Université Libre de Bruxelles — Nom, Prénom:
Faculté des Sciences appliquées — Numéro:

Analyse complexe
Examen du 2 juin 2005
Série D

Remarques importantes

- Répondez à chaque question sur la ou les feuilles blanches qui suivent directement cette question.
- Indiquez votre nom et le numéro placé sur votre table sur chaque feuille.

1. Calculez la valeur de
$$\int_0^\infty \frac{x \sin 2x}{x^2+3} dx$$
en utilisant le théorème des résidus.
Indication: Il peut être utile de faire appel au résultat suivant: Soit une fonction analytique en tout point du demi-plan $y \geq 0$ situé au-dessus d'un demi-cercle $z = R_0 e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$. Soit C_R n'importe quel demi-cercle $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ de rayon $R > R_0$. Si, pour tout point z sur C_R, il existe une constante positive M_R telle que $|f(z)| \leq M_R$, où M_R tend vers zéro lorsque R tend vers l'infini, alors
$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0$$
où a est un réel positif.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

2. Considérons une fonction $x(t)$ de transformée de Fourier $X(i\omega)$. On donne les informations suivantes:

   (a) $x(t)$ est une fonction réelle non négative

   (b) $\mathcal{F}^{-1}\{(1 + i\omega)X(i\omega)\} = Ae^{-2t}\nu(t)$ où $\mathcal{F}^{-1}\{X(i\omega)\}$ est la transformée de Fourier inverse de $X(i\omega)$ et $\nu(t)$ est la fonction d'Heaviside.

   (c) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(i\omega)|^2 d\omega = 2\pi$.

   Déterminez $x(t)$ explicitement.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

3. (a) Démontrez que le développement en série de Laurent de $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$ dans la région $0 < |z-1| < 2$ est donné par:

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2(z-1)} - 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+2}}$$

(b) Déduisez directement du point (a) la valeur de

$$\oint_C \frac{z}{(z-1)(z-3)} dz$$

où C est le chemin fermé orienté dans le sens positif décrit par $|z-1| = 1$. Justifiez la réponse.

(c) La fonction $f(z)$ du point (a) possède-t-elle un autre développement en série de Laurent en puissances de $(z-1)$ que celui trouvé au point (a), dans la région $0 < |z-1| < 2$? Justifiez la réponse.

(d) La fonction $f(z)$ du point (a) possède-t-elle un autre développement en série de Laurent en puissances de $(z-1)$ que celui trouvé au point (a), dans une ou plusieurs autres régions que celle considérée au point (c). Dans l'affirmative, quelle est cette région ou quelles sont ces régions ?

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

4. On considère un système permanent causal d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ dont le comportement est décrit par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = u(t)$$

   (a) Déterminez la fonction de transfert de ce système, sachant qu'il est initialement au repos.

   (b) Ce système est-il stable ? Justifiez la réponse.

   (c) Déterminez la transformée de Laplace de la sortie de ce système pour $t > 0$ en réponse à l'entrée $u(t) = e^{-3t}\nu(t)$ et pour les conditions initiales

   $$y(0^-) = 1, \frac{dy(t)}{dt}|_{t=0^-} = 1$$

   Donnez la région de convergence qui y est associée.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

5. Le signal $y(t) = e^{-2t}\nu(t)$ est la sortie d'un système causal décrit par la transmittance isomorphe suivante:

$$H(p) = \frac{p-1}{p+1}$$

Déterminez un signal d'entrée $u(t)$ qui engendre la sortie $y(t)$ et pour lequel l'intégrale suivante converge

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|dt \qquad .$$

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

6. On considère un système linéaire permanent causal dont la fonction de transfert est donnée par:

$$H(p) = \frac{e^{-p\tau}}{p+a}$$

où a et τ sont des réels positifs.

On demande

(a) de déterminer sa réponse impulsionnelle,

(b) de déterminer sa réponse indicielle,

(c) de déterminer la réponse de ce système à l'entrée

$$u(t) = (\alpha \sin(\omega_1 t) + \beta \sin(\omega_2 t))\nu(t)$$

après que les phénomènes transitoires dus à l'application de ce signal périodique se soient évanouis,

(d) de déterminer la valeur asymptotique (quand $t \to \infty$) de la réponse de ce système à l'entrée $u(t) = (1-e^{-bt})\nu(t)$ où b est un réel positif.

Nom, Prénom:

Numéro: