Université Libre de Bruxelles
Faculté des Sciences appliquées

Nom, Prénom:
Numéro:

Analyse complexe
Examen du 24 août 2004

Remarques importantes

- Répondez à chaque question sur la ou les feuilles blanches qui suivent directement cette question.
- Indiquez votre nom et le numéro placé sur votre table sur chaque feuille.

1. a) Démontrez que la réponse d'un système linéaire permanent stable de transmittance isochrone $H(i\omega)$ à une entrée sinusoïdale est une sinusoïde de même pulsation. On supposera que la sinusoïde d'entrée est appliquée depuis $t \to -\infty$.
   b) Que vaut le rapport de l'amplitude de la sortie sur l'amplitude de l'entrée ?
   c) Que vaut le déphasage entre l'entrée et la sortie ?
   d) Pourquoi doit-on supposer que le système est stable ?

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

2. Soit f une fonction analytique à l'intérieur d'un ensemble simplement connexe $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$. Démontrez que

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds \qquad \text{avec} \quad z_0, z \in \mathcal{D}$$

est une primitive de $f(z)$.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez chaque réponse en 10 lignes au maximum .
a) La détermination principale , $P(c, z)$, de z^c (où $z, c \in \mathbb{C}$) est une fonction analytique en tout point du plan complexe quelle que soit la valeur de $c \in \mathbb{C}$.
b) Le développement en série de Laurent d'une fonction $f(z)$ en puissances de $(z - z_0)$ est unique.
c)Soit $\phi(t)$ une fonction test et soit $\delta(t)$ l'impulsion de Dirac; la dérivée troisième de l'impulsion de Dirac est donnée par

$$< \delta^{(3)}, \phi >= -\phi^{(3)}(0)$$

où $\phi^{(3)}(0)$ est la dérivée troisième de $\phi(t)$ évaluée en 0.

Nom, Prénom:

Numéro:

4. Déterminez le ou les développements possibles en série de Laurent en puissances de $(z-1)$ pour la fonction $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

5. Calculez la valeur de
$$\int_0^\infty \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$$
en utilisant le théorème des résidus.
Remarque
On pourra au besoin s'aider du résultat suivant.
Soient deux fonctions p et q analytiques en z_0. Si $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ et $q'(z_0) \neq 0$, alors z_0 est un pôle simple du quotient $p(z)/q(z)$ et le résidu de cette fonction en z_0 est donné par
$$Res_{z=z_0}\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

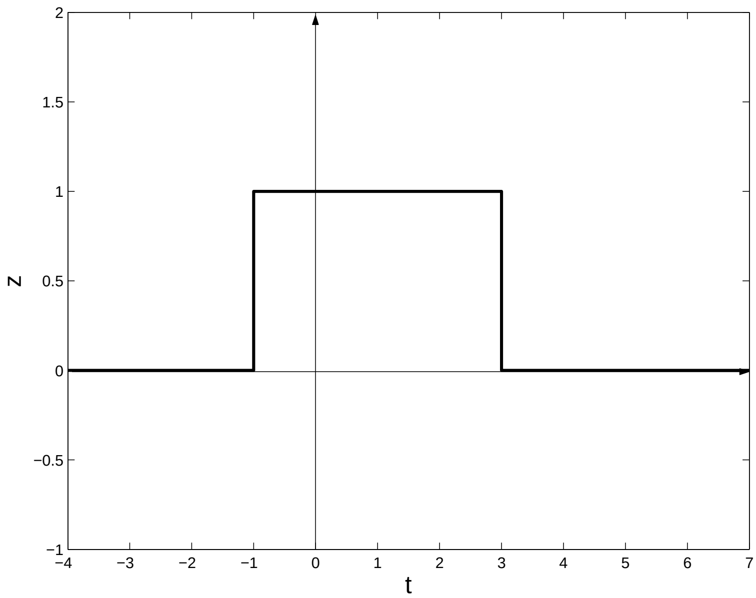
Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

6. Considérons la fonction $x(t) = e^{-(t-2)}\nu(t-2)$ et la fonction $z(t)$ tracée ci-dessous. Vérifiez la propriété de convolution de la transformée de Fourier pour cette paire de fonctions. Pour ce faire, calculez successivement:
a) la transformée de Fourier de $x(t)$, $X(i\omega)$,
b) la transformée de Fourier de $z(t)$, $Z(i\omega)$,
c) la transformée de Fourier $Y(i\omega)$ de $y(t) = x(t) * z(t)$ (où $*$ indique la convolution).
Vérifiez finalement la relation $Y(i\omega) = X(i\omega)Z(i\omega)$



Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

7. On considère deux fonctions causales $x(t)$ et $y(t)$ liées par les équations suivantes:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2y(t) + \delta(t)$$

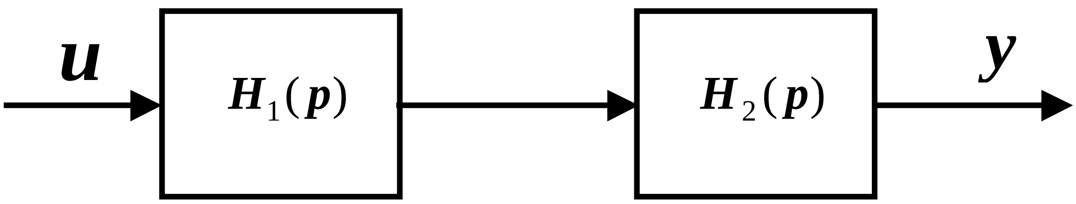
$$\frac{dy(t)}{dt} = 2x(t)$$

où $\delta(t)$ est l'impulsion de Dirac.
Déterminez $X(p)$ et $Y(p)$ ainsi que leur région de convergence.

Nom, Prénom:

Numéro:

8. On considère un système linéaire permanent causal formé de la mise en série de deux systèmes de transmittance isomorphe $H_1(p)$ et $H_2(p)$ avec:



On demande:

a) si le système d'entrée u et de sortie y est stable. Justifiez la réponse.

b) de calculer la réponse impulsionnelle de ce système.

c) de calculer la réponse du système à une entrée sinusoïdale d'amplitude A et de période T après que les transitoires se soient évanouis.

d) de calculer la pente à l'origine de la réponse indicielle du système.

Nom, Prénom:
Numéro: