Université Libre de Bruxelles
Ecole Polytechnique

Nom, Prénom:
Numéro:

Analyse complexe
Examen du 25 août 2012
Partie II - Exercices

Remarques importantes

- Répondez à chacune des 5 questions sur la ou les feuilles (recto et verso) qui suivent directement cette question.
- Indiquez votre nom et le numéro placé sur votre table sur chaque feuille.
- Ne dégrafez pas les feuilles.
- **Justifiez clairement chacune de vos réponses**
- Durée de l'épreuve : 2h40

Nom, Prénom:

Numéro:

1. Soit C_0 le cercle $|z - z_0| = R$ orienté dans le sens positif. Démontrez l'égalité suivante:
   $\oint_{C_0} (z - z_0)^{(n-1)} dz = 0$ pour $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

2. Déterminez le résidu de la fonction $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$ en $z = i$ à partir du développement en série de Laurent approprié. Spécifiez la région de convergence associée à ce développement.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

3. Déterminez la valeur de l'intégrale suivante

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta$$

en utilisant le changement de variable $z = e^{i\theta}$.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

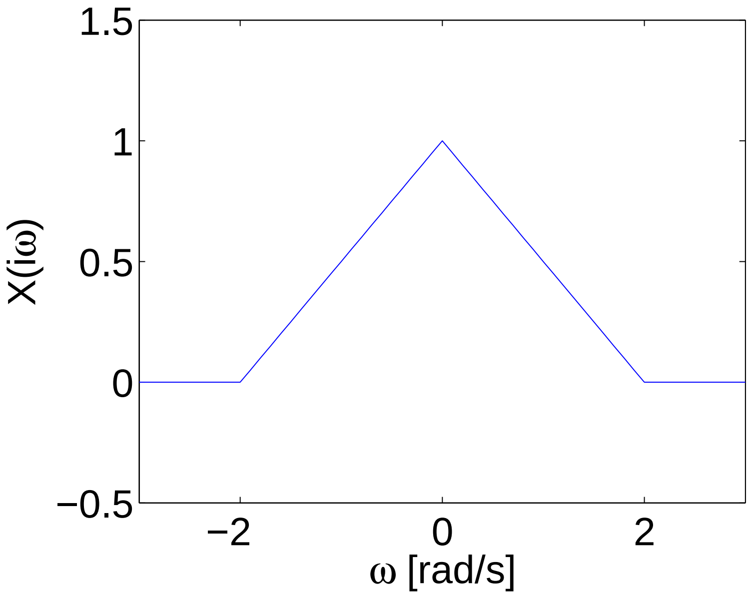
Nom, Prénom:

Numéro:

4. (a) Calculez la transformée de Fourier inverse de la fonction suivante:

$$R(i\omega) = \begin{cases} 2 & 0 \leq \omega \leq 2 \\ -2 & -2 \leq \omega < 0 \\ 0 & |\omega| > 2 \end{cases}$$

(b) Considérons la fonction $x(t)$ dont la transformée de Fourier, $X(i\omega)$ est la fonction paire et réelle représentée ci-dessous.
Soit $y(t) = p(t)x(t)$. Esquissez la transformée de Fourier de $y(t)$



pour $p(t) = \cos(t/2)$ **en vous basant sur la propriété donnant la transformée de Fourier du produit de deux fonctions**. Indiquez l'abscisse et l'ordonnée des points requis pour caractériser complètement la fonction esquissée. Justifiez votre réponse.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

5. On considère un système linéaire permanent causal d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ décrit par l'équation différentielle suivante

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 10u(t)$$

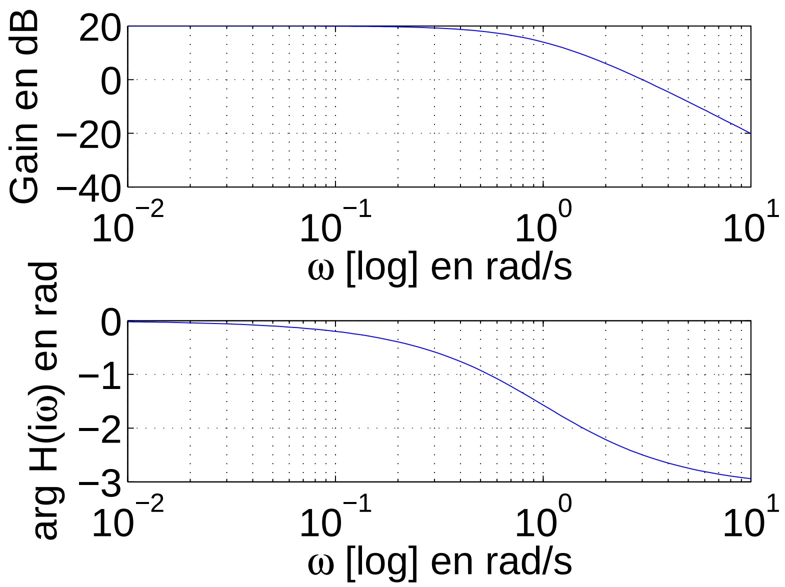
avec $\frac{dy(t)}{dt}|_{t=0^-} = 0, y(0^-) = 0$.

(a) Déterminez la fonction de transfert du système (y compris la région de convergence).

(b) Le système est-il stable ? Justifiez votre réponse.

(c) Déterminez la réponse impulsionnelle du système.

(d) On fournit les courbes de Bode du système considéré dans la figure ci-dessous.



Sur la base de ces courbes, déterminez la réponse $y(t)$ du système à l'entrée

$$u(t) = \sin 0,05t + 2\sin(3t + 1)$$

Nom, Prénom:

Numéro:

Indiquez les points pertinents sur les courbes de Bode et fournissez l'expression de $y(t)$ en y incluant les valeurs numériques approchées. Justifiez votre réponse.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro: