

Séance d'exercices n°8

**Exercice 1**

Equation de Laplace - Problème aux conditions aux limites mixtes.

Soit un barreau infini de section carrée. Deux faces adjacentes sont isolées thermiquement. Les deux autres sont maintenues à deux températures constantes différentes. En l'absence de source, une approximation du champ de température peut être obtenue en résolvant l'équation de Laplace sur la section carrée du barreau avec les conditions aux limites pertinentes.

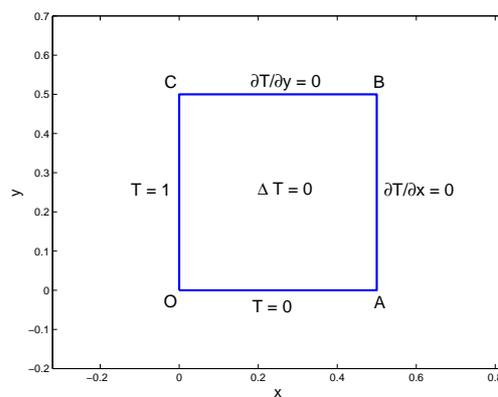


FIGURE 1 – Domaine carré. Equation et conditions aux limites en variables réduites. Le côté vaut  $\frac{1}{2}$ .

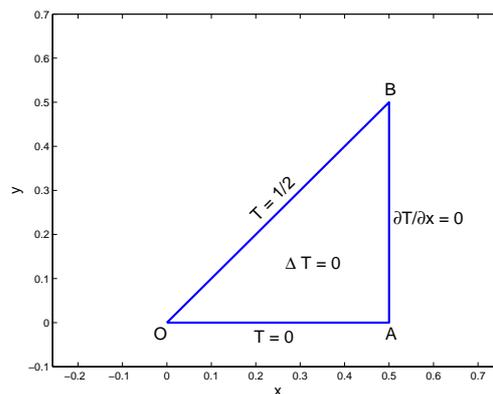


FIGURE 2 – La symétrie permet de remplacer le problème de départ par un problème équivalent défini sur une moitié du carré initial.

On doit donc résoudre le problème suivant :

$$\Delta T(x, y) = \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

$$T(x, y) = 0 \quad \text{sur OA} \quad (2)$$

$$T(x, y) = 1/2 \quad \text{sur OB} \quad (3)$$

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = 0 \quad \text{sur AB} \quad (4)$$

Ou, dans un système de coordonnées polaires centrées en O, le problème équivalent :

$$\Delta T(r, \theta) = \frac{\partial^2 T(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T(r, \theta)}{\partial \theta^2} = 0 \quad (5)$$

$$T(r, 0) = 0 \quad (6)$$

$$T(r, \pi/4) = 1/2 \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{sur AB} \quad (8)$$

Il est facile de montrer que les fonctions

$$T(r, \theta) = \frac{2\theta}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{4n} \sin(4n\theta) \quad (9)$$

vérifient les équations (5, 6 et 7), les coefficients  $a_n$  étant des constantes que l'on peut choisir arbitrairement. En pratique, on limite la somme dans (9) à  $N$  termes et on choisit les constantes  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) de manière à vérifier approximativement la condition (8). Une façon de procéder est d'exiger que la condition de symétrie (8) soit satisfaite en  $N$  points du segment AB ce qui conduit à la résolution d'un système de  $N$  équations à  $N$  inconnues. Si l'on pose

$$T(r, \theta) \simeq T_N(r, \theta) = \frac{2\theta}{\pi} + \sum_{n=1}^N a_n r^{4n} \sin(4n\theta) \quad (10)$$

cela revient à choisir  $N$  points  $(r_i, \theta_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) sur AB et à résoudre le système  $N \times N$  suivant :

$$\sum_{n=1}^N 4na_n r_i^{4n-1} \sin((4n-1)\theta_i) = \frac{2 \sin(\theta_i)}{\pi r_i} \quad (11)$$

car

$$\frac{\partial T(r, \theta)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} 4na_n r^{4n-1} \sin((4n-1)\theta) - \frac{2 \sin(\theta)}{\pi r} \quad (12)$$

Comme, sur AB,  $r \cos(\theta) = \frac{1}{2}$ , le système (11) est équivalent à :

$$\sum_{n=1}^N 4na_n \frac{\sin((4n-1)\theta_i)}{(2 \cos(\theta_i))^{4n-1}} = \frac{2 \sin(2\theta_i)}{\pi} \quad (0 < \theta_i < \frac{\pi}{4}) \quad (13)$$

On demande :

- 1°) de calculer des constantes  $a_n$  pour différentes valeurs de  $N$  ( $N = 1, \dots, 15$  par exemple)
- 2°) d'estimer la qualité de la solution approchée obtenue pour chaque  $N$  en évaluant l'approximation de la dérivée (12) sur AB
- 3°) de construire un système de  $M$  équations du type (13) à  $N$  inconnues avec  $M = 3 \times N$  et de le résoudre au sens des moindres carrés
- 4°) de comparer, à même  $N$ , la solution approchée fournie par la méthode des moindres carrés à celle obtenue précédemment.

**Terminer les exercices de la séance n°7.**

## Corrigé de l'exercice 1

1°) et 2°) Le programme suivant permet d'obtenir les figures 3, 4 et 5. On constate que la convergence est exponentielle (figure 5). En effet le logarithme en base 10 de la valeur absolue de l'écart maximum entre  $\frac{\partial T_N(r,\theta)}{\partial x}$  et zéro sur AB décroît linéairement. Pour  $N = 15$  l'erreur locale sur AB n'excède pas  $10^{-12}$ !

3°) Pour résoudre le problème au sens des moindres carrés il suffit de remplacer la ligne 15 par  $y=(1:3*N)/(6*N)$  et de modifier la ligne 17 en y remplaçant  $N$  par  $3*N$ . Le logiciel fait le reste car l'opérateur \ utilisé à la ligne 26 résout le système incompatible  $(3N \times N)$  au sens des moindres carrés. On aurait évidemment aussi pu modifier le programme et passer par les équations normales de Gauss.

4°) La figure 6 permet de constater que la méthode des moindres carrés fournit un meilleur résultat. Les figures 7 et 8 montrent le comportement de l'erreur locale sur AB pour  $N = 10$ .

```
clc;clear
figure(1)
hold on
grid on
figure(2)
hold on
grid on
figure(3)
hold on
grid on
ypts=(1:5000)/10000; % Ordonnées de 5000 points équirépartis sur AB
tpts=atan(2*ypts); % Angles theta associés aux ordonnées (sur AB, x=0.5)
format long
for N=10:10 % Boucle sur N, nombre de coefficients a_n
y=(1:N)/(2*N); % Choix des ordonnées des points (r_i,theta_i)
theta=atan(2*y); % Sur AB x=0.5 et theta_i=Arctg(2*y_i)
for i=1:N % Boucles sur i et j pour construire la matrice
t=theta(i); % "mat" du système et son second membre "sec"
sec(i)=2*sin(2*t)/pi;
for j=1:N
f1=4*j;
f2=f1-1;
mat(i,j)=f1*sin(f2*t)/((2*cos(t))^f2);
end
end
a=mat\sec'; % Résolution du système pour trouver les a_n
a
err=0;
for i=1:N % Calcul de l'erreur en 5000 points de AB
f1=4*i;
f2=f1-1;
err=err+a(i)*f1*sin(f2*tpts)./((2*cos(tpts)).^(f2));
end
err=err-2*sin(2*tpts)/pi;
erreur(N)=max(abs(err)); % Maximum du module de l'erreur absolue
figure(1)
plot(ypts,err/erreur(N),'r')
xlabel('y = r.sin(\theta)')
ylabel('Ecart entre \partial T/\partial x et zéro sur AB')
title('Erreur locale sur AB rapportée à son maximum pour divers N')
pause % Pause entre les dessins des courbes
figure(2)
plot(ypts,err,'r')
xlabel('y = r.sin(\theta)')
```

```

ylabel('Ecart entre \partial T/\partial x et zéro sur AB')
title('Erreur sur AB pour différentes valeurs de N')
end
figure(3)
plot(log10(erreur),'r')
xlabel('Nombre de coefficients a_n')
ylabel('log_1_0(Ecart maximum entre \partial T/\partial x et zéro sur AB)')
title('log_1_0(Valeur absolue de l''erreur maximale sur AB) en fonction de N')

```

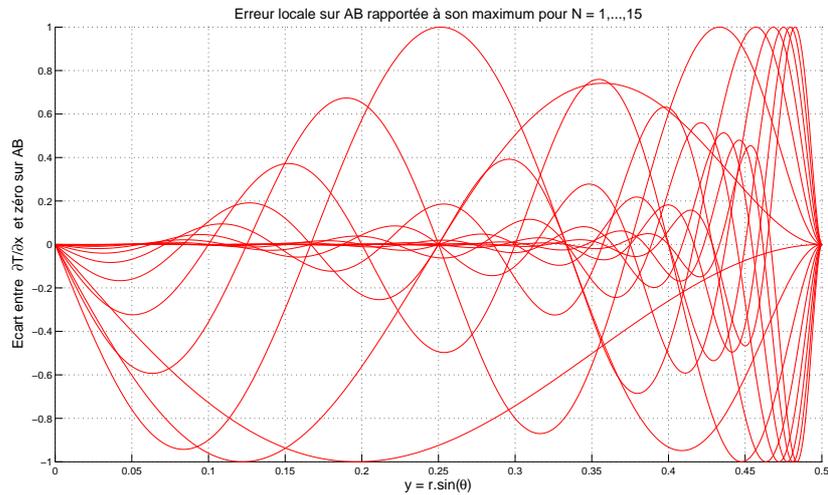


FIGURE 3 – Erreur locale sur  $AB$  rapportée à son maximum

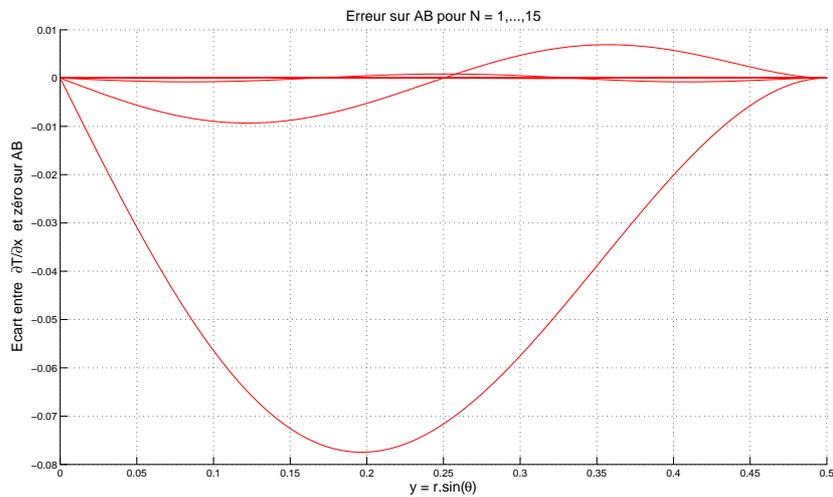


FIGURE 4 – Erreur locale sur  $AB$

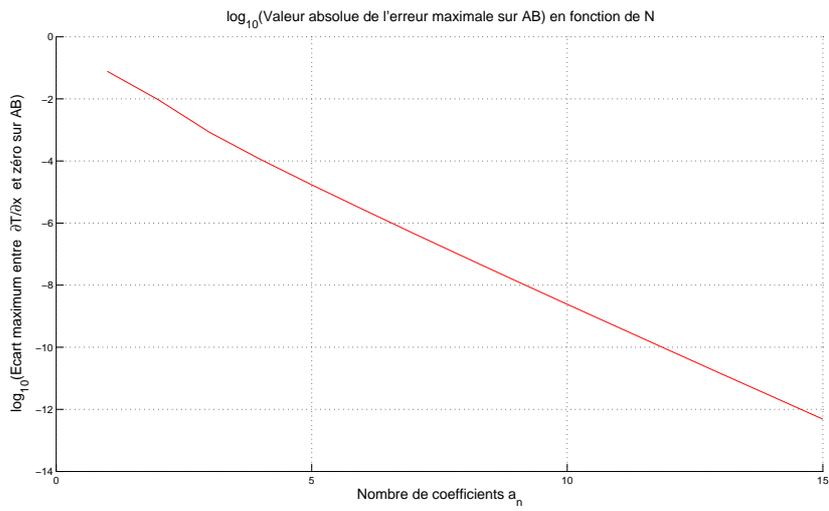


FIGURE 5 – L'erreur maximale décroît exponentiellement en fonction de  $N$

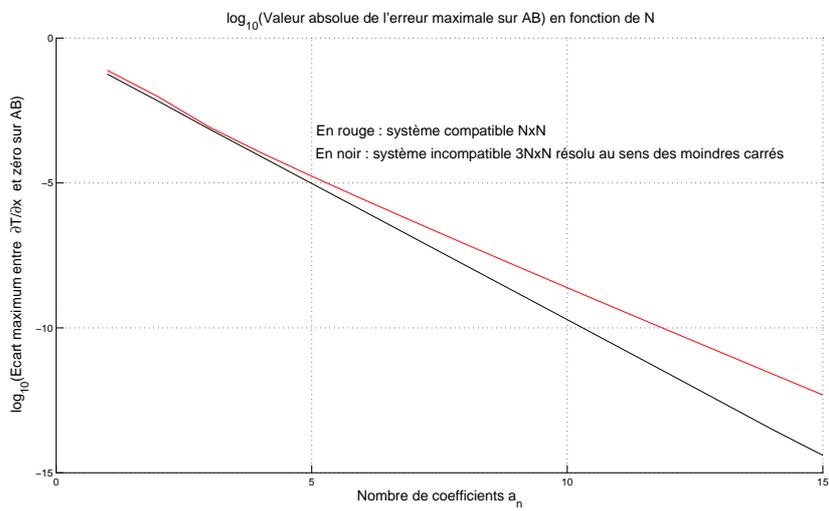


FIGURE 6 – La convergence est plus rapide si on applique la méthode des moindres carrés

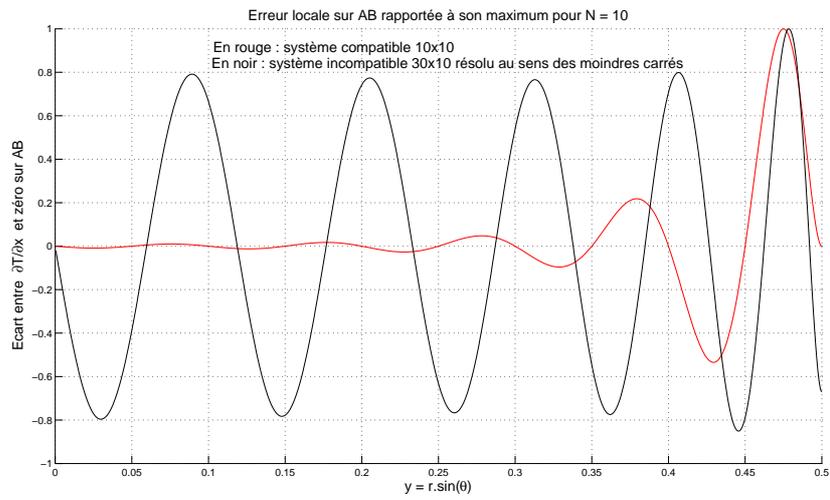


FIGURE 7 – L'erreur locale est mieux répartie si on applique la méthode des moindres carrés

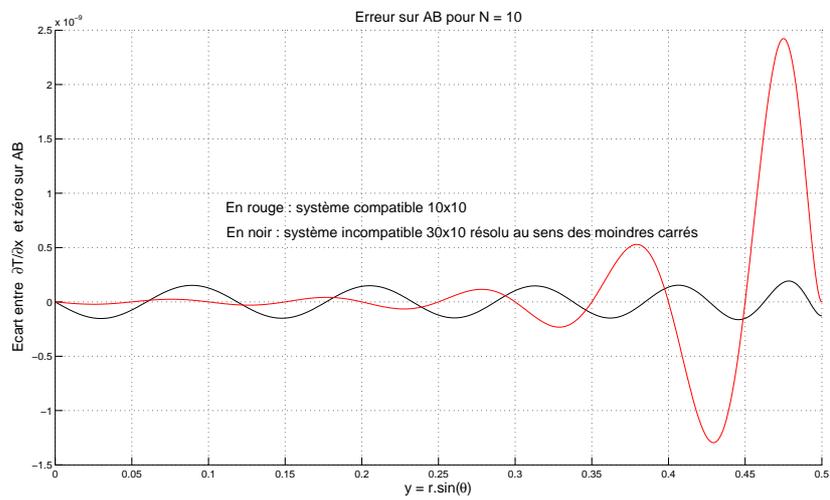


FIGURE 8 – L'amplitude de l'erreur locale varie moins fort si on applique la méthode des moindres carrés. Remarquez l'échelle verticale :  $10^{-9}$