Service de Mathématiques — BA 2 en Sciences Appliquées (Ir Civil) **janvier 2011**

EXAMEN PARTIEL D'ANALYSE, JEU A :

A-I. Soit l'équation différentielle

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (1)$$

où p et $q \in C^{\circ}([-11, 11], \mathbb{R})$. Soient y_1 et y_2 des solutions de (1) telles que $y_1(3) = 1, y_1'(3) = 0, y_2(3) = 0, y_2'(3) = -2$ et y_2 est une fonction paire.

a) Que valent les wronskiens $W(3; y_1, y_2)$ et $W(x; y_1, y_2)$?

$$W(3; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$W(x; y_1, y_2) = W(3; y_1, y_2)\, e^{-\int_3^x p} = -2\, e^{-\int_3^x p}.$$

b) Déterminer toutes les solutions du problème $\{(1) \text{ et } y(3) = 0\}$.

L'ens. des solutions de (1) est l'esp. vect^{el} 2D : $c_1y_1 + c_2y_2$.
L'ens. des solutions de $\{(1)$ et $y(3)=0\}$ est : c_2y_2
où c_2 est une c^{te} arbitraire (esp. vect^{el} 1D sur $\mathbb{K}$).

c) Combien le problème $\{(1), y(-3) = 1 \text{ et } y(3) = 0\}$ admet-il de solutions ? Justifier.

C'est un problème aux limites.
L'ensemble des solutions de ce problème est un sous-ensemble de la droite vectorielle c_2y_2.
D'autre part, y_2 est paire, d'où $y_2(-3) = 0$. Donc
$\forall c_2 \in \mathbb{K} : c_2\, y(-3) = 0 \neq 1$.
On conclut que ce problème n'a pas de solution.
Réponse : $\boxed{0}$.

Nom	Numéro de liste	/ 8 pts

A-II. Soit $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ un système orthogonal complet dans $L^2([0,T],\mathbb{R})$ avec le produit scalaire $< f,g > := \int_0^T fg$ et la norme $|| \quad ||_2$ associée. Supposons que $||\varphi_k||_2^2 = T/2$ pour tout k.

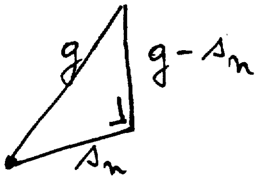
Pour $g \in L^2([0,T],\mathbb{R})$, soit $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$ l'élément de vect$\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ le plus proche de g.

a) Que vaut c_k en fonction de g et des $\varphi_1,\dots,\varphi_n$? Justifier brièvement.

$$c_k = \frac{< g, \varphi_k >}{< \varphi_k, \varphi_k >} .$$

En effet, s_n est la projection orthogonale de g sur vect$\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$. Le coefficient c_k est donc la projection orthogonale de g sur vect$\{\varphi_k\}$, càd le coefficient de Fourier de g en φ_k relativt. au syst. $(\varphi_k)_{k\geq}$

b) Ecrire une formule liant les normes de g, de s_n et de $g - s_n$. Justifier brièvement.



Par Pythagore :

$$\|s_n\|^2 + \|g - s_n\|^2 = \|g\|^2$$

Ceci est équivalent à :

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \underbrace{\|\varphi_k\|^2}_{=\frac{T}{2}} + \|g - s_n\|^2 = \|g\|^2$$

c) Sachant que c_k est indépendant de n, on peut considérer la série $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$. Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si, oui ou non, elle est vraie quels que soient g et $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ satisfaisant aux hypothèses ci-dessus. Justifiez (et précisez, là où s_n intervient, la convergence et le type de convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$.)

Nom .... Numéro de liste ....

c.1) $\lim_{n\to\infty} (g - s_n) = 0$ Ceci est équivalent à la convergence simple de $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ vers g.

Or nous savons que pour les séries trigonométriques le (syst. $(\varphi_k)_k$ est bien orthogonal complet tel que $\|\varphi_k\|^2 = \frac{T}{2}$ et que pour g continue par morceaux (donc $L^2([0,T],\mathbb{R})$), $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ conv. vers la régularisée $\tilde{g}$ qui diffère de g là où g est discontinue ! <u>Rép</u>: faux !

c.2) $\lim_{n\to\infty} \|g - s_n\|_\infty = 0$

<u>Rép.</u>: faux, car c.1) est faux et la conv. uniforme entraîne la conv. simple et $\left(\lim_{n\to\infty} \|g - s_n\|_\infty = 0\right.$ ssi $g \overset{C.U.}{=} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$

c.3) $\lim_{n\to\infty} \|g - s_n\|_2 = 0$ ceci est vrai car par hypothèse $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ est un système orthogonal complet de $L^2([0,T],\mathbb{R})$ et $\lim_{n\to\infty} \|g - s_n\|_2 = 0$ ssi $g \overset{L_2}{=} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ (conv. en moyenne quadratique)

c.4) $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$ Vrai par c.6) :

$\sum^{\infty} c_k^2$ conv, ce qui implique que $c_k \longrightarrow 0$.

c.5) $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ converge Faux, car on a vu que pour les systèmes trigonométriques, $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ conv $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ conv. uniformément !

(ou : le redémontrer en appliquant le critère de Weierstrass).

c.6) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ converge Vrai par b) et c.3) :

$$\frac{T}{2} \sum^{n} c_k^2 + \|g - s_n\|^2 = \|g\|^2$$

d'où par c.3 $\sum^{\infty} c_k^2 = 2\|g\|^2 / T$.

<u>Variante</u> : Vrai par Bessel $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \underbrace{\|\varphi_k\|^2}_{=c^{te}} \leq \|g\|$.

Nom .... | Numéro de liste .... | / 5 pts

A-III. Soit A une matrice 3×3 à coefficients réels constants, admettant 3 valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de vecteurs propres respectifs V_1, V_2, V_3. Parmi ces valeurs propres, seule λ_1 est réelle.
Soit le système différentiel

$$Y' = AY \qquad (1).$$

a) Ecrire la solution générale à valeurs complexes de (1).

$$Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} V_3$$

où $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$

b) Déduire de a) la solution générale à valeurs réelles de (1)

$$Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V + c_2 \operatorname{Re}\left(e^{\lambda_2 t} V_2\right) + c_2 \operatorname{Im}\left(e^{\lambda_2 t} V_2\right)$$

où: $\lambda_2 =: \alpha + i\beta \qquad V_2 =: W_2 + i Z_2$

$Y_2(t) := e^{\alpha t} \cos \beta t \, W_2 - e^{\alpha t} \sin \beta t \, Z_2$

$Y_3(t) := e^{\alpha t} \sin \beta t \, W_2 + e^{\alpha t} \cos \beta t \, Z_2$

d'où la S.G. $Y(t) = c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t) + c_3 Y_3(t)$ où $Y_1(t) = e^{\lambda_1 t} V_1$

c) Ecrire l'équation d'une courbe intégrale plane du système (1).

$$Y = e^{\lambda_1 t} V_1$$

(cette courbe est dans le plan par l'origine contenant V_1 et l'axe ot).

Nom	Numéro de liste ....

d) Sachant que Y_1 est la solution de (1) telle que $Y_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, écrire

d.1) la solution Y de (1) telle que $Y(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Justifier brièvement.

$Y(t) = Y_1(t - t_0)$ car le système est à coeff. c^{ts} (autonome).

d.2) la solution Y de (1) telle que $Y(0) = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Justifier brièvement.

$Y(t) = 5\,Y_1(t)$ car le syst. est linéaire homogène donc tout multiple (par scalaire) de sol. est une sol. et on sait que tout probl. de Cauchy admet une et une seule solution.

/ 2 pts

A-IV. Calculer

$$\frac{d}{dx} \iint_{u^2+\frac{v^4}{4}<x} g(u, v, x^3)\,du\,dv$$

$$= \iint_{u^2+\frac{v^4}{4}<x} \frac{\partial g}{\partial w}(u,v,x^3)\cdot 3x^2\,du\,dv$$

$$+ \oint_{u^2+\frac{v^4}{4}=x} \frac{g(u,v,x^3)}{4u^2+v^6}\,ds$$

$h(u,v) := u^2 + \frac{v^4}{4}$, donc $\vec{\nabla} h = (2u, v^3)$ et

$$\|\vec{\nabla} h\| = \sqrt{4u^2 + v^6}$$