```
x(1)=0;
y(1)=0;
figure
title('Solution du problème de Cauchy'); xlabel('x'); ylabel('y')
hold on
format long
for Fac=1:7
    N=Fac*200;
    for n=1:N
        h=2/N;
        x(n+1)=n*h;
        y(n+1)=y(n)+h*sqrt(1-sqrt(y(n)));
    end
    plot(x,y)
    Y(Fac)=y(end);
end
disp('Valeurs de y(2) pour N = 200:200:1400')
Y=Y'
for i=1:3
    disp('Accélération de convergence')
    Y=Aitken_Shanks(Y)
end
disp('L''algorithme utilisé est "Euler explicite" c''est-à-dire')
disp('une méthode O(h) qui se prête donc bien à l''utilisation')
disp('d''un accélérateur de convergence tel que l''algorithme')
disp('d''Aitken-Shanks.')
disp('Trois applications de cet algorithme à la suite partielle Y')
disp('fournissent comme valeur approchée de y(2) : 0.94422938597451.')
disp('C''est la valeur exacte à moins de 5e-005 près.')
disp('En effet l''équation est à variables séparées et la solution')
disp('du problème est x = 8/3-4*(u+2)*sqrt(1-u)/3 avec u=sqrt(y),')
disp('ce qui donne pour x=2 :  y(2) ~= 0.94418234282818.')
disp('On peut résoudre l''exercice par la méthode d''Euler implicite')
disp('mais comme il n''y a pas de problème de stabilité inutile de se')
disp('compliquer le travail !')
disp('Enfin, la méthode de Heun est préférable car elle est O(h²).')
pause
xH(1)=0;
yH(1)=0;
for Fac=1:5
    N=Fac*20;
    for n=1:N
        h=2/N;
        xH(n+1)=n*h;
        k1=sqrt(1-sqrt(yH(n)));
        k2=sqrt(1-sqrt(yH(n)+h*k1));
        yH(n+1)=yH(n)+h*(k1+k2)/2;
    end
    plot(xH,yH,'k')
    YH(Fac)=yH(end);
end
disp('Valeurs de yH(2) pour N = 20:20:100')
YH=YH'
disp('Avec la méthode de Heun, il suffit de 40 intervalles pour obtenir')
disp('une précision supérieure à celle que fournit la méthode d''Euler ')
disp('explicite, avec 4000 intervalles !')
disp('Dernière remarque: pour obtenir la précision requise sans ')
```

```
disp('accélération de convergence il faut, par la méthode d''Euler')
disp('explicite, utiliser environ 3100 intervalles mais ceci ne pose')
disp('aucun problème.')
clc;clear;clf
f=inline('cos(x)-x.*x.*x/6-1');
fprime=inline('-sin(x)-x.*x/2');
x=-3:0.01:1;
F=f(x);
FPRIME=fprime(x);
disp('On obtient une première évaluation des racines en zoomant.')
disp('Il y a une racine proche de -2.07 et une qui semble double en x = 0')
plot(x,F,'g')
grid on; hold on
plot(x,FPRIME,'r')
nitermax=3;
X(1)=-2.070;
nitermax=4;
for n=1:nitermax
        X(n+1)=X(n)-f(X(n))/fprime(X(n));
end
format long
X'
disp('La meilleure méthode : Newton')
disp('Trois itérations suffisent pour obtenir le résultat escompté')
disp('Racine simple, la convergence est très rapide et quadratique')
X1=X(end)-1e-14;
X2=X(end)+1e-14;
[X1 f(X1)]
[X(end) f(X(end))]
[X2 f(X2)]
disp('On constate que l''erreur est bien inférieure à 1e-12')
disp('+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++')
disp('+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++')
disp('Quelle que soit la méthode utilisée, on a du mal à trouver la')
disp('racine x=0 avec la précision demandée.')
disp('+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++')
disp('Pour s''en tirer on peut utiliser la méthode du point fixe')
disp('avec g(x) = acos((x^3)/6+1).')
disp('NB: on fait un (tout) petit détour par le plan complexe')
Z(1)=0.01;
for i=1:10
Z(i+1)=acos((Z(i)^3)/6+1);
end
Z'
pause
disp('La suite ne fonctionne pas sur les machines de la faculté car la')
disp('boîte à outils correspondante n''est pas implantée sur le serveur.')
disp('Elle est donc fournie à titre purement documentaire.')
disp('+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++')
disp('+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++')
disp('Méthode de Newton en "vpa"')
nitermax=35; L=1;
a=0.01;
for n=1:nitermax
        a=vpa(a-L*(cos(a)-(a^3)/6-1)/(-sin(a)-(a^2)/2),25)
end
disp('Pour la racine x=0 qui est double, c''est plus laborieux...')
```

```
disp('Avec la formule de Newton normale la convergence est linéaire ')
disp('et très lente.')
disp('Il faut 34 itérations pour atteindre la précision exigée')
nitermax=5; L=2;
a=0.01;
for n=1:nitermax
        a=vpa(a-L*(cos(a)-(a^3)/6-1)/(-sin(a)-(a^2)/2),25)
end
disp('Avec la formule modifiée (L=2) la convergence est très rapide')
disp('et quadratique. A nouveau, trois itérations suffisent pour obtenir')
disp('le résultat escompté.')
x(1)=0;
y(1)=sqrt(2);
figure
title('Solution du problème de Cauchy'); xlabel('x'); ylabel('y')
hold on
format long
for Fac=1:5
    N=Fac*100;
    for n=1:N
        h=2/N;
        x(n+1)=n*h;
        y(n+1)=y(n)+h*y(n)*(1-y(n)*y(n));
    end
    plot(x,y)
    Y(Fac)=y(end);
end
disp('Valeurs de y(2) pour N = 100:100:500')
Y=Y'
disp('L''algorithme utilisé est "Euler explicite" c''est-à-dire')
disp('une méthode O(h).')
disp('Avec 500 intervalles on obtient 1.00451763913203 comme valeur')
disp('approchée de y(2). C''est la valeur exacte à moins de 1e-004 près.')
disp('En effet l''équation est à variables séparées et la solution')
disp('du problème de Cauchy est y = sqrt(2u/(2u-1)) avec u=exp(2x),')
disp('ce qui donne :  y(2) ~= 1.00461060129104.')
disp('On peut résoudre l''exercice par la méthode d''Euler implicite')
disp('mais comme il n''y a pas de problème de stabilité inutile de se')
disp('compliquer le travail !')
disp('Enfin, la méthode de Heun est préférable car elle est O(h²).')
pause
xH(1)=0;
yH(1)=sqrt(2);
for Fac=1:5
    N=Fac*10;
    for n=1:N
        h=2/N;
        xH(n+1)=n*h;
        k1=yH(n)*(1-yH(n)*yH(n));
        yh=yH(n)+h*k1;
        k2=yh*(1-yh*yh);
        yH(n+1)=yH(n)+h*(k1+k2)/2;
    end
    plot(xH,yH,'k')
    YH(Fac)=yH(end);
end
disp('Valeurs de yH(2) pour N = 10:10:50')
```

```
YH=YH'
disp('Avec la méthode de Heun, 30 intervalles suffisentpour obtenir une')
disp('précision équivalente à celle que fournit la méthode d''Euler ')
disp('explicite, avec 500 intervalles !')
% Faculté des Sciences Appliquées
% Service de Mathématiques
%                              Examen d'analyse numérique du 14 janvier 2005
%
% AVERTISSEMENT :
%
% Pour éviter les problèmes que pose parfois l'utilisation des caractères
% ^ et ~
% vous pouvez "copier-coller" ceux qui figurent ci-dessus.
%
% Indiquez vos nom et prénom sous forme de commentaire au début de chaque
% fichier .m  que vous archivez dans le répertoire de travail.
% Tout fichier qui ne contient pas le nom de son auteur sera ignoré !!
%
% Commentez vos programmes pour qu'ils soient faciles à comprendre.
%
% Pour chaque question, justifiez le choix des méthodes numériques employées
et
% commentez les résultats obtenus. Procédez clairement et de manière concise
au
% moyen de lignes de commentaires placées à la fin de vos programmes.
%
% Dix points sont attribués à chaque question, six pour les résultats
numériques
% et quatre pour les justifications et commentaires.


% QUESTION 1

% L'équation  x = sin(x) - x²/4 possède plusieurs racines entre x = -5 et x =
1.
% Calculez une approximation de ces racines avec une erreur absolue inférieure
à 1e-12.
% NB : dans le deuxième terme du membre de droite, l'exposant de x est 2.
% 1e-12 signifie 10 exposant -12.
% Conseil : relisez attentivement les lignes 11 à 22 ci-dessus.



% QUESTION 2

% Calculez une solution approchée du problème différentiel ci-dessous, dans
% l'intervalle [0 2] et évaluez y(2) avec une erreur absolue inférieure à 1e-
4.
% y'²(x) + sqrt(y(x)) = 1
% y(0) = 0
% NB : dans l'équation, y' est au carré et le deuxième terme du membre de
% gauche est la racine carrée de y(x).
% Conseil : relisez attentivement les lignes 11 à 22 ci-dessus.

% Faculté des Sciences Appliquées
```

```
% Service de Mathématiques
%                              Examen d'analyse numérique du 14 janvier 2005
%
% AVERTISSEMENT :
%
% Pour éviter les problèmes que pose parfois l'utilisation des caractères
% ^ et ~
% vous pouvez "copier-coller" ceux qui figurent ci-dessus.
%
% Indiquez vos nom et prénom sous forme de commentaire au début de chaque
% fichier .m  que vous archivez dans le répertoire de travail.
% Tout fichier qui ne contient pas le nom de son auteur sera ignoré !!
%
% Commentez vos programmes pour qu'ils soient faciles à comprendre.
%
% Pour chaque question, justifiez le choix des méthodes numériques employées
et
% commentez les résultats obtenus. Procédez clairement et de manière concise
au
% moyen de lignes de commentaires placées à la fin de vos programmes.
%
% Dix points sont attribués à chaque question, six pour les résultats
numériques
% et quatre pour les justifications et commentaires.


% QUESTION 1

% L'équation  cos(x) - x³/6 - 1 = 0  possède plusieurs racines entre x = -3 et
x = 1.
% Calculez une approximation de ces racines avec une erreur absolue inférieure
à 1e-12.
% NB : dans le deuxième terme du membre de gauche, l'exposant de x est 3.
% 1e-12 signifie 10 exposant -12.
% Conseil : relisez attentivement les lignes 11 à 22 ci-dessus.

% QUESTION 2

% Calculez une solution approchée du problème de Cauchy suivant dans
% l'intervalle [0 2] et évaluez y(2) avec une erreur absolue inférieure à 1e-
4.
% y'(x) - y(x) + y³(x) = 0
% y(0) = sqrt(2)
% NB : dans le troisième terme du membre de gauche, l'exposant de y(x) est 3
% et la condition initiale est y(0) = racine carrée de 2.
% Conseil : relisez attentivement les lignes 11 à 22 ci-dessus.

function a=Aitken_Shanks(ap)
N = length(ap)-2;
for i=1:N
a(i)=ap(i+2)-(ap(i+2)-ap(i+1))^2/(ap(i+2)-2*ap(i+1)+ap(i));
end
a=a';

% Commentaire général concernant l'examen du 14 janvier 2005.
%
```

```
% Certain(e)s étudiant(e)s fournissent des programmes qui fonctionnent sans
% donner les résultats qu'ils produisent. D'autres ont écrit des
% programmes généraux nécessitant de définir une ou des fonctions sans
% traiter explicitement les questions posées. Dans les deux cas c'est
% insuffisant.
%
% NB dans le programme Q21.M la méthode vpa (variable precision arithmetic)
% est fournie à titre d'exemple bien qu'elle ne soit pas implantée
% sur le serveur Matlab de la faculté.
%
% Les méthodes les mieux adaptées pour résoudre les problèmes posés sont :
% la méthode de Newton pour la question 1 en prenant soin de faire un
% graphe pour obtenir de bonnes valeurs pour démarrer le processus
% itératif et d'adapter la méthode dans le cas de la racine double. La
% convergence reste alors quadratique.
% La méthode de Heun pour le problème de Cauchy car elle est d'ordre 2 et
% nécessite beaucoup moins d'itérations que les méthodes d'Euler. De plus
% la bonne stabilité des méthodes explicites dans le cas des problèmes
% posés ne nécessite pas d'utiliser la méthode d'Euler implicite (mais ce
% n'est pas une faute de l'avoir employée !).
%
% Dans la première question on ne peut pas utiliser la méthode de
% dichotomie pour trouver la racine double x = 0.
% En effet, cette méthode est excellente pour la recherche des racines
% multiples à condition qu'on puisse l'appliquer !
% Ceux et celles qui ont obtenu x = 0 par la méthode de dichotomie on
% obtenu cette racine "par hasard" en raison du choix d'un intervalle
% de départ symétrique par rapport à x = 0.
%
% Dans la deuxième question il fallait donner une approximation de la
% solution du problème de Cauchy dans l'intervalle [0 2] et pas se
% contenter de fournir une valeur approximative de y(2).
% Plusieurs d'entre-vous ont fait un test d'arrêt du type y(x+h)-y(x)<1e-4
% ce qui n'a pas de sens.
%
% Les arguments utilisés pour justifier la précision des résultats
% sont très souvent lacunaires ou inexistants, particulièrement en ce qui
% concerne les problèmes de Cauchy.
%
% Les étudiants qui le souhaitent peuvent "récupérer" les fichiers qu'ils
% ont archivés. Il suffit de m'en faire la demande par courriel à
% l'adresse :  mtolley@ulb.ac.be
%
% N'hésitez pas à me faire part de vos remarques et commentaires par email.
%
% Je reste à votre disposition pour tout renseignement complémentaire.
%
% Rappel : il y a un examen oral de "rattrapage" en juin pour ceux et
% celles qui le souhaitent. La note de cet examen oral a le même poids que
% celle de l'examen de janvier.


% On utilise la méthode de Newton.
% Pour les commentaires, voir le programme Q21.m
% NB: ici il n'est pas nécessaire de travailler en "vpa".
clc;clear;clf
f=inline('sin(x)-x-x.*x/4')
```

```
fprime=inline('cos(x)-1-x/2')
x=-5:0.01:1;
F=f(x);
FPRIME=fprime(x);
plot(x,F,'g')
grid on; hold on
plot(x,FPRIME,'r')
%X(1)=-4.824; L=1; nitermax=3;
%X(1)=-1.749; L=1; nitermax=3;
X(1)=0.001; L=1; nitermax=45;
%X(1)=0.001; L=2; nitermax=3;
for n=1:nitermax
    X(n+1)=X(n)-L*f(X(n))/fprime(X(n));
end
format long
X'
X1=X(end)-1e-14;
X2=X(end)+1e-14;
[X1 f(X1)]
[X(end) f(X(end))]
[X2 f(X2)]
```