# Analyse Complexe
# Examen juin 2011 - Exercices 3 et 4

3. (a) Supposons que $g(t) = x(t)\cos t$ et que la transformée de Fourier de $g(t)$ est donnée par

$$G(i\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminez $x(t)$.

(b) On considère un système linéaire permanent dont la transmittance isochrone est donnée par

$$H(i\omega) = \frac{1}{i\omega + 3}$$

Une entrée particulière $u(t)$ produit la sortie suivante :

$$y(t) = (e^{-3t} - e^{-4t})\nu(t)$$

Déterminez $u(t)$.

3. (a) Si $g(t) = x(t)\cos t$, on a

$$x(t) = \frac{g(t)}{\cos t}$$

Il suffit donc de déterminer $g(t)$ par la transformée de Fourier inverse :

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(i\omega)e^{+i\omega t}d\omega$$

En introduisant la définition de $G(i\omega)$, l'intégrale se simplifie en

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{+2} e^{+i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i\omega t}}{it}\right]_{-2}^{+2} = \frac{1}{\pi t}\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} = \frac{1}{\pi t}\sin(2t)$$

On obtient donc

$$x(t) = \frac{1}{\pi t}\frac{\sin(2t)}{\cos t} = \frac{1}{\pi t}\frac{2\sin t\cos t}{\cos t} = \frac{2\sin t}{\pi t}$$

(b) Propriété pratique :

$$\mathcal{L}[e^{-at}\nu(t)] = \frac{1}{p+a}$$

avec $\Re(p) > -a$, ou, si $a < 0$,

$$\mathcal{F}[e^{-at}\nu(t)] = \frac{1}{i\omega + a}.$$

Démonstration transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}[e^{-at}\nu(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\nu(t)e^{-pt}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+p)t}dt = \frac{1}{p+a}$$

si $\Re(p) > -a$. En utilisant cette propriété, on a

$$\mathcal{F}[y(t)] = Y(i\omega) = \frac{1}{i\omega + 3} - \frac{1}{i\omega + 4} = \frac{1}{(i\omega + 3)(i\omega + 4)}$$

Or, $Y(i\omega) = U(i\omega)H(i\omega)$ (propriété des SLPs). Donc :

$$U(i\omega) = \frac{Y(i\omega)}{H(i\omega)} = \frac{1}{i\omega + 4}$$

Nous obtenons alors, en utilisant la propriété démontrée ci-dessus,

$$u(t) = e^{-4t}\nu(t).$$

On peut vérifier par produit de convolution que cette réponse vérifie l'énoncé.

4. L'évolution de la position d'un bras articulé dans un plan horizontal peut être décrite de la façon approchée par l'équation différentielle suivante :

$$I\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = u(t)$$

où $u(t)$ est le couple appliqué au moteur, $\theta(t)$ est la position angulaire du bras indiquée dans la figure ci-dessous et $I$ est l'inertie du bras. On considère la situation où le bras est initialement immobile à la position $\theta(0^-) = \frac{\pi}{4}$. En $t = 0$, on applique un couple moteur $u(t) = 2\nu(t)$ où $\nu(t)$ est la fonction d'Heaviside. Déterminez l'évolution de $\theta(t)$ pour $t > 0$ en utilisant la transformée de Laplace unilatérale.

4. Notons $\Theta(p) = \mathcal{L}_u[\theta(t)]$ et $U(p) = \mathcal{L}_u[u(t)]$. Comme $u(t) = 2\nu(t)$, $U(p) = 2/p$ (cf cours ou démonstration). On a, comme conditions initiales : $\theta(0) = \pi/4$ et $\theta'(0) = 0$ (car le bras est initialement immobile). La transformée de Laplace unilatérale appliquée à l'équation différentielle donne

$$I[p^2\Theta(p) - p\theta(0) - \theta'(0)] = \frac{2}{p} \Leftrightarrow \Theta(p) = \frac{(\pi/4)p^2 + 2/I}{p^3} = \frac{\pi}{4}\frac{1}{p} + \frac{2}{I}\frac{1}{p^3}$$

dont la région de convergence est le demi-plan droit d'équation $\Re(p) > 0$ (fonction causale et pôle triple en $p = 0$). Pour retrouver $\theta(t)$, il faut inverser cette expression. On peut soit utiliser la décomposition en deux termes en se souvenant que

$$\mathcal{L}[t^n\nu(t)] = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

ce qui donne

$$\theta(t) = (\pi/4 + t^2/I)\nu(t),$$

soit utiliser la formule d'inversion basée sur le théorème des résidus, en remarquant que $p = 0$ est un pôle triple isolé :

$$\begin{aligned}
\theta(t) &= Res_{p=0}\left[\frac{(\pi/4)p^2 + 2/I}{p^3}e^{pt}\right]\nu(t) \\
&= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dp^2}[((\pi/4)p^2 + 2/I)e^{pt}]|_{p=0}\nu(t) \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dp}[(\pi/2)pe^{pt} + ((\pi/4)p^2 + 2/I)te^{pt}]|_{p=0}\nu(t) \\
&= \frac{1}{2}[(\pi/2)e^{pt} + (\pi/2)pte^{pt} + (\pi/2)pte^{pt} + ((\pi/4)p^2 + (2/I))t^2e^{pt}]|_{p=0}\nu(t) \\
&= (\pi/4 + t^2/I)\nu(t)
\end{aligned}$$