Equation différentiels à coefficients constants.

I. 1) $2y'' - 5y' + 2y = 0$
Racines du polynôme caractéristique : 2, $\frac{1}{2}$.
Solution générale : $y(x) = Ae^{2x} + Be^{\frac{x}{2}} \quad A, B \in \mathbb{R}$

2) $y'' + 4y = 0$
Racines du polynôme caractéristique : $2i$ et $-2i$.
Solution générale : $y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) \quad A, B \in \mathbb{R}$

3) $y^{(4)} + 4y'' + 3y = 0$
Racines du polynôme caractéristique : i, $-i$ et $\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i$
Remarque : pour résoudre $r^4 + 4r^2 + 3 = 0$, poser $t = r^2$).
Solution générale : $y(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + C\cos(\sqrt{3}x) + D\sin(\sqrt{3}x) \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$

4) $y''' - 2y'' - 7y' - 4y = 0$
Racines du polynôme caractéristique : -1,-1 et 4.
Solution générale : $y(x) = (Ax + B)e^{-x} + Ce^{4x} \quad A, B, C \in \mathbb{R}$

5) $y^{(5)} - y^{(4)} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0$
Racines du polynôme caractéristique : 1,i,i,$-i$ et $-i$.
Solution générale : $y(x) = Ae^{x} + (Bx + C)\cos(x) + (Dx + E)\sin(x) \quad A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$

6) $y''' + 9y'' + 28y' + 30y = 0$
Racines du polynôme caractéristique : -3,$-3 + i$ et $-3 - i$.
Solution générale : $y(x) = Ae^{-3x} + Be^{-3x}\cos(x) + Ce^{-3x}\sin(x) = e^{-3x}(A + B\cos(x) + C\sin(x)) \quad A, B, C \in \mathbb{R}$

7) $y''' - 6y'' + 9y' = 0$
Racines du polynôme caractéristique : 0,3 et 3.
Solution générale : $y(x) = A + (B + Cx)e^{3x}) \quad A, B, C \in \mathbb{R}$

8) $y^{(5)} - 2y^{(4)} - 16y' + 32y = 0$
Racines du polynôme caractéristique : -2,2, 2, $2i$ et $-2i$.
Solution générale : $y(x) = (A + Bx)e^{2x} + Ce^{-2x} + D\cos(2x) + E\sin(2x)) \quad A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$

II. Calculer la solution sous forme réelle des problémes différentiels suivants :

1) $y'' - 2y' = P(D)y = e^{x}\sin x$
On pose $y(x) = e^{x}z(x)$
$P(D) = D^2 - 2D$, donc $P(D + 1) = (D + 1)^2 - 2(D + 1) = D^2 - 1$
On doit donc résoudre : $(D^2 - 1)z = z'' - z = \sin(x)$
SGEH : $z(x) = Ae^{x} + Be^{-x} \quad A, B \in \mathbb{R}$
SPEnH : Cherchons-la sous la forme $z(x) = C\sin(x) + D\cos(x)$.
On a alors : $z'(x) = C\cos(x) - D\sin(x)$ et $z''(x) = -C\cos(x) - D\sin(x)$.
RemplaÁons ces expressions dans l'EnH, on obtient : $-2C = 1$ et $D = 0$, d'o˘ $C = -\frac{1}{2}$.
$z(x) = -\frac{1}{2}\sin(x)$ est donc une SPEnH.
Donc la SGEnH est $y(x) = Ae^{2x} + B - \frac{e^x}{2}\sin(x) \quad A, B \in \mathbb{R}$
Pour le probléme de Cauchy $y(0) = 1 \quad y'(0) = \frac{3}{2}$, on trouve la solution : $y(x) = e^{2x} - \frac{e^x}{2}\sin(x)$

2) $y'' - 2y' + 2y = e^{x}(x + \sin x)$
Posons $y(x) = e^{x}z(x)$, $\quad P(D) = D^2 - 2D + 2$, donc $P(D + 1) = (D + 1)^2 - 2(D + 1) + 2 = D^2 + 1$
On doit donc résoudre : $(D^2 + 1)z = z'' + z = x + \sin(x)$
SGEH : $y(x) = A\cos(x) + B\sin(x) \quad A, B \in \mathbb{R}$
Trouvons une solution de l'équation $z" + z = x$: on pose $z(x) = Cx + D$, on introduit dans l'équation et on obtient $C = 1$ et $D = 0$, c'est-à-dire $z(x) = x$
Pour l'équation $z" + z = \sin(x)$, on pose $z(x) = x(E\sin(x) + F\cos(x))$, on introduit dans l'équation et on trouve $F = \frac{-1}{2}$, $E = 0$, d'o˘ la solution $z(x) = \frac{-x\cos(x)}{2}$

Donc la SGEnH est : $z(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + x + \frac{-x\cos(x)}{2} \quad A, B \in \mathbb{R}$.
Le probléme de Cauchy $y(\pi) = y'(\pi) = 0$, devient, pour $z(x) = e^{-x}y(x)$:
$z(\pi) = e^{-\pi}y(\pi) = 0$, c'est-à-dire $z(\pi) = 0$
Comme $z'(x) = e^{-x}(y'(x) - y(x))$, on a : $z'(\pi) = e^{-\pi}(y'(\pi) - y(\pi)) = 0$
On trouve alors : $A = \frac{3\pi}{2}$ et $B = \frac{3}{2}$

3) $y'' - 4y' + 5y = xe^x \sin 2x$
$P(D) = D^2 - 4D + 5$, donc $P(D+1) = (D+1)^2 - 4(D+1) + 5 = D^2 - 2D + 2$
Posons $y(x) = e^x z(x)$
On a alors à résoudre : $P(D+1)z(x) = x\sin(2x)$
La SGEH de cette équation est $z(x) = e^x(A\cos(x) + B\sin(x)) \quad A, B \in \mathbb{R}$
Une SPEnH peut être trouvée en supposant que la fonction z est de forme $z(x) = (Cx + D)\sin(2x) + (Ex + F)\cos(2x)$ (Méthode des coefficients indéterminés). On trouve $C = \frac{-1}{10}$, $D = \frac{-11}{50}$, $E = \frac{1}{5}$ et $F = \frac{1}{25}$
Donc une SPEnH est : $z(x) = (\frac{-x}{10} + \frac{-11}{50})\sin(2x) + (\frac{x}{5} + \frac{1}{25})\cos(2x)$
On a alors la SGEnH : $y(x) = e^{2x}(A\cos(x) + B\sin(x)) + e^x(\frac{-x}{10} + \frac{-11}{50})\sin(2x) + (\frac{x}{5} + \frac{1}{25})\cos(2x) \quad A, B \in \mathbb{R}$
La solution du probléme de Cauchy $y(0) = 0, y'(0) = -\frac{7}{25}$ est : $y(x) = e^{2x}\frac{-\cos(x)}{25} + e^x(\frac{-x}{10} + \frac{-11}{50})\sin(2x) + (\frac{x}{5} + \frac{1}{25})\cos(2x)$

4) $y''' - 2y'' - 7y' - 4y = (30x - 26)e^{-x}$
A résoudre : $P(D)y = (30x - 26)e^{-x}$ avec $P(D) = (D+1)^2(D-4)$
Posons $y(x) = e^{-x}z(x)$, on a alors : $P(D-1) = (D)^2(D-5)$
On a donc : $P(D-1)z = z''' - 5z'' = (30x - 26)$
La SGEH est : $z(x) = (Ax + B) + Ce^{5x} \quad A, B, C \in \mathbb{R}$
Recherche d'une SPEnH par la méthode des coefficients indéterminés : $z(x) = x^2(Dx + E) = Dx^3 + Ex^2$, on trouve : $D = -1$ et $E = 2$, donc $z(x) = -x^3 + 2x^2$.
On a donc la SGEnH en z : $z(x) = (Ax + B) + Ce^{5x} - x^3 + 2x^2 \quad A, B, C \in \mathbb{R}$
Et donc la SGEnH $y(x) = e^{-x}(Ax + B - x^3 + 2x^2) + Ce^{4x} \quad A, B, C \in \mathbb{R}$
Le probléme de Cauchy $y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 29$ est plus facile à traiter pour la fonction z :
$z(x) = y(x)e^x$ et $y(0) = 0$ donc $z(0) = 0$
$z'(x) = (y(x) + y'(x))e^x$ donc $z'(0) = 0$
$z''(x) = (y(x) + 2y'(x) + y''(x)e^x$ donc $z''(0) = (y(0) + 2y'(0) + y''(0))e^0 = 29$
On trouve : $A = -5$, $B = -1$ et $C = 1$
La solution du probléme de Cauchy est : $y(x) = e^{-x}(-5x - 1 - x^3 + 2x^2) + e^{4x}$

Equations d'Euler Homogénes

1. (a) Posons $x = \epsilon e^t$ avec $\epsilon = \begin{cases} 1 \text{ pour } x > 0 \\ -1 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$, $z(t) = y(\epsilon e^t)$
$\Rightarrow xy'(x) = \dot{z}(t)$, $x^2y''(x) = \ddot{z}(t) - \dot{z}(t)$, pour $x \neq 0$.
On a donc : $\ddot{z} - 5\dot{z} + 6z = 0 \Rightarrow r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow z(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} \Rightarrow y(x) = Ax^2 + Bx^3$
Autre méthode :
On pose $y(x) = \begin{cases} x^r \text{ pour } x > 0 \\ (-x)^r \text{ pour } x < 0 \end{cases} \Rightarrow$ Equation indicielle : $r(r-1) - 4r + 6 = 0$
$\Rightarrow r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = 3 \Rightarrow y(x) = Ax^2 + Bx^3, \forall x \in \mathbb{R}$

(b) On pose $y(x) = (\epsilon x)^r$ avec $\epsilon = \begin{cases} 1 \text{ pour } x > 0 \\ -1 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$.
Equation indicielle : $r(r-1) - r - 3 = 0 \Rightarrow r^2 - 2r - 3 = 0 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = 3$
$\Rightarrow y(x) = \begin{cases} \frac{C_1}{x} + C_2x^3 \text{ pour } x > 0 \\ \frac{C_3}{x} + C_4x^3 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$
On ne peut pas dire que $y = \frac{A}{x} + Bx^2$ est la solution générale de l'équation sur $]-\infty, \infty[$ car $y_1(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas définie en $x = 0$.

(c) $y(x) = \begin{cases} C_1\sqrt{x} + C_2x \text{ pour } x > 0 \\ C_3\sqrt{-x} + C_4x \text{ pour } x < 0 \end{cases}$

On ne peut pas dire que $y = A\sqrt{|x|} + Bx$ est la solution générale de l'équation sur $]-\infty, \infty[$ car $y_1(x) = A\sqrt{|x|}$ n'est pas dérivable en $x = 0$.

(d) On pose $y(x) = (\epsilon x)^r$ avec $\epsilon = \begin{cases} 1 \text{ pour } x > 0 \\ -1 \text{ pour } x < 0 \end{cases} \Rightarrow (r-1)^2 = 0.$
$\Rightarrow r_1 = r_2 = 1 \Rightarrow y_1(x) = x,\ x \in \mathbb{R}.$
Pour obtenir une deuxiËme solution linéairement indépendante de y_1, utilisons l'autre méthode,
$x = \epsilon e^t,\ z(t) = y(\epsilon e^t)$
$\Rightarrow \ddot{z} - 2\dot{z} + z = 0 \Rightarrow z(t) = e^t(C_1 t + C_2)$
$\Rightarrow y(x) = \begin{cases} x(C_1 \ln x + C_2) \text{ pour } x > 0 \\ x(C_3 \ln(-x) + C_4) \text{ pour } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y_2(x) = x \ln x \\ y_2(x) = -x \ln(-x) \end{array}$
On ne peut pas dire que $y_2(x) = |x| \ln |x|$ est une solution de l'équation différentielle sur $]-\infty, \infty[$ car $y_2(x)$ n'est pas dérivable en $x = 0$.

(e) $y(x) = \begin{cases} C_1 \cos(2\ln x) + C_2 \sin(2\ln x) \text{ pour } x > 0 \\ C_3 \cos(2\ln(-x)) + C_2 \sin(2\ln(-x)) \text{ pour } x < 0 \end{cases}$
car $(x)^{2i} = (e^{\ln x})^{2i} = (e^{2i\ln x}) = \cos(2\ln x) + i\sin(2\ln x),\ x > 0.$

(f) On pose $y(x) = (\epsilon x)^r$ comme précédemment, $r(r-1)(r-2) + 0r(r-1) + r - 1 = 0, \Rightarrow (r-1)^3 = 0,\ r_1 = r_2 = r_3 = 1$
$\Rightarrow y(x) = \begin{cases} x(C_1 + C_2 \ln x + C_3(\ln x)^2) \text{ pour } x > 0 \\ x(C_4 + C_5 \ln(-x) + C_6(\ln(-x))^2)) \text{ pour } x < 0 \end{cases}$
Autre méthode :
$x = \epsilon e^t, z(t) = y(\epsilon e^t) \Rightarrow xy'(x) = \dot{z}(t),\ x^2 y''(x) = \ddot{z}(t) - \dot{z}(t)$
$x^3 y'''(x) = D(D-1)(D-2)z(t)$ avec $D = \frac{d}{dt}$
$\Rightarrow \dddot{z} - 3\ddot{z} + 3\dot{z} - 1 = 0 \Rightarrow z(t) = e^t(C_1 + C_2 t + C_3 t^2)$
Remarque : on a l'analogie pour $x > 0$:

$e^{r_0 t}$	$\longleftrightarrow$	x^{r_0}
$te^{r_0 t}$	$\longleftrightarrow$	$(\ln x)x^{r_0}$
$t^2 e^{r_0 t}$	$\longleftrightarrow$	$(\ln x)^2 x^{r_0}$
	pour r_0 racine triple de l'équation :	
caractéristique	$\longleftrightarrow$	indicielle