Université Libre de Bruxelles - Faculté des Sciences Appliquées
Service de Mathématiques
Examen d'Analyse Numérique - Janvier 2010

| Nom | Prénom | N° du PC |
|---|---|---|
| | | |

**Exercice 1** L'expression (1) possède un zéro aux environs de $x = 3.82$.

$$f(x) = \cos(3x - \frac{\pi}{7}) \times \sin(x - \frac{3\pi}{14}) \tag{1}$$

On demande

a) d'estimer sa valeur au moyen d'une méthode numérique au choix
b) d'estimer l'écart entre les résultats numériques et la valeur exacte du zéro
c) de justifier le choix de la méthode utilisée

**Exercice 2 - Les notes 1 et 2 en bas de page peuvent vous aider...**
$f(x)$ (voir équation (1)) est périodique de période $\pi$.
On développe $f$ en série de sinus de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin[(2k-1) \times (x - \frac{3\pi}{14})] \tag{2}$$

sur l'intervalle $I = [\frac{31\pi}{14}, \frac{45\pi}{14}]$ ($k$ est entier positif).

a) montrer numériquement, pour $k$ allant de 1 à 10, que les fonctions du développement (2) sont orthogonales[1] sur I
b) calculer les 15 premiers coefficients[2] $a_k$ du développement (2)
c) justifier le choix de la méthode d'intégration adoptée pour calculer les $a_k$
d) calculer un majorant de l'erreur locale (3) si on remplace, sur $I$, $f(x)$ par son développement limité à 25 termes.

$$\max_{x \in [\frac{31\pi}{14}, \frac{45\pi}{14}]} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{25} a_k \sin[(2k-1) \times (x - \frac{3\pi}{14})] \right| \tag{3}$$

**Exercice 3 - La note 3 en bas de page peut vous aider...**
Soit le problème de Cauchy

$$y'(x) = J_1(x) + \cos(x) \tag{4}$$
$$y(0) = -1 \tag{5}$$

Dans l'équation (4) $J_1(x)$ est la fonction de Bessel[3] de première espèce et d'ordre 1.

On demande
1) de déterminer une approximation numérique de $y(x)$ sur l'intervalle $[0, L]$, sachant que $L$ est l'abscisse du troisième zéro positif de l'inconnue $y(x)$
2) de justifier le choix de la méthode utlisée
3) de donner une appréciation sur la qualité de l'approximation obtenue.

1. NB elles ne sont pas orthonormales !
2. On les obtient par projection de $f(x)$ sur les fonctions de base $\sin[(2k-1) \times (x - \frac{3\pi}{14})]$
3. Voir *besselj* dans l'aide de Matlab.