Université Libre de Bruxelles — Nom, Prénom:
Faculté des Sciences appliquées — Numéro:

Analyse complexe
Examen du 28 mai 2004

Remarques importantes

- Répondez à chaque question sur la ou les feuilles blanches qui suivent directement cette question.
- Indiquez votre nom et le numéro placé sur votre table sur chaque feuille.

1. Démontrez les propositions suivantes:

   a) La somme $S(z)$ de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ est analytique en tout point z intérieur au cercle de convergence de cette série.
   Suggestion: On peut faire appel au résultat suivant:
   Soit C un chemin fermé intérieur au cercle de convergence de la série $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ et soit $g(z)$ une fonction continue sur C, alors:

   $$\oint_C g(z)S(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \oint_C g(z)(z-z_0)^n dz$$

   b) Soit $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}$ où $\phi(z)$ est analytique et non nulle en z_0. Le résidu de $f(z)$ en z_0 est donné par $\frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$ où $\phi^0(z_0) = \phi(z_0)$ et $0! = 1$.

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

2. Soient $v(t)$ et $w(t)$ deux fonctions admettant respectivement pour transformée de Laplace bilatérale $V(p) = \mathcal{L}(v(t))$ (région de convergence $\alpha_v^+ < \Re\{p\} < \alpha_v^-$) et $W(p) = \mathcal{L}(w(t))$ (région de convergence $\alpha_w^+ < \Re\{p\} < \alpha_w^-$). Déterminez $\mathcal{L}(v(t) * w(t))$ (où $*$ indique la convolution). Que peut-on dire sur la région de convergence de $\mathcal{L}(v(t) * w(t))$? Justifiez la réponse.

Nom, Prénom:

Numéro:

3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez chaque réponse en 10 lignes au maximum .
a) La dérivée première de l'impulsion de Dirac admet des dérivées de n'importe quel ordre.
b) Soit un système linéaire et permanent de réponse impulsionnelle $h(t)$ dont la transformée de Laplace $H(p)$ est une fraction rationnelle. Si les pôles de $H(p)$ sont donnés par $p = i\ a$ et $p = -i\ a$ où $a \in \mathbb{R}$, alors le système est stable.
c) Un système d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ décrit par $y(t) = t^2 u(t)$ est un système non linéaire.

Nom, Prénom:

Numéro:

4. Les fonctions $f(z)$ (avec $z = x + iy$) suivantes sont-elles analytiques en certains points ? Dans l'affirmative, déterminez pour chaque fonction le domaine dans lequel elle est analytique et calculez sa dérivée dans ce domaine. Justifiez les réponses.
a) $f(z) = x^2 + iy^2$
b) $f(z) = Log(z + a)$ où $a \in \mathbb{R}$ et $Log(z)$ est la détermination principale du logarithme népérien.

Nom, Prénom:

Numéro:

5. Calculer la valeur principale de Cauchy de l'intégrale suivante

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 2x + 2}$$

Indication: Il peut être utile de faire appel au résultat suivant: Soit une fonction analytique en tout point du demi-plan $y \geq 0$ situé au-dessus d'un demi-cercle $z = R_0 e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$. Soit C_R n'importe quel demi-cercle $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ de rayon $R > R_0$. Si, pour tout point z sur C_R, il existe une constante positive M_R telle que $|f(z)| \leq M_R$, où M_R tend vers zéro lorsque R tend vers l'infini, alors

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0$$

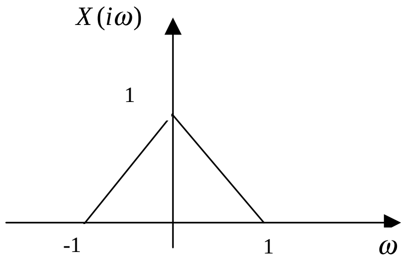
où a est un réel positif.

Nom, Prénom:
Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

6. On considère une fonction $x(t)$ dont la transformée de Fourier $X(i\omega)$ est représentée ci-dessous. Esquissez l'allure de la transformée de Fourier de $y(t) = p(t)x(t)$ pour les fonctions $p(t)$ suivantes:
a) $p(t) = \cos(2t)$
b) $p(t) = \cos(t/2) + 2\cos(5t)$



Nom, Prénom:

Numéro:

7. Calculez la transformée de Laplace bilatérale de chacune des fonctions suivantes, ainsi que la région de convergence qui lui est associée:

   a)$x(t) = e^{-4t}\nu(t) + e^{-5t}\sin(5t)\nu(t)$
   b)$x(t) = te^{-2|t|}$

Nom, Prénom:
Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

8. On considère un système linéaire permanent dont la réponse à l'entrée

$$u(t) = (e^{-t} + e^{-3t})\nu(t)$$

est

$$y(t) = (2e^{-t} - 2e^{-4t})\nu(t).$$

Dans les expressions de $y(t)$ et $u(t)$, $\nu(t)$ est la fonction d'Heaviside. On demande:
a) de déterminer la fonction de transfert de ce système,
b) de déterminer sa réponse impulsionnelle,
c) d'écrire l'équation différentielle qui lie l'entrée et la sortie de ce système.

Nom, Prénom:
Numéro:

Nom, Prénom:

Numéro:

9. On considère un système linéaire permanent causal décrit par la fonction de transfert suivante:

$$H(p) = e^{-2p}\frac{4}{(p+2)}$$

On demande:
a) de déterminer la réponse de ce système à l'entrée $u(t) = 2\sin(2t)$ après l'évanouissement des phénomènes transitoires dus à l'application de la sinusoïde,
b) de déterminer la valeur asymptotique (quand t tend vers l'infini) de la réponse du système à l'entrée $u(t) = (1 - e^{-t})\nu(t)$ où $\nu(t)$ est la fonction d'Heaviside.