Université Libre de Bruxelles
Faculté des Sciences appliquées

Nom, Prénom:
Numéro:

Analyse complexe
Examen du 13 juin 2012 - Exercices

Remarques importantes

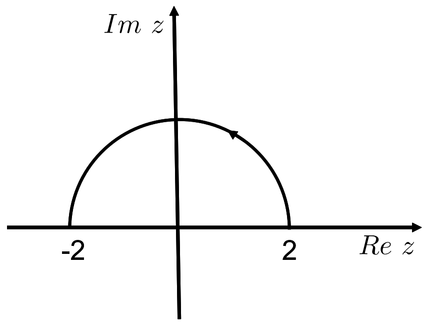
- Répondez à chaque question sur la ou les feuilles (recto et verso) qui suivent directement cette question.
- Indiquez votre nom et le numéro placé sur votre table sur chaque feuille.
- Ne dégrafez pas les feuilles.
- **Justifiez clairement chacune de vos réponses**
- Durée de l'épreuve : 2h20

Nom, Prénom:

Numéro:

1. Calculez les intégrales suivantes:

   (a) $\int_C \frac{z+2}{z} dz$ où C est le demi-cercle représenté ci-dessous



   (b)
$$\int_C \frac{Log\ z}{(z^2+1)^2} dz \qquad C \equiv |z-i| = \frac{1}{2}$$
   où $Log\ z$ est la détermination principale du logarithme népérien et C est orienté dans le sens positif.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

2. (a) On souhaite déterminer le résidu de la fonction $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$ en $z = 3$. Effectuez le développement en série approprié pour $f(z)$ et déduisez en le résidu. Indiquez la région de convergence associée à ce développement.

   (b) Combien d'autres développements en puissances de $(z - 3)$ cette fonction admet-elle ? Indiquez leur région de convergence.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

3. (a) Déterminez la transformée de Fourier de la fonction suivante:

$$x(t) = e^{-at}\nu(t) + e^{at}\nu(-t)$$

où a est un réel positif et $\nu(t)$ est la fonction d'Heaviside.

   (b) Soit $X(i\omega)$ la transformée de Fourier de $x(t)$ et soit $p(t)$ une fonction périodique de pulsation fondamentale ω_0 représentée par la série de Fourier

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t}$$

avec $a_n \in \mathbb{C}$. Démontrez que la transformée de Fourier de $y(t) = x(t)p(t)$ est donnée par $Y(i\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n X(i(\omega - n\omega_0))$.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

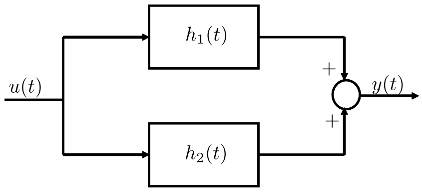
Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

4. On considère un système d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ formé de deux systèmes en parallèle (voir figure ci-dessous) caractérisés par leurs réponses impulsionnelles $h_1(t) = te^{-t}\nu(t)$ et $h_2(t) = -te^{-2t}\nu(t)$.



   (a) Montrez que la fonction de transfert de ce système s'écrit:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{2p+3}{(p+1)^2(p+2)^2}$$

   (b) Quelle est la région de convergence associée à $H(p)$?

   (c) Le système est-il stable ?

   (d) On soumet ce système à l'entrée $u(t) = 3\sin 2t$. Déterminez $y(t)$.

   (e) On soumet ce système à l'entrée $u(t) = 5\nu(t)$. Déterminez la valeur vers laquelle tend la sortie du système quand t tend vers l'infini.

   (f) Déterminez la réponse impulsionnelle du système.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro: