Université Libre de Bruxelles
Faculté des Sciences appliquées

Nom, Prénom:
Numéro:

Analyse complexe
Examen du 26 août 2003

Remarques importantes

- Répondez à chaque question sur la ou les feuilles blanches qui suivent directement cette question
- Indiquez votre nom et le numéro placé sur votre table sur chaque feuille.

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse en démontrant le résultat ou en donnant un contre-exemple.

   a) Soit une fonction $r(t)$ définie par

   $$r(t) = s(t) * q(t)$$

   où $*$ indique la convolution. Soit $S(i\omega)$ ($Q(i\omega)$) la transformée de Fourier de $s(t)$ ($q(t)$). Si $r(t)$ vérifie les conditions de Dirichlet, alors sa transformée de Fourier $R(i\omega)$ est donnée par:

   $$R(i\omega) = S(i\omega)Q(i\omega)$$

   b) Un système linéaire et permanent est stable si

   $$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

   où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système.

c) Soit une fonction $f(z)$ de la variable complexe z décrite par

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{az + b}$$

où

- $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$
- $\phi(z)$ est une fonction analytique et non nulle en $z = -b/a$

Le résidu de f en $z = -b/a$ est donné par

$$Res_{z=-b/a} f(z) = \phi(-b/a)$$

d)

$$Log(z_1\ z_2) = Log\ z_1 + Log\ z_2 \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

où $Log\ z$ est la détermination principale du logarithme népérien.

e) Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0$, alors les dérivées partielles d'ordre un de u et v existent en (x_0, y_0) et elles vérifient les équations de Cauchy-Riemann évaluées en z_0. En outre

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}|_0 + i\frac{\partial v}{\partial x}|_0$$

où $\frac{\partial u}{\partial x}|_0 (\frac{\partial v}{\partial x}|_0)$ est la dérivée partielle de u (v) par rapport à x évaluée en (x_0, y_0).

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

2. Pour démontrer que la dérivée $f^{(1)}$ d'une distribution f est une distribution, on démontre que $f^{(1)}$ est une fonctionnelle linéaire et continue. Pour la démonstration de la linéarité, on considère deux fonctions tests ϕ_1, ϕ_2 et deux constantes complexes α, β et l'on écrit successivement:

$$\begin{aligned} < f^{(1)}, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 > &= < f, -(\alpha\phi_1^{(1)} + \beta\phi_2^{(1)}) > && (1) \\ &= -\alpha < f, \phi_1^{(1)} > -\beta < f, \phi_2^{(1)} > && (2) \\ &= \alpha < f^{(1)}, \phi_1 > +\beta < f^{(1)}, \phi_2 > && (3) \end{aligned}$$

Pour démontrer la continuité, on considère une suite de fonctions tests $\{\phi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ qui converge dans $\mathcal{D}$ (l'ensemble des fonctions tests) vers zéro. On écrit successivement:

$$\left\{\phi_\nu^{(1)}\right\}_{\nu=1}^{\infty} \to 0 \qquad \text{dans} \qquad \mathcal{D} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} < f^{(1)}, \phi_\nu > &= < f, -\phi_\nu^{(1)} > && (5) \\ < f, -\phi_\nu^{(1)} > &\to 0 \quad \text{quand} \quad \nu \to \infty && (6) \end{aligned}$$

Indiquez la(les) définition(s) et/ou la(les) propriété(s) qui permettent d'obtenir les expressions (1) à (6). Expliquez pourquoi, à partir de (4), (5), (6) on peut conclure que $f^{(1)}$ est une fonctionnelle continue.

Nom, Prénom:

Numéro:

3. Utilisez le calcul des résidus pour déterminer la valeur principale de Cauchy de l'intégrale impropre suivante:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\ dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$$

Nom, Prénom:

Numéro:

4. Donnez deux développements en série de Laurent en termes de puissances de z pour la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

et spécifiez les régions dans lesquelles ces développements convergent.

Nom, Prénom:

Numéro:

5. a) On considère les fonctions $x_1(t) = \frac{\sin(\omega_1 t)}{\pi t}$ et $x_2(t) = \frac{\sin(\omega_2 t)}{\pi t}$ On demande de déterminer $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$ dans le cas où $\omega_1 > \omega_2$.

Rappel: $\mathcal{F}\left(\frac{\sin(Wt)}{\pi t}\right) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$

b) Déterminez la transformée de Fourier de $x(t) = \sin t \ \cos 3t$

Nom, Prénom:

Numéro:

6. On donne les informations suivantes sur une fonction réelle $x(t)$ de la variable réelle t dont la transformée de Laplace bilatérale est $X(p)$:

   a) $X(p)$ possède exactement deux pôles;

   b) $X(p)$ ne s'annule pour aucune valeur de p;

   c) $X(p)$ possède un pôle en $p = -1 + i$;

   d) $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{2t} dt$ converge;

   e) $X(0) = 8$

   On demande de déterminer $X(p)$ et de spécifier sa région de convergence.

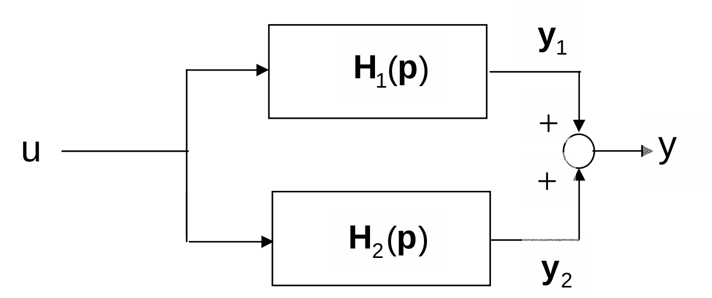
Nom, Prénom:

Numéro:

7. On considère un système linéaire permanent causal formé de la mise en parallèle de deux systèmes de transmittance isomorphe $H_1(p)$ et $H_2(p)$ avec:

$$H_1(p) = \frac{K_1}{1 + pT_1} \qquad\qquad H_2(p) = \frac{K_2}{1 + pT_2}$$

où K_1, K_2, T_1, T_2 sont des réels positifs



On demande:

a) si le système d'entrée u et de sortie y est stable.

b) de calculer la réponse impulsionnelle du système.

c) de calculer la réponse du système à une entrée sinusoïdale d'amplitude A et de période T après que les transitoires se soient évanouis.

d) de calculer la transformée de Laplace de la sortie du système lorsque le système est initialement au repos et qu'on lui applique l'entrée

$$u(t) = K_1\nu(t) + K_2 t\nu(t)$$

où $\nu(t)$ est la fonction d'Heaviside.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

8. On considère un système linéaire permanent causal dont l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$ vérifient l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 2u(t) + \frac{du(t)}{dt}$$

On demande:

a) de calculer la fonction de transfert du système sachant qu'il est initialement au repos.

b) de déterminer la pente à l'origine de la réponse indicielle du système.

c) de calculer la transformée de Laplace unilatérale de la sortie du système pour l'entrée $u(t) = 3\sin(2t)\nu(t)$ et pour les conditions initiales suivantes:

$$y'(0^-) = 1 \quad , \quad y(0^-) = -1$$

Nom, Prénom:
Numéro: