Université Libre de Bruxelles
Ecole Polytechnique
Service de Mathématiques
Analyse numérique
Année académique 2011-2012

Séance d'exercices n°8

Exercice 1

Equation de Laplace - Problème aux conditions aux limites mixtes.

Soit un barreau infini de section carrée. Deux faces adjacentes sont isolées thermiquement. Les deux autres sont maintenues à deux températures constantes différentes. En l'absence de source, une approximation du champ de température peut être obtenue en résolvant l'équation de Laplace sur la section carrée du barreau avec les conditions aux limites pertinentes.

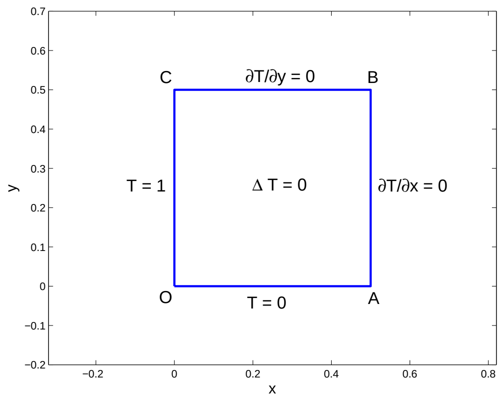

FIGURE 1 – Domaine carré. Equation et conditions aux limites en variables réduites. Le côté vaut $\frac{1}{2}$.

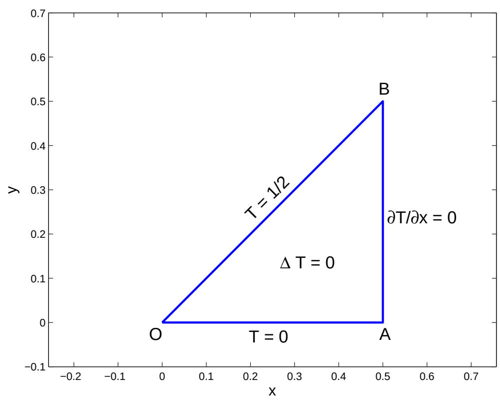

FIGURE 2 – La symétrie permet de remplacer le probème de départ par un problème équivalent défini sur une moitié du carré initial.

On doit donc résoudre le problème suivant :

$$\Delta T(x,y) = \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

$$T(x,y) = 0 \quad \text{sur OA} \tag{2}$$

$$T(x,y) = 1/2 \quad \text{sur OB} \tag{3}$$

$$\frac{\partial T(x,y)}{\partial x} = 0 \quad \text{sur AB} \tag{4}$$

Ou, dans un système de coordonnées polaires centrées en O, le problème équivalent :

$$\Delta T(r,\theta) = \frac{\partial^2 T(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T(r,\theta)}{\partial \theta^2} = 0 \tag{5}$$

$$T(r,0) = 0 \tag{6}$$

$$T(r,\pi/4) = 1/2 \tag{7}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{sur AB} \tag{8}$$

Il est facile de montrer que les fonctions

$$T(r,\theta) = \frac{2\theta}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{4n} \sin(4n\theta) \tag{9}$$

vérifient les équations (5, 6 et 7), les coefficients a_n étant des constantes que l'on peut choisir arbitrairement. En pratique, on limite la somme dans (9) à N termes et on choisit les constantes $a_n (n = 1, 2, \ldots, N)$ de manière à vérifier approximativement la condition (8). Une façon de procéder est d'exiger que la condition de symétrie (8) soit satisfaite en N points du segment AB ce qui conduit à la résolution d'un système de N équations à N inconnues. Si l'on pose

$$T(r,\theta) \simeq T_N(r,\theta) = \frac{2\theta}{\pi} + \sum_{n=1}^{N} a_n r^{4n} \sin(4n\theta) \tag{10}$$

cela revient à choisir N points $(r_i, \theta_i)\,(i = 1, 2, \ldots, N)$ sur AB et à résoudre le système $N \times N$ suivant :

$$\sum_{n=1}^{N} 4n a_n r_i^{4n-1} \sin((4n-1)\theta_i) = \frac{2\sin(\theta_i)}{\pi r_i} \tag{11}$$

car

$$\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} 4n a_n r^{4n-1} \sin((4n-1)\theta) - \frac{2\sin(\theta)}{\pi r} \tag{12}$$

Comme, sur AB, $r\cos(\theta) = \frac{1}{2}$, le système (11) est équivalent à :

$$\sum_{n=1}^{N} 4n a_n \frac{\sin((4n-1)\theta_i)}{(2\cos(\theta_i))^{4n-1}} = \frac{2\sin(2\theta_i)}{\pi} \qquad (0 < \theta_i < \frac{\pi}{4}) \tag{13}$$

On demande :

1°) de calculer des constantes a_n pour différentes valeurs de N ($N = 1, \ldots, 15$ par exemple)
2°) d'estimer la qualité de la solution approchée obtenue pour chaque N en évaluant l'approximation de la dérivée (12) sur AB
3°) de construire un système de M équations du type (13) à N inconnues avec $M = 3 \times N$ et de le résoudre au sens des moindres carrés
4°) de comparer, à même N, la solution approchée fournie par la méthode des moindres carrés à celle obtenue précédemment.

Terminer les exercices de la séance n°7.