Université Libre de Bruxelles
Faculté des Sciences appliquées

Nom, Prénom:
Numéro:

Analyse complexe
Examen du 7 juin 2011

Remarques importantes

- Répondez à chaque question sur la ou les feuilles (recto et verso) qui suivent directement cette question.
- Indiquez votre nom et le numéro placé sur votre table sur chaque feuille.
- Ne dégrafez pas les feuilles.
- **Justifiez clairement chacune de vos réponses**

Nom, Prénom:

Numéro:

1. On considère la fonction $f(z) = \frac{\sin(z-2)}{(z-1)(z-3)}$

    (a) Déterminez les points singuliers isolés de cette fonction et leur type. Justifiez votre réponse.

    (b) Combien de développements en série de puissances (positives et/ou négatives) de z la fonction $f(z)$ admet-elle ? Précisez la région de convergence associée à chacun de ces développements et justifiez votre réponse.

    (c) Déterminez le terme en $1/(z-3)$ et le terme constant du développement de $f(z)$ en puissances de $(z-3)$ dans la région $0 < |z-3| < 2$. Pouvez-vous en déduire la valeur du résidu de $f(z)$ en $z = 3$? Justifiez votre réponse.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

2. Calculez l'intégrale suivante à l'aide du théorème des résidus:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)^2} dx$$

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

3. (a) Supposons que $g(t) = x(t)\cos t$ et que la transformée de Fourier de $g(t)$ est donnée par

$$G(i\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminez $x(t)$.

(b) On considère un système linéaire permanent dont la transmittance isochrone est donnée par

$$H(i\omega) = \frac{1}{i\omega + 3}$$

Une entrée particulière $u(t)$ produit la sortie suivante:

$$y(t) = (e^{-3t} - e^{-4t})\nu(t)$$

Déterminez $u(t)$.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

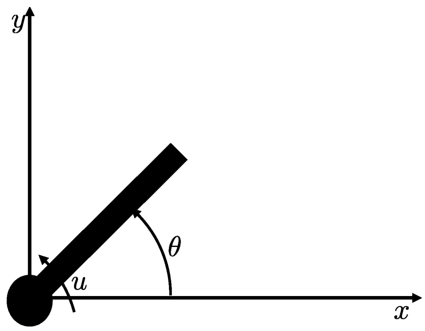
Nom, Prénom:

Numéro:

4. L'évolution de la position d'un bras articulé dans un plan horizontal peut être décrite de façon approchée par l'équation différentielle suivante:

$$I\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = u(t)$$

où $u(t)$ est le couple appliqué au moteur, $\theta(t)$ est la position angulaire du bras indiquée dans la figure ci-dessous et I est l'inertie du bras. On considère la situation où le bras est initialement immobile à la position $\theta(0^-) = \frac{\pi}{4}$. En $t = 0$, on applique un couple moteur $u(t) = 2\nu(t)$ où $\nu(t)$ est la fonction d'Heaviside. Déterminez l'évolution de $\theta(t)$ pour $t > 0$ en utilisant la transformée de Laplace unilatérale.



Nom, Prénom:
Numéro:

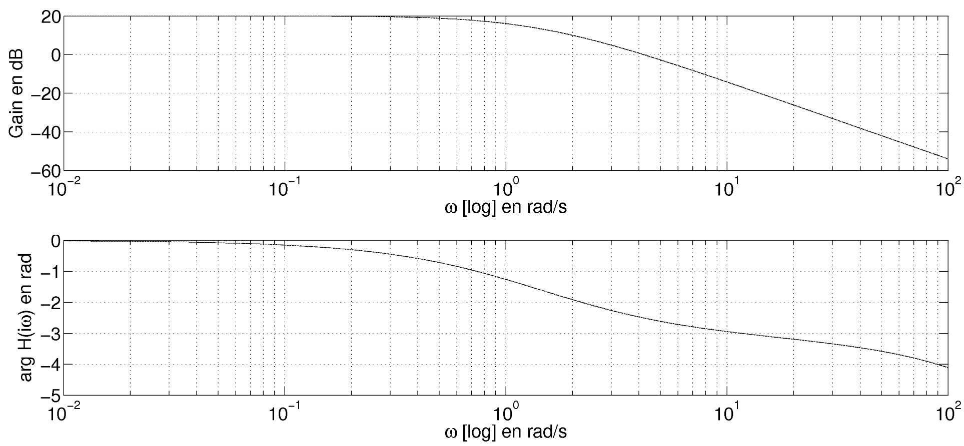
Nom, Prénom:

Numéro:

5. On considère un système linéaire permanent et causal dont la fonction de transfert est donnée par

$$H(p) = \frac{Ke^{-p}}{(p+1)(p+2)}$$

où K est une constante positive. Les courbes de Bode de ce système sont données ci-dessous.



(a) Sur la base des courbes de Bode, déterminez la réponse $y(t)$ du système à l'entrée

$$u(t) = \cos 0.1t + 2\cos 4t$$

Indiquez les points pertinents sur les courbes de Bode et fournissez l'expression de la sortie $y(t)$ en y incluant des valeurs numériques approchées. Justifiez votre réponse.

(b) Déterminez la réponse indicielle $s(t)$ de ce système.

(c) Déduisez-en la réponse impulsionnelle $h(t)$.

(d) Sur la base de $h(t)$, que pouvez-vous conclure quant à la stabilité du système ? Justifiez votre réponse.

(e) Déterminez la valeur de la constante K à partir des courbes de Bode. Justifiez votre réponse.

Nom, Prénom:
Numéro:

Nom, Prénom:
Numéro: