Université Libre de Bruxelles
Faculté des Sciences appliquées

Analyse complexe
Examen du 28 mai 2003

Remarques importantes

- Répondez à chaque question sur une ou plusieurs feuilles séparées.
- Indiquez votre nom et votre numéro sur chaque feuille.
- Si l'ensemble de vos réponses est écrit sur 10 feuilles, numérotez les de la manière suivante: $1/10, 2/10, \cdots, 9/10, 10/10$.

1. Soit une fonction $f(z)$ analytique dans le domaine D défini par $R_1 < |z-z_0| < R_2$. Soit C un chemin admissible fermé entourant z_0, localisé à l'intérieur de D et orienté dans le sens positif. Le développement en série de Laurent de $f(z)$ en z_0 est donné par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \tag{1}$$

$$R_1 < |z-z_0| < R_2$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{-n+1}} \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{2}$$

On demande de justifier la présence de la série en puissances négatives de $(z-z_0)$ dans (1) et de démontrer l'expression (2) pour b_n.

2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifiez votre réponse en démontrant le résultat ou en donnant un contre-exemple.

(a) Soit une fonction $r(t)$ définie par $r(t) = s(t)q(t)$ où $s(t)$ et $q(t)$ admettent respectivement pour transformée de Fourier $S(i\omega)$ et $Q(i\omega)$. Si $r(t)$ vérifie les conditions de Dirichlet, alors la transformée de Fourier de $r(t)$, $R(i\omega)$ peut être calculée par:

$$R(i\omega) = \frac{1}{2\pi}(S(i\omega) * Q(i\omega))$$

où $*$ indique la convolution.

(b) Soit $\phi(t)$ une fonction test et soit $\nu(t)$ la fonction d'Heaviside. La dérivée troisième de la distribution régulière associée à la fonction $\nu(t)$ est donnée par

$$< \nu^{(3)}, \phi >= \phi^{(2)}(0)$$

où $\phi^{(2)}(0)$ est la dérivée seconde de la fonction test évaluée en zéro.

(c) Soit un système linéaire permanent d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ décrit par $y(t) = u(t-\tau), \tau \in \mathbb{R}^+$. La fonction de transfert de ce système, $H(p)$ est donnée par $H(p) = e^{-p\tau}$.

(d) Tout système linéaire permanent et causal dont la fonction de transfert est une fraction rationnelle est stable.

(e) Toute fonction f d'une variable complexe $z = x + iy$ décrite par $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ admettant des dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ qui vérifient les équations de Cauchy-Riemann en un point z_0 est analytique en z_0.

3. Déterminer la valeur de l'intégrale de $g(z)$ le long du chemin fermé orienté dans le sens positif décrit par $|z - i| = 2$ lorsque

$$(a) \quad g(z) = \frac{1}{z^2 + 4} \qquad\qquad (b) \quad g(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^2}$$

Justifier la réponse.

4. Soit C l'arc de la courbe $|z| = 2$ allant de $z = 2$ à $z = 2i$ et compris dans le premier quadrant. Sans évaluer l'intégrale, démontrer que

$$|\oint_C \frac{dz}{z^2 - 1}| \leq \frac{\pi}{3}$$

5. Calculer l'intégrale impropre suivante:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$$

6. On considère un système linéaire permanent causal formé de la mise en série de deux systèmes de transmittance isomorphe $H_1(p)$ et $H_2(p)$, avec

$$H_1(p) = \frac{K_1(1+pT_0)}{1+pT_1} \qquad H_2(p) = \frac{K_2}{1+pT_2} \quad T_0 \neq T_1 \neq T_2$$

où K_1, K_2, T_0, T_1 et T_2 sont des réels positifs (voir figure). On demande:

   (a) de déterminer la pente en $t = 0^+$ de $y(t)$ lorsque $u(t) = \nu(t)$ (où $\nu(t)$ est la fonction d'Heaviside), le système étant initialement au repos.

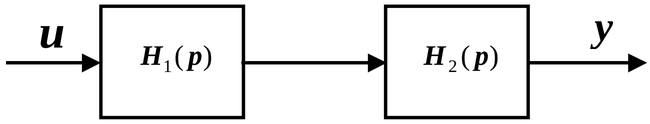
   (b) de calculer la réponse du système à l'entrée

$$u(t) = (\alpha_1 \sin(\omega_1 t) + \alpha_2 \sin(\omega_2 t))\nu(t)$$

   après que les transitoires se soient évanouis.

   (c) de calculer la réponse impulsionnelle du système

   (d) de calculer la réponse indicielle du système (réponse à l'entrée $u(t) = \nu(t)$)



7. On considère un système d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ décrit par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t)$$

On demande:

(a) de calculer la fonction de transfert de ce système, sachant qu'il est initialement au repos.

(b) d'indiquer si le système admet une transmittance isochrone, sachant qu'il est causal. Justifier la réponse et, dans l'affirmative, donner la transmittance isochrone.

(c) de déterminer la sortie du système $y(t), t > 0$, pour une entrée de la forme $u(t) = t\nu(t)$ où $\nu(t)$ est la fonction d'Heaviside, lorsque les conditions initiales sont données par $y(0^-) = -1$, $\frac{dy(t)}{dt}|_{t=0^-} = 0$.

8. Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes:

$$x_1(t) = e^{-2|2t-5|}$$

$$x_2(t) = \sin(2\pi t + \pi/4)$$

$$x_3(t) = \frac{\sin(t)\ \sin(t/2)}{\pi t^2}$$

Pour cette dernière fonction, on peut se baser sur la transformée de Fourier de $\frac{\sin(Wt)}{\pi t}$ donnée par $\mathcal{F}\left(\frac{\sin(Wt)}{\pi t}\right) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$