Séance 3 :Equations différentielles linéaires non homogénes, fonction de Lagrange

1. (a) $\vec{y}(x_0; x_0, \vec{c}, f) = \vec{c}$

   (b) $\vec{y}(u; u, \vec{c}, f) = \vec{c} \quad \forall u \in I$

2. (a) Posons $y_h = y(x_0; x_0, \vec{c})$, $y_p = y(x_0; x_0, \vec{0}, f)$ et $z = y_h + y_p$.
   En suivant nos notations, $\vec{z}(x) = (z(x), z'(x), z''(x), \ldots, z^{(n-1)}(x))$.
   On a : $P(D)z = P(D)y_h + P(D)y_p = 0 + f = f$ car l'opérateur $P(D)$ est linéaire, et $\vec{z}(x_0) = (z(x_0), z'(x_0), \ldots, z^{(n-1)}(x_0)) = \vec{y}_h(x_0) + \vec{y}_p(x_0) = \vec{c} + \vec{0} = \vec{c}$ (cf 1.))

   D'où, d'aprés le théoréme d'existence et d'unicité, $z(x) = y(x; x_0, \vec{c}, f)$.

   Remarque Pour connaître $y(x; x_0, \vec{c})$, on peut à nouveau utiliser la linéarité de $P(D)$.

   Posons $z_h(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y(x; x_0, \vec{e_i})$. On a $P(D)z_h = 0$ et $\vec{z}_h(x_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i y(x_0; x_0, \vec{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{e_i} = \vec{c}$ (cf 1.)).

   D'où, d'aprés le théoréme d'existence et d'unicité, $z_h(x) = y(x; x_0, \vec{c})$.

   (b) Posons $z(x) = y(x - x_0; 0, \vec{c})$.
   On a $P(D)z = 0$ car $a_i(x - x_0) = a_i \quad i = 0, 1, \ldots, n$ (les coefficients sont constants) et $\vec{z}(x_0) = y(x_0 - x_0; 0, \vec{c}) = y(0; 0, \vec{c}) = \vec{c} \Rightarrow z(x) = y(x; x_0; \vec{c})$

   Application

   $y'' + y = 0,\ y(3) = 1,\ y'(3) = 2$ donc ici $\vec{c} = (1, 2)$ et $x_0 = 3$. On a $y(x; 3, \vec{c}) = y(x-3; 0, \vec{c})$, donc on commence par calculer $y(x; 0, \vec{c})$, la solution de $y'' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

   $y'' + y = 0 \Rightarrow y(x) = A\cos x + B\sin x$.

   $y(0) = A = 1$ et $y'(0) = B = 2 \Rightarrow y(x; 0, \vec{c}) = \cos x + 2\sin x \Rightarrow y(x-3; 0, \vec{c}) = \cos(x-3) + 2\sin(x-3)$.

3. Posons $z(x) = \int_{x_0}^{x} \ell(x, \xi) f(\xi) d\xi$.
   Pour vérifier que $z(x) = y(x; x_0, \vec{0}, f)$ nous allons vérifier que $\vec{z}(x_0) = \vec{0}$ et que $P(D)z = f$.

   $z(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} \ell(x, \xi) f(\xi) d\xi = 0 \Rightarrow z(x_0) = 0$

   $z'(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \ell(x, \xi)}{\partial x} f(\xi) d\xi + \ell(x, x) f(x)$ (obtenu en appliquant la formule avec $F(x, \xi) = \ell(x, \xi) f(\xi)$, $\alpha(x) = x_0$ et $\beta(x) = x$)
   On a de plus que $\ell(x, \xi) = \frac{1}{a_0(\xi)} y(x; \xi, \vec{e_n})$ (par définition et en appliquant la remarque du 2)a)), donc $\ell(x, x) = \frac{1}{a_0(x)} y(x; x, \vec{e_n}) = 0$ (cf 1)b) avec $u = x$).

   $\Rightarrow z'(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \ell(x, \xi)}{\partial x} f(\xi) d\xi \Rightarrow z'(x_0) = 0$.

En généralisant, on a :

$$z^{(i)}(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^{i}\ell(x,\xi)}{\partial x^{i}}f(\xi)d\xi+\frac{\partial^{i-1}\ell(x,x)}{\partial x^{i-1}}f(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^{i}\ell(x,\xi)}{\partial x^{i}}f(\xi)d\xi$$

car $\frac{\partial^{i-1}\ell(x,x)}{\partial x^{i-1}}=\frac{1}{a_0(x)}y^{(i-1)}(x;x,\vec{e_n})=0$ pour $i=1,2,\dots,n-1$

$\Rightarrow z^{(i)}(x_0)=0$ pour $i=1,2,\dots,n-1$ où $z^{(i)}$ représente la $i^{\text{éme}}$ dérivée de la fonction $x\mapsto y(x;x_0,\vec{e_n})$.

Pour $i=n$, on a :

$$z^{(n)}(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^{n}\ell(x,\xi)}{\partial x^{n}}f(\xi)d\xi+\frac{\partial^{n-1}\ell(x,x)}{\partial x^{n-1}}f(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^{n}\ell(x,\xi)}{\partial x^{n}}f(\xi)d\xi+\frac{f(x)}{a_0(x)}$$

car $\frac{\partial^{n-1}\ell(x,x)}{\partial x^{n-1}}=\frac{1}{a_0(x)}y^{(n-1)}(x;x,\vec{e_n})=\frac{1}{a_0(x)}.1=\frac{1}{a_0(x)}$

En résumé, on a $z^{(i)}(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^{i}\ell(x,\xi)}{\partial x^{i}}f(\xi)d\xi & \text{pour } i=0,1,\dots,n-1\\ \displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^{n}\ell(x,\xi)}{\partial x^{n}}f(\xi)d\xi+\frac{f(x)}{a_0(x)} & \text{pour } i=n\end{cases}$

Donc $[P(D)z](x)=\displaystyle\int_{x_0}^{x}P(D)\ell(x,\xi)f(\xi)d\xi+a_0(x).\frac{f(x)}{a_0(x)}=0+f(x)=f(x)$ car $P(D)\ell(x,\xi)=0$ par définition de $\ell(x,\xi)$.

Attention Dans l'expression $P(D)\ell(x,\xi)=0$, il faut bien comprendre que la dérivation ne se fait que par rapport à la variable x car $D=\frac{d}{dx}$

4. $\ell(x,\xi)=\frac{1}{a_0}y(x;\xi,\vec{e_n})=\frac{1}{a_0}y(x-\xi;0,\vec{e_n})=\ell(x-\xi,0)$
5. (a) $y''+\omega^2y=0,\ \omega\neq0\Rightarrow y(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$ et $y'(x)=\omega[-A\sin\omega x+B\cos\omega x]$
   $\Rightarrow y(0)=A=0$ et $y'(0)=\omega B=1\Rightarrow y(x;0,\vec{e_2})=\frac{\sin\omega x}{\omega}$
   $\Rightarrow \ell(x,\xi)=\ell(x-\xi,0)=\frac{\sin\omega(x-\xi)}{\omega}$

   (b) $y''-2ay'+a^2y=0,\ a\neq0\Rightarrow y(x)=e^{ax}(Ax+B)$ et $y'(x)=e^{ax}(aAx+aB+A)$
   $\Rightarrow y(0)=B=0,\ y'(0)=aB+A=1\Rightarrow y(x;0,\vec{e_2})=xe^{ax}$
   $\Rightarrow \ell(x,\xi)=\ell(x-\xi,0)=(x-\xi)e^{a(x-\xi)}$

   (c) $y^{(n)}(x)=0$ avec $y(0)=y'(0)=\dots=y^{(n-2)}(0)=0,\ y^{(n-1)}(0)=1$
   $y^{(n)}(x)=0$ et $y^{(n-1)}(0)=1\Rightarrow y^{(n-1)}(x)=1$
   $y^{(n-1)}(x)=1$ et $y^{(n-2)}(0)=0\Rightarrow y^{(n-2)}(x)=x$
   $y^{(n-2)}(x)=x$ et $y^{(n-3)}(0)=0\Rightarrow y^{(n-3)}(x)=\frac{x^2}{2}$ etc.
   $\Rightarrow y(x;0,\vec{e_n})=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\Rightarrow \ell(x,\xi)=\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}$

   Remarque D'aprés la formule de LAGRANGE, on a que $y(x)=\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}f(\xi)d\xi$ est l'unique solution de $y^{(n)}(x)=f(x),\quad y(x_0)=y'(x_0)=\dots=y^{(n-1)}(x_0)=0$

(d) Recherchons la fonction de Lagrange de $P(D) = (D-a)(D-b)(D-c)$ avec $a \neq b, a \neq c$ et $b \neq c$. Comme l'opérateur est à coefficients constants,$\ell(x,\xi) = \ell(x-\xi, 0)$. La fonction $\ell(x,0)$ est l'unique solution de $(D-a)(D-b)(D-c)y = 0 \quad , y(0) = y'(0) = 0$ et $y''(0) = 1$

$\Rightarrow y(x) = Ae^{ax} + Be^{bx} + Ce^{cx}$

$\Rightarrow y'(x) = Aae^{ax} + Bbe^{bx} + Cce^{cx}$

$\Rightarrow y''(x) = Aa^2e^{ax} + Bb^2e^{bx} + Cc^2e^{cx}$

$\Rightarrow \begin{cases} y(0) = A + B + C = 0 \\ y'(0) = Aa + Bb + Cc = 0 \\ y''(0) = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{(b-a)(c-a)}, B = \frac{1}{(a-b)(c-b)}$ et $C = \frac{1}{(a-c)(b-c)}$

$\Rightarrow \ell(x,0) = \frac{e^{ax}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{bx}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{cx}}{(a-c)(b-c)}$

$\Rightarrow \ell(x,\xi) = \ell(x-\xi,0) = \frac{e^{a(x-\xi)}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{b(x-\xi)}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{c(x-\xi)}}{(a-c)(b-c)}$

6. La solution $y(x)$ du probléme $y'' + \omega^2 y = f$, $y(x_0) = a$, $y'(x_0) = b$ avec $\omega \neq 0$ est la somme de la solution y_h de $y'' + \omega^2 y = 0$, $y(x_0) = a$, $y'(x_0) = b$ et de la solution y_p de $y'' + \omega^2 y = f$, $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$.

Calcul de y_h

$y_h = y(x; x_0, (a,b)) = y(x - x_0; 0, (a,b))$.

La solution de $\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0 \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$ est $y(x) = a\cos\omega x + \frac{b}{\omega}\sin\omega x$

$\Rightarrow y_h(x) = a\cos\omega(x-x_0) + \frac{b}{\omega}\sin\omega(x-x_0)$

Calcul de y_p

$y_p(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \ell(x,\xi)f(\xi)d\xi = \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} \sin\omega(x-\xi)f(\xi)d\xi.$

D'où :

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = a\cos\omega(x-x_0) + \dfrac{b}{\omega}\sin\omega(x-x_0) + \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_{x_0}^{x} \sin\omega(x-\xi)f(\xi)d\xi.$

Application

Pour $x_0 = 0$ on a : $y(x) = a\cos\omega x + \dfrac{b}{\omega}\sin\omega x + \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^x \sin\omega(x-\xi)f(\xi)d\xi$

(a) $y(x) = 2\cos x + \sin x + 3\int_0^x \sin(x-\xi)d\xi = -\cos x + \sin x + 3$

(b) $y(x) = -\cos 2x + \frac{1}{2}\int_0^x e^{\xi}\sin 2(x-\xi)d\xi = -\frac{6}{5}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x + \frac{e^x}{5}$

(c) $y(x) = \int_0^x \sin(x-\xi)\sec\xi d\xi = x\sin x + (\cos x)\ln|\cos x|$

(d)

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\omega}\int_0^x \sin\omega(x-\xi)\sin\Omega\xi d\xi \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_0^x [\cos(\omega x - (\omega+\Omega)\xi) - \cos(\omega x + (\Omega-\omega)\xi)]d\xi \\ &= \frac{1}{2\omega}[\frac{1}{(\omega+\Omega)}(\sin(\omega x) + \sin(\Omega x)) - \int_0^x \cos(\omega x - (\Omega-\omega)\xi)]d\xi \end{aligned}$$

Premier cas : $\Omega \neq \omega$
$y(x) = \frac{1}{(\omega^2-\Omega^2)}\sin(\Omega x) + \frac{\Omega\sin(\omega x)}{\omega(\Omega^2-\omega^2)}$
Deuxiéme cas : $\Omega = \omega$
$y(x) = \frac{\sin(\omega x)}{2\omega^2} - \frac{x\cos(\omega x)}{2\omega}$ (Résonnance)

(e) $y(x) = 2\cos x + 3\sin x + \int_0^x \sin(x-\xi)f(\xi)d\xi$

Premier cas : $x < \pi$

Pour $x < \pi$ et $\xi \leq x$ on a $\xi < \pi \Rightarrow f(\xi) = 0$ pour $\xi \leq x$
$\Rightarrow y(x) = 2\cos x + 3\sin x + \int_0^x \sin(x-\xi).0d\xi = 2\cos x + 3\sin x$
Le résultat est évident parce que dans ce cas on doit résoudre $y'' + y = 0$, $y(0) = 2$ $y'(0) = 3$ avec $x < \pi$

Deuxiéme cas : $x \geq \pi$

$\int_0^x \sin(x-\xi)f(\xi)d\xi = \int_0^\pi 0d\xi + 2\int_\pi^x \sin(x-\xi)d\xi = 2(1+\cos x)$
$\Rightarrow y(x) = 2\cos x + 3\sin x + 2 + 2\cos x = 4\cos x + 3\sin x + 2$
D'où $y(x) = \begin{cases} 2\cos x + 3\sin x & \text{pour } x \leq \pi \\ 4\cos x + 3\sin x + 2 & \text{pour } x \geq \pi \end{cases}$

Autre méthode (méthode de raccordement)

Recherchons la solution sous la forme
$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{pour } x \leq \pi \\ y_2(x) & \text{pour } x \geq \pi \end{cases}$
et exprimons que $y_1(\pi) = y_2(\pi)$, $y_1'(\pi) = y_2'(\pi)$

Pour $x < \pi$ on a le probléme : $y_1'' + y_1 = 0$, $y_1(0) = 2$ $y_1'(0) = 3$ (car $f(x) = 0$ pour $x < \pi$)
$\Rightarrow y_1(x) = 2\cos x + 3\sin x$
Pour $x \geq \pi$ on a le probléme : $y_2'' + y_2 = 2$, $y_2(\pi) = -2$, $y_2'(\pi) = -3$ (car $f(x) = 2$ pour $x \geq \pi$ et $y_1(\pi) = -2$, $y_1'(\pi) = -3$) $\Rightarrow y_2(x) = 4\cos x + 3\sin x + 2$

7. (a) $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, $y'(x) = C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x) \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
comme $W(x_0) := \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$, on a $C_1 = \frac{-y_2(x_0)}{W(x_0)}$, $C_2 = \frac{y_1(x_0)}{W(x_0)}$
$\Rightarrow y(x; x_0, \vec{e_2}) = \frac{1}{W(x_0)}[y_1(x_0)y_2(x) - y_2(x_0)y_1(x)]$
$\Rightarrow \ell(x,\xi) = \frac{1}{a_0(\xi)W(x_0)}[y_1(\xi)y_2(x) - y_2(\xi)y_1(x)]$
Rappel : $\vec{e_2} = (0,1)$

(b) $y(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$ avec
$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{a_0(x)} \end{pmatrix}$ où $a_0(x) \neq 0 \forall x \in I$
Comme $W(x) \neq 0 \forall x \in I$ on a :
$v_1'(x) = -\frac{1}{a_0(x)W(x)}y_2(x)f(x)$, $v_2'(x) = \frac{1}{a_0(x)W(x)}y_1(x)f(x)$
$\Rightarrow v_1(x) = -\int_{x_0}^x \frac{y_2(\xi)f(\xi)}{a_0(\xi)W(\xi)}d\xi$, $v_2(x) = \int_{x_0}^x \frac{y_1(\xi)f(\xi)}{a_0(\xi)W(\xi)}d\xi$ avec $v_1(x_0) = v_2(x_0) = 0$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{1}{a_0(x)W(x)}[y_2(x)y_1(\xi) - y_1(x)y_2(\xi)]f(\xi)d\xi \\
&= \int_{x_0}^{x} \ell(x,\xi)f(\xi)d\xi
\end{aligned}$$

Comme de plus on a $y_p(x_0) = 0$ et $y_p'(x) = v_1(x)y_1'(x)+v_2(x)y_2'(x)$ (car $v_1'(x)y_1(x)+v_2'(x)y_2(x) = 0$)

$\Rightarrow y_p'(x_0) = 0$.

D'où $y_p(x) = y(x; x_0, \vec{0}, f)$