

Séries complexes et séries entières réelles et complexes

I.a) $w_n = u_n + iv_n$, $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, $v_n = \frac{1}{3^{n-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge (et est égale à 2), $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge (et est égale à $\frac{3}{2}$) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge (et est égale à $2 + \frac{3}{2}i$).

I.b) $w_n = u_n + iv_n$, $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{1}{10^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ diverge.

I.c) $w_n = u_n + iv_n$, $u_n = \frac{n}{n+1}$, $v_n = \frac{n+1}{n+2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ diverge.

I.d) $w_n = (\frac{1+i}{2})^n \Rightarrow |w_n| = |\frac{\sqrt{1+i}}{2}|^n = \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ converge, et est égale à $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ car $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$ pour $|\alpha| < 1$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} - 1$.

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ converge, $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge absolument.

I.e) $w_n = (\frac{\sqrt{3}+i}{2})^n = (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})^n = \cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} = u_n + iv_n$ avec $u_n = \cos \frac{n\pi}{6}$, $v_n = \sin \frac{n\pi}{6}$. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge, donc $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ diverge.

On peut arriver à la même conclusion en utilisant le fait que $|w_n| = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} w_n \neq 0$ (la condition nécessaire de convergence n'est pas satisfaite) $\Rightarrow$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ diverge.

II. Remarque : Pour la série entière réelle $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, le rayon de convergence R s'obtient souvent (mais pas toujours !) par l'une des deux formules : $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$, $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, à condition que la limite existe !

II.a) $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, pour $x = 1$ on a la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ qui diverge et pour $x = -1$ on a la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ qui converge. L'intervalle de convergence est donc $[-1, 1[$

II.b) Posons $t = x - 2 \Rightarrow$ la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ avec $a_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n+1}{n})^2 = 1$.

Pour $t = 1$ ($x = 3$) on a la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ qui converge et pour $t = -1$ ($x = 1$) on a la série

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ qui converge absolument $\Rightarrow$ l'intervalle de convergence est $[1, 3]$.

II.c) Posons $t = x - 5 \Rightarrow$ la série entière est $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ avec $a_n = n! \Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$.
La série ne converge que pour $t = 0$ c-à-d $x = 5$.

II.d) $a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty \Rightarrow$ la série converge $\forall x \in \mathbb{R}$

II.e) Série de termes en progression géométrique de raison $\frac{x^3}{10} \Rightarrow$ elle converge pour $|\frac{x^3}{10}| < 1$ et diverge pour $|\frac{x^3}{10}| \geq 1 \Rightarrow$ intervalle de convergence : $] -\sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{10}[$.

II.f) Posons $t = x^5 \Rightarrow$ série entière $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ avec $a_n = \frac{2^n}{2n-1} \Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2(2n-1)} \right) = \frac{1}{2}$.

Pour $t = \frac{1}{2}$ ($x = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$) on a la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ qui diverge et pour $t = -\frac{1}{2}$ ($x = -\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$), on

a la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ qui converge $\Rightarrow$ l'intervalle de convergence est $[-\frac{1}{\sqrt[5]{2}}, \frac{1}{\sqrt[5]{2}}[$

II.g) Posons $t = (x-2)^2 \Rightarrow$ série entière $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ avec $a_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n \Rightarrow R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$. Pour $t = 2$ ($x = 2 \pm \sqrt{2}$) on a la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^n$ qui diverge

car $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^n = \sqrt{e} \neq 0$ (à comparer avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$) $\Rightarrow$ l'intervalle de convergence est $]2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}[$.

II.h) $\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{|x-1|^{n+1}}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x-1| \leq 1 \\ \infty & \text{pour } |x-1| > 1 \end{cases} \Rightarrow$ la série converge (absolument) pour $|x-1| \leq 1$ et diverge pour $|x-1| > 1$. L'intervalle de convergence est $[0, 2]$

II.i) La série converge pour $x = 0$ et pour $x \neq 0$ on a $\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \Rightarrow$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| \leq 1 \text{ (bornée par la suite } \frac{1}{n+1} \text{ qui converge.)} \\ \infty & \text{pour } |x| > 1 \text{ (suite monotone croissante dès que } n > \frac{2-x}{x-1}) \end{cases}$

La série converge (absolument) pour $|x| \leq 1$ et diverge pour $|x| > 1 \Rightarrow$ l'intervalle de convergence est $[-1, 1]$

III) Pour la série entière **complexe** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, le rayon de convergence s'obtient souvent par les formules données au 2) où $|c|$ désigne le module du complexe c .

III.a) $a_n = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^n \Rightarrow R = \frac{3}{2}$. Pour $|z| = \frac{3}{2}$ on a la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}+i}{3} z\right)^n$ qui diverge car le

module du terme général vaut $|\frac{\sqrt{3}+i}{3} z| = |\frac{\sqrt{3}+i}{3}| \frac{3}{2} = 1$ (la suite ne tend pas vers 0).

$\Rightarrow$ le domaine de convergence (absolue) est le disque **ouvert** $|z| < \frac{3}{2}$.

III.b) Comme vu au 3.a), le domaine de convergence (absolue) est le disque **ouvert** $|z - i| < \frac{3}{2}$

III.c) Posons $Z = z + 2 \Rightarrow$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n Z^{n-1}$ avec $a_n = \frac{1}{(n+1)^3 4^n} \Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^3 = 4$.

Pour $|Z| = 4$ ($|z + 2| = 4$) on obtient la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ avec $|c_n| = \frac{1}{4(n+1)^3} \Rightarrow$ elle converge absolument $\Rightarrow$ le domaine de convergence (absolue) est le disque **fermé** $|z + 2| \leq 4$.

III.d) Pour $z = 0$ la série converge et pour $z \neq 0$ on a : $\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \frac{|z|^2}{(2n+1)(2n)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = 0 < 1 \Rightarrow$ la série converge absolument $\forall z \in \mathbb{C}$

III.e) $a_n = n! \Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0 \Rightarrow$ la série converge seulement pour $z = 0 \Rightarrow$ le domaine de convergence est $\{0\}$.

III.f) Posons $Z = z^4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z^n$ avec $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow R = 1$. On aura convergence pour $|Z| < 1$, divergence si $|Z| > 1$.

On va donc étudier la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^n}{n}$ pour $|Z| = 1$:

Pour $|Z| = 1$ et $Z \neq 1$, nous utiliserons le critère d'Abel (cf cours 11.4.6) la série s'écrit $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n b_n$ avec $b_n = \frac{1}{n}$ et $\epsilon_n = Z^n$, on a :

1. la suite $b_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0 en décroissant

2. $\sigma_N := \sum_{k=1}^N \epsilon_k = \sum_{k=1}^N Z^k = Z \sum_{k=1}^N Z^{k-1} = \frac{Z(1 - Z^N)}{1 - Z} \Rightarrow |\sigma_N| = \frac{|Z(1 - Z^N)|}{|1 - Z|} \leq \frac{|1 - Z^N|}{|1 - Z|} \leq \frac{2}{|1 - Z|}$
 $\Rightarrow$ la suite $(|\sigma_N|)$ est bornée.

Pour $Z = 1$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Conclusion la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^n}{n}$: converge absolument pour $|Z| < 1$, diverge pour $|Z| > 1$, pour $Z = 1$ elle diverge et pour $|Z| = 1$ avec $Z \neq 1$ elle converge (mais pas absolument).

Retour à la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{4n}}{n}$

Rappel : $\{z \in \mathbb{C}; z^4 = 1\} = \{-1, 1, i, -i\}$

La série converge absolument pour $|z| < 1$, elle diverge pour $|z| > 1$, pour $z \in \{-1, 1, i, -i\}$ elle diverge et pour $|z| = 1$ et $z \notin \{-1, 1, i, -i\}$ elle converge (mais pas absolument).