Corrigé Séance 2 : Systémes différentiels et équations d'Euler non-homogènes.

Equations d'Euler non-homogènes.

I. 1) $x = \epsilon e^t \Rightarrow \ddot{z} - 2\dot{z} + z = 8\epsilon e^t \Rightarrow z(t) = e^t(C_1 t + C_2) + 4\epsilon t^2 e^t$

$\Rightarrow y(x) = \begin{cases} x(C_1 \ln x + C_2) + 4x(\ln x)^2 \text{ pour } x > 0 \\ x(C_3 \ln(-x) + C_4) + 4x(\ln(-x))^2 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$

2) Posons $X = x - 2$ et $Y(X) = y(X+2)$, l'équation devient :$X^2 Y'' + 3XY' + 4Y = X + 2$

Avec $X = \epsilon e^t$, on a : $\ddot{z} - 4\dot{z} + 4z = \epsilon e^t + 2$

$\Rightarrow z(t) = e^{2t}(C_1 t + C_2) + \epsilon e^t + 0,5$

$\Rightarrow y(x) = \begin{cases} (x-2)^2(C_1 \ln(x-2) + C_2) + x - 1,5 \text{ pour } x > 2 \\ (x-2)^2(C_3 \ln(2-x) + C_4) + x - 1,5 \text{ pour } x < 2 \end{cases}$

3) $x = e^t \Rightarrow \ddot{z} - \dot{z} - 2z = \sin t \Rightarrow z(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + \frac{1}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t$

$y(x) = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x} + 0,1\cos(\ln x) - 0,3\sin(\ln x)$, $x > 0$

4) $x^2 y'' - 2y = 6\frac{\ln x}{x}$, $x > 0$, $x = e^t \Rightarrow \ddot{z} - \dot{z} - 2z = 6te^{-t}$

$\Rightarrow z(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} - t(t + \frac{2}{3})e^{-t}$

$\Rightarrow y(x) = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x} - \frac{\ln x}{x}(\ln x + \frac{2}{3})$, $x > 0$

II. 1) $y(x) = Ax + Bx^2$ pour $x \in \mathbb{R} \Rightarrow y'(x) = A + 2Bx$, $y(0) = A = 0$,$y'(0) = A = 0$,$\Rightarrow A = 0$, il existe une infinité de solutions satisfaisant à $y(0) = y'(0) = 0$: $y(x) = Bx^2$

2) $y(x) = Ax + Bx^2 + x^3$ pour $x \in \mathbb{R}$

$y(0) = y'(0) = 0$, $\Rightarrow A = 0$, $\Rightarrow y(x) = Bx^2 + x^3$

3) $y(x) = Ax^2 + Bx^3$ pour $x \in \mathbb{R}$, $y(0) = y'(0) = 0$, il existe une double infinité (∞^2) de solutions satisfaisant à $y(0) = y'(0) = 0$

4) $y(x) = Ax^2 + Bx^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$, $y' = 2Ax + 3Bx^2 + 1$ comme $y'(0) = 1$, il n'y a pas de solution satisfaisant à $y(0) = y'(0) = 0$.

Remarque : Dans tous ces exemples, on voit qu'il n'y a pas "existence et unicité" de solution au problème de Cauchy au point $x_0 = 0$, car $x_0 = 0$ est un **point singulier** ($a_0(0) = 0$).

Systèmes différentiels

I. A_1) La matrice étant diagonale on trouve facilement que

$$\exp A_1 t = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix},$$

A_2) D'abord remarquons que

$$(A_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a aussi :

$$(A_2)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On déduit donc facilement que $(A_2)^{2n} = (-1)^n I$ et $(A_2)^{2n+1} = (-1)^n A_2$. Par conséquent $\{\exp(A_2 t)\}_{11}$ et $\{\exp(A_2 t)\}_{22}$ ne contient que des puissances paires de t et

$$\{\exp(A_2 t)\}_{11} = \{\exp(A_2)t\}_{22} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} = \cos(t).$$

Le terme $\exp(A_2t)_{21} = -\exp(A_2t)_{21}$ et $\exp(A_2t)_{21} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n+1} = \sin(t)$. Donc

$$\exp(A_2t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

A_3) Comme précédemment on calcul $(A_3)^2$:

$$(A_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

On en déduit que pour $n \neq 0$, $(A_3)^n = (-4)^{n-1}A_3$. Donc

$$\exp(A_3t) = I + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-4)^{n-1}}{(n)!} t^n A_3 = I - \frac{e^{-4t} - 1}{4} A_3.$$

A_4) On remarque d'abord que :

$$(A_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $(A_4)^3 = 0$, il n'y a donc que 3 termes dans l'exponentielle :

$$\exp(A_4t) = I + A_4 + \frac{(A_4)^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II. 1) On pose $z = y'$ et on obtient $z' = -4z$. Donc l'équation se réduit au système :

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

2) On a $z_0 = y$ $z_1 = y'$, $z_2 = z_1' = y''$ $z_2' = 6z_2 - 9z_1$, donc :

$$\begin{pmatrix} z_0' \\ z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

3) $z = \dot{y}$ et $\dot{z} = -2z + 8y + e^t$, donc :

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

III. 1) On a déjà calculer $\exp(At)$ (cfr I.3). On trouve :

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(1 - e^{-4t}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{pmatrix}$$

On en déduit que la solution est $X(t) = \frac{1}{4}(1 - e^{-4t})$ et $Y(t) = -e^{-4t}$

2) Ici la matrice est inversible et donc diagonalisable. On sait que $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$ (pourquoi ?). Il suffit de trouver la matrice dont les vecteurs propres ainsi que son inverse. On calcul facilement que les valeurs propres sont 2 et -4. Les vecteurs propres sont quant à eux $(a, 2a)$ et $(a, -4a)$ avec $a \in \mathbb{R}_0$. Donc la matrice de changement de coordonnées est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

On calcul ensuite aisément son déterminant $\det(P) = 6$ ainsi que son inverse :

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Puisque la diagonalisée de A est :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

on calcule :

$$\begin{aligned} \exp(At) = P\exp(D)P^{-1} &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4e^{2t} + 2e^{-4t} & e^{2t} - e^{-4t} \\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} & 2e^{2t} + 4e^{-4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc la solution au problème est :

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4e^{2t} + 2e^{-4t} & e^{2t} - e^{-4t} \\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} & 2e^{2t} + 4e^{-4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{pmatrix}$$

Comme $X(0) = 1$ et $Y(0) = -4$, on a $X(t) = e^{-4t}$ et $Y(t) = -4e^{-4t}$ comme il se doit.