Nom, Prénom:

Numéro:

1. On considère la fonction $f(z) = \frac{\sin(z-2)}{(z-1)(z-3)}$

   (a) Déterminez les points singuliers isolés de cette fonction et leur type. Justifiez votre réponse.

   (b) Combien de développements en série de puissances (positives et/ou négatives) de z la fonction $f(z)$ admet-elle ? Précisez la région de convergence associée à chacun de ces développements et justifiez votre réponse.

   (c) Déterminez le terme en $1/(z-3)$ et le terme constant du développement de $f(z)$ en puissances de $(z-3)$ dans la région $0 < |z-3| < 2$. Pouvez-vous en déduire la valeur du résidu de $f(z)$ en $z = 3$? Justifiez votre réponse.

(a) $f(z)$ admet deux points singuliers isolés qui sont des pôles simples: $z=1$ et $z=3$

En effet, $z=1$ possède un voisinage en tout point duquel $f(z)$ est analytique, sauf en $z=1$ (idem pour $z=3$).

Les points singuliers sont des pôles simples car dans chaque cas on peut mettre la fonction sous la forme $f(z) = \frac{\phi(z)}{z-z_0}$ où $\phi(z)$ est analytique et non nulle en z_0.

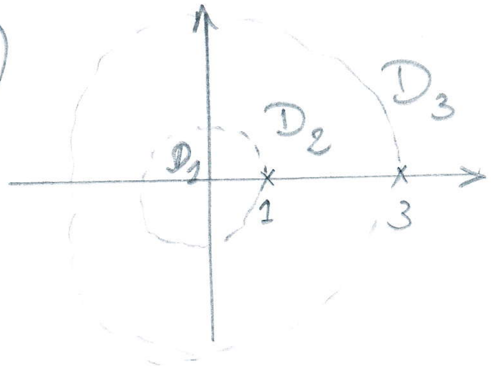
Pour $z=1$, $\phi(z) = (\sin(z-2))/(z-3)$

Pour $z=3$, $\phi(z) = (\sin(z-2))/(z-1)$

Nom, Prénom:

Numéro:

(b)



Trois développements possibles

$D_1 \equiv |z| < 1$, série de Taylor (disque à l'intérieur duquel $f(z)$ analytique)

$D_2 \equiv 1 < |z| < 3$, série de Laurent (anneau à l'intérieur duquel $f(z)$ analytique)

$D_3 \equiv |z| > 3$, série de Laurent (anneau à l'intérieur duquel $f(z)$ est analytique).

(c) $f(z) = \sin(z-2)\left(\dfrac{-1}{2(z-1)} + \dfrac{1}{2(z-3)}\right)$

Développement de $\sin(z-2)$ en puissances de $(z-3)$

$$a_0 = \sin(z-2)\Big|_{z=3} = \sin 1$$

$$a_1 = \frac{d}{dz}\sin(z-2)\Big|_{z=3} = \cos 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\sin(z-2)\Big|_{z=3} = -\frac{\sin 1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(z-2) = \sin 1 + \cos 1\,(z-3) - \frac{\sin 1}{2}(z-3)^2 + \cdots$$

$\forall z \in \mathbb{C}$

Nom, Prénom:

Numéro:

$$-\frac{1}{2(z-1)} = \frac{-1}{4\left(\frac{z-3}{2}+1\right)} = \frac{-1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (z-3)^n \quad |z-3|<2$$

$$\Rightarrow f(z) = \left(\sin 1 + \cos 1\,(z-3) - \frac{\sin 1}{2}(z-3)^2 + \dots\right)$$
$$\left(\frac{1}{2(z-3)} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (z-3)^n\right) \quad 0<|z-3|<2$$

terme en $\frac{1}{z-3}$: $\frac{\sin 1}{2}\frac{1}{z-3} \Rightarrow \operatorname{Res}_{z=3} f(z) = \frac{\sin 1}{2}$

par définition

terme constant : $\frac{\cos 1}{2} - \frac{\sin 1}{4}$

Solution alternative : $f(z)$ admet un développement en série de Laurent en $z_0=3$ qui est un pôle simple ! On peut écrire

$$f(z) = \frac{b_1}{z-3} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-3)^n$$

$$b_1 = \lim_{z\to 3}(z-3)f(z) = \frac{1}{2}\sin 1$$

$$a_0 = \lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}\left((z-3)f(z)\right) = \frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{4}\sin 1$$

Par définition $\operatorname{Res}_{z=3} f(z) = b_1 = \frac{\sin 1}{2}$

Nom, Prénom:

Numéro:

2. Calculez l'intégrale suivante à l'aide du théorème des résidus:

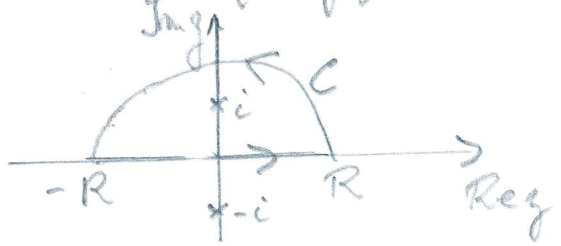
$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$J = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, e^{ix}}{(1+x^2)^2}\, dx$$

Par application du théorème des résidus

$$\int_{-R}^{R} \frac{x\, e^{ix}}{(1+x^2)^2}\, dx + \int_{C} \frac{z\, e^{iz}}{(1+z^2)^2}\, dz = \oint \frac{z\, e^{iz}}{(1+z^2)^2}\, dz$$
$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z)$$

où $f(z) = \dfrac{z\, e^{iz}}{(1+z^2)^2}$ et $C = \{ R e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi \}$ avec $R > 1$



$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{d}{dz} \frac{z\, e^{iz}}{(z+i)^2} = \left. \frac{(e^{iz} + iz\, e^{iz})(z+i)^{\cancel{2}} - z\, e^{iz}\, 2\cancel{(z+i)}}{(z+i)^{\cancel{4}\,3}} \right|_{z=i}$$

$$= \frac{1}{4e}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} \int_{-R}^{R} \frac{x\, e^{ix}}{(1+x^2)^2}\, dx + \operatorname{Im} \int_{C} f(z)\, dz = \frac{\pi}{2e}$$

Quand $R \to \infty$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)^2}\, dx + \lim_{R \to \infty} \operatorname{Im} \int_{C} f(z)\, dz = \frac{\pi}{2e}$ (*)

Nom, Prénom:

Numéro:

Montrons que $\lim_{R\to\infty} \text{Im} \int_C f(z)\,dz = 0$

Notons que $\left| \text{Im} \int_C f(z)\,dz \right| \leq \left| \int_C f(z)\,dz \right|$

Déterminons une borne supérieure au membre de droite par le théorème ML :

sur C, $|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = e^{-y} \leq 1$ car $y \geq 0$

et $|1+z^2| \geq |1-|z^2|| \geq |1-R^2| \Rightarrow \frac{1}{|1+z^2|} \leq \frac{1}{R^2-1}$

$\Rightarrow$ par le th. ML $\left| \int_C f(z)\,dz \right| < \frac{\pi R^2}{(R^2-1)^2}$

$\rightarrow \lim_{R\to\infty} \left| \int_C f(z)\,dz \right| = 0$ et donc $\lim_{R\to\infty} \text{Im} \int_C f(z)\,dz = 0$

Finalement, par (*) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2e}$

Remarque : Si l'on écrit

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}\,dx = J_1 + J_2$$

avec $J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} \frac{e^{ix}}{2i}\,dx$, $J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} \frac{e^{-ix}}{2i}\,dx$,

on peut utiliser le raisonnement ci-dessus pour calculer J_1, mais il faut utiliser un chemin C différent pour calculer J_2 ($C = \{Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq -\pi\}$) afin que $|e^{-iz}|$ soit borné sur C.

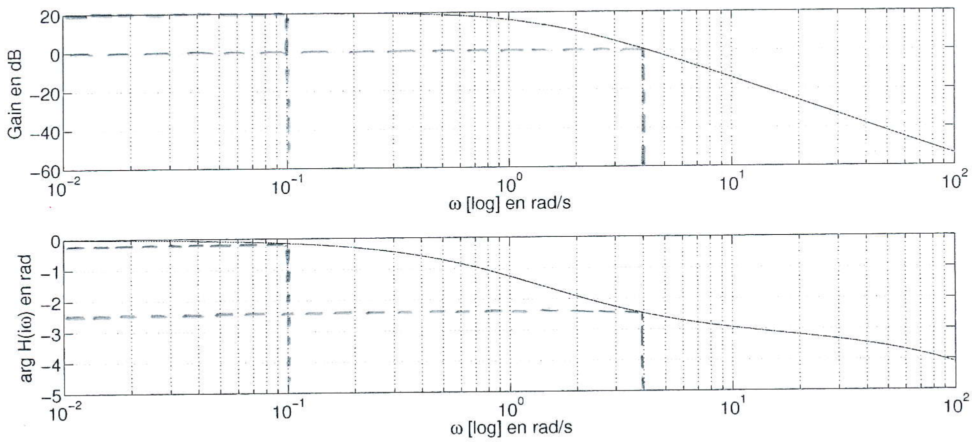
Nom, Prénom:

Numéro:

5. On considère un système linéaire permanent et causal dont la fonction de transfert est donnée par

$$H(p) = \frac{Ke^{-p}}{(p+1)(p+2)}$$

où K est une constante positive. Les courbes de Bode de ce système sont données ci-dessous.



(a) Sur la base des courbes de Bode, déterminez la réponse $y(t)$ du système à l'entrée

$$u(t) = \cos 0.1t + 2\cos 4t$$

Indiquez les points pertinents sur les courbes de Bode et fournissez l'expression de la sortie $y(t)$ en y incluant des valeurs numériques approchées. Justifiez votre réponse.

(b) Déterminez la réponse indicielle $s(t)$ de ce système.

(c) Déduisez-en la réponse impulsionnelle $h(t)$.

(d) Sur la base de $h(t)$, que pouvez-vous conclure quant à la stabilité du système ? Justifiez votre réponse.

(e) Déterminez la valeur de la constante K à partir des courbes de Bode. Justifiez votre réponse.

(a) $y(t) = A_1 \cos(0{,}1t + \varphi_1) + 2A_2 \cos(4t + \varphi_2)$

(cf réponse à entrée de type $\cos \omega_0 t$ et système linéaire permanent)

$20 \log_{10} A_1 \simeq 20 \longrightarrow A_1 \simeq 10$

$\varphi_1 \simeq -0{,}2$ rad

$20 \log_{10} A_2 \simeq 0 \longrightarrow A_2 \simeq 1$

$\varphi_2 \simeq -2{,}5$ rad

(b) $S(p) = H(p)\dfrac{1}{p}$ (cf réponse indicielle ≡ réponse à l'entrée $u(t) = \upsilon(t)$)

$S(p) = \dfrac{Ke^{-p}}{(p+1)(p+2)}\dfrac{1}{p}$ $\quad$ $\mathrm{Re}\, p > 0$ (système causal et entrée causale)

Posons $\tilde{S}(p) = \dfrac{K}{p(p+1)(p+2)}$ $\quad$ $\mathrm{Re}\, p > 0$

$\tilde{s}(t) = \mathcal{L}^{-1}(\tilde{S}(p)) = \left(\operatorname*{Res}_{p=0} \tilde{S}(p)e^{pt} + \operatorname*{Res}_{p=-1} \tilde{S}(p)e^{pt} + \operatorname*{Res}_{p=-2} \tilde{S}(p)e^{pt}\right)\upsilon(t)$

$\Rightarrow \tilde{s}(t) = \left(\dfrac{K}{2} - Ke^{-t} + \dfrac{K}{2}e^{-2t}\right)\upsilon(t)$

Par la règle du glissement temporel, $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}\tilde{S}(p)) = \tilde{s}(t-1)$

$\Rightarrow s(t) = \tilde{s}(t-1) = K\left(\dfrac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \dfrac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right)\upsilon(t-1)$

Nom, Prénom:

Numéro:

(c) $h(t) = \dfrac{ds(t)}{dt} \Rightarrow h(t) = K\left(e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}\right)u(t-1)$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt < \infty \Rightarrow$ système stable

(e) $\displaystyle\lim_{\omega \to 0} |H(i\omega)| = \lim_{\omega \to 0} \frac{K\,|e^{-i\omega}|}{|i\omega+1|\,|i\omega+2|} = \frac{K}{2}$

$\displaystyle\Rightarrow \lim_{\omega \to 0} 20 \log_{10} |H(i\omega)| = 20\,dB = 20 \log_{10} \frac{K}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{K}{2} = 10$ soit $K = 20$