Université Libre de Bruxelles - Faculté des Sciences Appliquées
Service de Mathématiques
Examen d'Analyse Numérique - Janvier 2010

Nom	Prénom	N° du PC

Soit $J_{5/2}(x)$ la fonction de Bessel[1] de première espèce et d'ordre $\frac{5}{2}$ (x est réel).
On veut l'approcher, sur l'intervalle $[0, L]$ par une somme de la forme

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k\pi \frac{x}{L}) \tag{1}$$

où les constantes c_k sont les N premiers coefficients de la série de Fourier de $J_{5/2}(x)$.

Exercice 1 - La note en bas de page peut vous aider...
1) Déterminez la valeur de L, à 10^{-13} près, s'il s'agit de l'abscisse du deuxième zéro positif de $J_{5/2}(x)$, sachant que $9.09 < L < 9.10$.
2) Justifiez le choix de la méthode que vous utilisez pour calculer L et estimez sa vitesse de convergence.

Exercice 2
On choisit pour L le premier zéro positif de $J_{5/2}(x)$ dont l'abscisse est 5.763459196894550.

1) Déterminez, dans la somme (1), la plus petite valeur de N qui permet d'avoir

$$\max_{x\in[0,L]} \left|J_{5/2}(x) - S_N(x)\right| < 10^{-4} \tag{2}$$

2) Justifiez le choix de la méthode que vous utilisez pour calculer les intégrales

$$c_k = \int_0^L J_{5/2}(x) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k\pi \frac{x}{L}) dx \tag{3}$$

Exercice 3

Soit le problème de Cauchy

$$y'(x) = \cos(3x - \frac{\pi}{7}) \times \sin(x - \frac{3\pi}{14}) \tag{4}$$

$$y(\frac{3\pi}{14}) = 0 \tag{5}$$

On demande

1) de déterminer une bonne approximation numérique de $y(x)$ sur l'intervalle $[\frac{3\pi}{14}, \frac{31\pi}{14}]$
2) de justifier le choix de la méthode utilisée
3) d'expliquer pourquoi cette approximation est bonne

1. Voir *besselj* dans l'aide de Matlab.