
% Méthode des trapèzes
% L'erreur est donnée par -h²(b-a)*f''(u)/12 où 0<u<pi/4
% La dérivée seconde vaut -2u/(1+u²)²
% Sa valeur absolue est maximum en u²=1/3
% Ce maximum est majoré par 0.65 --> ligne 15
%
a=0; b=pi/4; N=[100:100:2000];
format long g
for Nb_intervalles = N
    h=(b-a)/Nb_intervalles;
    x=linspace(a,b,Nb_intervalles+1);
    f=atan(x);
    f(2:end-1)=2*f(2:end-1);
    Integrale=0.5*h*sum(f);
    Majorant=h*h*0.65*pi/48;
    [Nb_intervalles Integrale Majorant]
end
```

Pour obtenir une erreur de l'ordre de 10^{-8} il faut prendre environ 1619 intervalles.

Exercice 2

```
% Méthode de Romberg intégrale de Fresnel
% Comparaison avec le résultat fourni par quad
% NB: je ne prétends évidemment pas que ce programme,
% ni les autres d'ailleurs, soit optimum.
%
a=0; b=1; format long
S=zeros(5,4);
for i=1:5
    Nb_intervalles = 2^(i-1);
    h=(b-a)/Nb_intervalles;
    x=linspace(a,b,Nb_intervalles+1);
    f=sin(pi*x.*x/2);
    f(2:end-1)=2*f(2:end-1);
    S(i,1)=0.5*h*sum(f);
    [S(i,1) Nb_intervalles]
end
for k=2:4
    fac=4^(k-1);
for i=k:5
    S(i,k)=(fac*S(i,k-1)-S(i-1,k-1))/(fac-1);
end
end
S
[q fcnt]=quad('sin((pi*x.^2)/2)',0,1,1.e-8)
```

Exercice 3

Je ne fournis qu'un exemple de programme, celui qui concerne la méthode de Simpson. Pour les deux autres on peut s'inspirer de ce programme-ci et de ceux donnés ci-dessus. Exemple de tabulation obtenue par l'appel de la fonction *simp* qui utilise la fonction *zot*.

```
for i=1:51
b=(i-1)/10 ;
I(i)=simp(0,b,5000,'zot');
end
I'

function [I]=simp(a,b,N,f)
% Attention, N est le nombre d'intervalles sur lesquels on
% remplace la fonction à intégrer par un polynôme de degré 2.
% On doit donc introduire des points supplémentaires et
% diviser chaque intervalle en deux parties égales. Ainsi, on
% aura un nombre total pair de demi-intervalles. F doit être
% une fonction "vectorisée" du vecteur x. f peut également
% être une fonction inline "vectorisée".
%
h=(b-a)/N;
x=linspace(a,b,N+1);
fsim=feval(f,x);
fsim(2:end-1) = 2*fsim(2:end-1); % Pour les termes 2f
I=h*sum(fsim)/6;          %    Contribution des termes f et 2f
x=linspace(a+h/2,b-h/2,N);
fsim=feval(f,x);
I=I+2*h*sum(fsim)/3; % on ajoute la contribution des termes 4f
return


function y=zot(x)
y=cos(pi*x.*x/2);
```

Exercice 4

On fait le changement de variable ad hoc pour travailler sur l'intervalle [-1,1] et on utilise la table fournie dans l'énoncé, tirée de Abramowitz et Stegun : « Handbook of Mathematical Functions » (Table 25.4).