Université Libre de Bruxelles
Faculté des Sciences appliquées

Nom, Prénom:
Numéro:

Analyse complexe
Examen du 22 août 2005

Remarques importantes

- Répondez à chaque question sur la ou les feuilles blanches qui suivent directement cette question.
- Indiquez votre nom et le numéro placé sur votre table sur chaque feuille.
- Ne dégrafez pas les feuilles.

1. Déterminez la réponse d'un système linéaire permanent causal stable de transmittance isomorphe $H(p)$ à l'entrée $u(t) = A \cos \omega_0 t$ où A et ω_0 sont des réels positifs. On suppose l'entrée appliquée depuis un temps infiniment long. Justifiez la réponse. Indiquez en quoi la stabilité du système intervient dans l'obtention du résultat.

Nom, Prénom:

Numéro:

2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez chaque réponse en 20 lignes au maximum.

   a) Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est analytique dans un domaine D, alors $\triangle u = 0$ et $\triangle v = 0$ pour tout z dans D (où $\triangle$ est la notation pour le Laplacien).

   b) Soit $f(z)$ une fonction anaytique en z_0. Il existe un voisinage de z_0 dans lequel le développement en série de Laurent en puissances de $(z - z_0)$ de $f(z)$ prend la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.

   c) Soit $x(t)$ une fonction dont la transformée de Fourier est $X(i\omega)$ et soit a un réel non nul. Il vient:

   $$\mathcal{F}(x(at)) = aX\left(i\frac{\omega}{a}\right)$$

   où $\mathcal{F}(x(t)) = X(i\omega)$.

   d) Les courbes de Bode d'un système linéaire permanent causal et stable permettent de déterminer la réponse de ce système à une entrée dont la transformée de Fourier est

   $$U(i\omega) = -\frac{\pi}{i}\delta(\omega + \omega_0) + \frac{\pi}{i}\delta(\omega - \omega_0)$$

   où ω_0 est un réel positif et $\delta(\omega)$ est l'impulsion de Dirac.

   e) Le théorème des résidus résulte d'un corollaire du théorème de Cauchy-Goursat.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

3. Pour chacune des fonctions $f(z)$ suivantes (où $z = x + iy$)

$$1) f(z) = x^2 + iy^2 \qquad\qquad 2) f(z) = \frac{Log(z+4)}{z^2 + i}$$

déterminez le domaine dans lequel elle est

a) dérivable ?

b) analytique ?

Dans la deuxième fonction, $Logz$ est la détermination principale du logarithme népérien.
Donnez l'expression de la dérivée lorsqu'elle existe.
Justifiez les réponses.

Nom, Prénom:

Numéro:

4. Calculez la valeur de

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta$$

où $a \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$, en utilisant le théorème des résidus.

Indication: On démontrera d'abord qu'un changement de variable approprié permet d'écrire

$$I = \frac{1}{4i} \oint_C \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2 (z - a)(az - 1)} dz$$

où C est le cercle de rayon 1 centré à l'origine et orienté dans le sens positif.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

5. Déterminez la transformée de Laplace bilatérale des fonctions suivantes:

   a) $x(t) = e^{-(t+3)}\nu(-(t+3))$
   b) $x(t) = t^2 \sin(2t)\nu(t)$

   où $\nu(t)$ est la fonction d'Heaviside.
   Précisez la région de convergence dans chaque cas.

Nom, Prénom:

Numéro:

6. On considère un système permanent formé de la mise en série de deux systèmes causals, respectivement de transmittance isomorphe

$$H_1(p) = \frac{p+b}{p+a} \qquad \text{et} \qquad H_2(p) = \frac{Ke^{-p\tau}}{p+c}$$

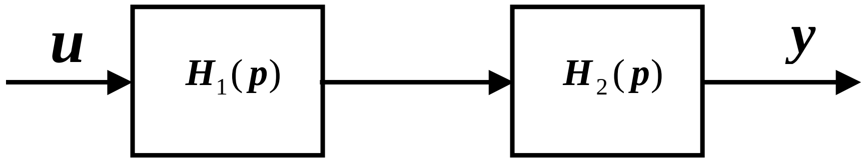
où $K, a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et τ est un réel positif (Voir figure).

On demande :

a) de déterminer la valeur asymptotique (quand $t \to \infty$) de la réponse indicielle de ce système et de préciser les conditions sur K, a, b, c et τ pour que cette valeur soit finie,

b) de calculer la réponse impulsionnelle de ce système,

c) de fournir l'équations à résoudre pour déterminer la pulsation ω_0 telle que la sortie du système pour l'entrée $u(t) = \sin \omega_0 t$ soit déphasée de $-\frac{\pi}{2}$ par rapport à cette entrée. On suppose que l'entrée est appliquée depuis un temps infiniment long et que K, a, b, c et τ ont des valeurs telles que le système est stable.



Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

On considère un système linéaire permanent dont la réponse à l'entrée

$$u(t) = e^{-3t}\nu(t)$$

est

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\nu(t)$$

où $\nu(t)$ est la fonction d'Heaviside.

On demande

a) de déterminer la transmittance isomorphe de ce système (y compris la région de convergence),

b) si ce système possède une transmittance isochrone,

c) de fournir l'équation différentielle qui décrit le comportement de ce système lorsqu'il est initialement au repos,

d) si $\mathcal{F}(h(t)e^{4t})$, la transformée de Fourier de $h(t)e^{4t}$, converge. Ici $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système de transmittance $H(p)$ calculée au point a). Justifiez la réponse.

Nom, Prénom:

Numéro: