Université Libre de Bruxelles
Ecole Polytechnique

Nom, Prénom:
Numéro:

Analyse complexe
Examen du 25 août 2012
Partie I: Théorie

Remarques importantes

- Répondez à chacune des 2 questions sur la ou les feuilles (recto et verso) blanches qui suivent directement cette question.
- Indiquez votre nom et le numéro placé sur votre table sur chaque feuille.
- Ne dégrafez pas les feuilles.
- L'examen de théorie dure 60 minutes.

Nom, Prénom:

Numéro:

1. Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ? Justifiez chaque réponse en 20 lignes au maximum.

   (a) Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, où $z = x + iy$, est analytique dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$, alors

   $$\triangle u = 0 \qquad \text{et} \qquad \triangle v = 0 \qquad \forall z \in D$$

   où $\triangle$ est la notation pour le Laplacien.

   (b) Soit *Log* z la détermination principale du logarithme népérien de z. La dérivée de cette fonction est donnée par

   $$\frac{dLog\ z}{dz} = \frac{1}{z} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

   (c) Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux fonctions vérifiant les conditions de Dirichlet. Notons $X_1(i\omega) = \mathcal{F}(x_1(t))$ et $X_2(i\omega) = \mathcal{F}(x_2(t))$ leur transformée de Fourier respective. Si $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$ vérifie les conditions de Dirichlet, alors

   $$Y(i\omega) = X_1(i\omega)X_2(i\omega)$$

   où $Y(i\omega) = \mathcal{F}(y(t))$. Dans l'expression de $y(t)$, la notation $*$ indique le produit de convolution.

   (d) Un système linéaire et permanent de réponse impulsionnelle $h(t)$ est stable si $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt$ est finie.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

2. Enoncez et démontrez la première formule de Cauchy en vous basant sur la proposition et le lemme suivants.
   Proposition
   Soient C et C_0 deux chemins admissibles simples et fermés orientés dans le sens positif tels que C_0 est intérieur à C. Si la fonction $f(z)$ est analytique dans C excepté en certains points intérieurs à C_0, alors
   $$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_0} f(z)dz$$
   Lemme
   Soit C_0 le cercle de rayon R_0 centré en $z_0 = x_0 + iy_0$ et orienté dans le sens positif,
   $$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = 1$$

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro: