Corrigé séance 5 : Séries numériques

1. (a) Non
   (b) Oui, car pour $n > 31$, on a : $\sin(\frac{100}{n}) > 0$
   (c) Non, car pour $n > 500$, on a $\frac{(100-3n)}{2n-999} \leq 0$
2. (a) Non, on n'a pas $\lim u_n = 0$
   (b) Oui, mais la série ne converge pas (voir 3.g))
   (c) Non, on n'a pas $\lim u_n = 0$
3. (a) Il faut étudier $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$
   $\displaystyle\frac{1}{2n+3} \sim \frac{1}{2n}$. Or la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ qui diverge, donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$ diverge.
   (b) $\forall n \geq 2$, on a $\frac{n!}{n^2} \geq \frac{1}{2}$. La condition nécessaire de convergence n'est pas satisfaite : on n'a pas $\lim u_n = 0$. Donc la série diverge.
   (c) $n! = 1.2.3\ldots n.$ et $(2n+1)!! = 1.3.5.7\ldots(2n+1)$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n+3} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1$, donc la série converge.
   (d) $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, donc la série converge.
   (e) $\frac{n}{(n^2+1)} \sim \frac{1}{n}$, donc la série diverge.
   (f) $\forall n > 12, e^n > n^5 \Rightarrow \forall n > 12$, on a : $n^3 e^{-n} < \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}$ donc la série converge.
   (g) $\sin\frac{100}{n} \sim \frac{100}{n}$, donc la série diverge.
   (h) $u_n \sim \frac{8n^3}{13n^5} = \frac{8}{13}\frac{1}{n^2}$, donc la série converge.
   (i) Rappel :$x - \sin x \sim \frac{x^3}{3!}$ pour $x \to 0$
   $\Rightarrow \frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{6n^3} \Rightarrow$ donc la série converge.
   (j) Rappel :$\ln(1+x) - \ln(1-x) \sim 2x$ pour $x \to 0$
   $\Rightarrow \ln(\frac{2n+1}{2n-1}) = \frac{\ln(1+\frac{1}{2n})}{\ln(1-\frac{1}{2n})} = \ln(1+\frac{1}{2n}) - \ln(1-\frac{1}{2n}) \sim \frac{1}{n}$ donc la série diverge.
4. (a) Pour $\alpha \neq 0$, $\frac{1}{\alpha n+1} \sim \frac{1}{\alpha n} \Rightarrow$ La série diverge $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
   (b) Pour $\alpha \neq 0, u_n = \frac{n!}{\alpha^n} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{\alpha} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow$ La série diverge $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
   (c) Pour $\frac{1}{n^\alpha+1} \sim \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow$ la série $\begin{cases} \text{converge pour } \alpha > 1 \\ \text{diverge pour } \alpha \leq 1 \end{cases}$
   (d) Pour $u_n = \left(\frac{n+\alpha}{n+1}\right)^{n^2} \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n+\alpha}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{\alpha-1}{n+1}\right)^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{\alpha-1} \Rightarrow$
   la série $\begin{cases} \text{converge pour } \alpha < 1 \\ \text{diverge pour } \alpha \geq 1 \text{ et dans ce cas on n'a d'ailleurs pas } \lim u_n = 0 \end{cases}$

5. (a) $\sin(\frac{100}{n})$ décroit et tend vers 0 $\Rightarrow$ la série converge.
   (b) $(\frac{\ln n}{n})$ décroit et tend vers 0 $\Rightarrow$ la série converge.
   (c) La série n'est pas alternée car $a_{2k} = 0$. C'est en fait une série à termes négatifs : c'est la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{4k+1}$ qui diverge.

6. $a_n + b_n = \dfrac{3}{(2n+1)(1-4n)} \sim -\dfrac{3}{8n^2} \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ converge. Cependant $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent.
   On ne peut donc pas écrire l'égalité car :
   On peut écrire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ ssi les 3 séries convergent.