Séance 4 :Fonction de Lagrange (II)

1. Voir corrigé séance 3.
2. (a) Oui. On vérifie aisément que $L(y_1+y_2) = Ly_1 + Ly_2$ et $L\lambda y_1 = \lambda Ly_1$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in C^2$

   (b) La fonction de Lagrange est solution de $\begin{cases} y" + \frac{2y'}{x} = 0 \\ y(\xi) = 0 \\ y'(\xi) = 1 \end{cases}$

   La solution générale de $y" + \frac{2y'}{x} = 0$ est obtenue en résolvant l'équation d'Euler $x^2y" + xy' = 0$. L'équation indicielle a pour racines 0 et -1 donc la solution générale de notre équation est $y(x) = \frac{A}{x} + B$.

   Pour trouver la fonction de Lagrange on utilise les conditions en $x = \xi$ pour $y(x) = \frac{A(\xi)}{x} + B(\xi)$ et $y'(x) = -\frac{A(\xi)}{x^2}$.
   On a donc :
   $y(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{A(\xi)}{\xi} + B(\xi) = 0 \Rightarrow B(\xi) = -\frac{A(\xi)}{\xi}$
   $y'(\xi) = 1 \Rightarrow -\frac{A(\xi)}{\xi^2} = 1 \Rightarrow A(\xi) = -\xi^2 \Rightarrow B(\xi) = \xi$ La fonction de Lagrange est donc $\ell(x,\xi) = -\frac{\xi^2}{x} + \xi$.
3. (a) $\ell(x,\xi$ est l'unique solution du problème différentiel :
   $x^2y" - 2xy' + 2y = 0 \quad y(\xi) = 0 \quad y'(\xi) = \frac{1}{\xi^2}$
   $\Rightarrow \ell(x,\xi) = \frac{x(x-\xi)}{\xi^3}$ avec $\xi \neq 0$

   (b) La solution générale de l'équation non homogène est donnée par :
   $$y(x) = Ax + Bx^2 + \int_0^x x\frac{x-\xi}{\xi^3}\xi^3 g(\xi)d\xi = Ax + Bx^2 + x\int_0^x (x-\xi)g(\xi)d\xi$$
   $$\Rightarrow y(x)' = A + 2Bx + \int_0^x (x-\xi)g(\xi)d\xi + x\int_0^x g(\xi)d\xi$$
   D'oˇ $y(0) = y'(0) = 0 \Rightarrow A = 0$
   $\Rightarrow y(x) = Bx^2 + x\int_0^x (x-\xi)g(\xi)d\xi$

   (c) $g(x) = 2 \Rightarrow y(x) = Bx^2 + x^3$
4. (a) La solution de l'équation homogène avec conditions intiales non homogènes est $y = e^x + 1$
   La fonction de Lagrange est $\ell(x,\xi) = e^{x-\xi} - 1$.
   La solution de l'équation non homogène avec conditions initiales homogènes est $y = xe^x - e^x + 1$
   La solution de notre problème est : $y = xe^x + 2$

   (b) La solution l'équation homogène avec conditions intiales non homogènes est $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$
   La fonction de Lagrange est $\ell(x,\xi) = \frac{e^{x-\xi} - e^{\xi - x}}{2} = \sinh(x-\xi)$.

   La solution de l'équation non homogène avec conditions initiales homogènes est $y = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \cosh(x) - 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

   La solution de notre problème est :$y = \begin{cases} \cosh(x) \text{ si } x < 0 \\ 2\cosh(x) - 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$