Exercices d'analyse BAII : premier quadrimestre.

Année académique 2011-2012

Table des matières

Première partie

Equations différentielles.

Chapitre 1

Equations différentielles linéaires à coefficients constants et équations d'Euler homogènes.

1.1 Equation différentiels à coefficients constants.

Rappels : L'équation caractéristique de l'équation différentielle homogènes à coefficients constants :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{1.1}$$

est donnée par :

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

D'abord si les racines du polynôme caractéristique $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont toutes distinctes la solution générale de (1.1) est :

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}. \tag{1.2}$$

Ensuite, supposons qu'une des racines, disons λ_j, soit de multiplicité $k > 1$. Alors l'ensemble des solutions fondamentales associée à λ_j est : $x^{k-1}e^{\lambda_j x}$, $x^{k-2}e^{\lambda_j x}, \ldots, xe^{\lambda_j x}$, $e^{\lambda_j x}$.

Par conséquent dans le cas général, si $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont des racines du polynôme caractéristique de multiplicité respective $\mu_1, \ldots, \mu_p$, avec $\sum_i \mu_i = n$, la solution s'écrit :

$$P_{\mu_1}(x)e^{\lambda_1 x} + P_{\mu_2}(x)e^{\lambda_2 x} + \cdots + P_{\mu_p}(x)e^{\lambda_p x} \tag{1.3}$$

où les P_{μ_i} sont des polynômes de degré $\mu_i - 1$

Exercices.

I. Calculer la solution générale sous forme réelle des équations différentielles suivantes :

1) $2y'' - 5y' + 2y = 0$
2) $y'' + 4y = 0$
3) $y^{(4)} + 4y'' + 3y = 0$
4) $y''' - 2y'' - 7y' - 4y = 0$
5) $y^{(5)} - y^{(4)} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0$
6) $y''' + 9y'' + 28y' + 30y = 0$
7) $y''' - 6y'' + 9y' = 0$
8) $y^{(5)} - 2y^{(4)} - 16y' + 32y = 0$

II. Calculer la solution, sous forme réelle, des problèmes différentiels suivants :

1) $y'' - 2y' = e^x \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{3}{2}$
2) $y'' - 2y' + 2y = e^x(x + \sin x), \quad y(\pi) = y'(\pi) = 0$
3) $y'' - 4y' + 5y = xe^x \sin 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{7}{25}$
4) $y''' - 2y'' - 7y' - 4y = (30x - 26)e^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 29$

Conseil : Pour une équation de la forme $P(D)y(x) = e^{\alpha x}F(x)$, poser $y(x) = e^{\alpha x}z(x)$.

Notation : Si $P(D) = D^3 - D^2 - 4D + 4$, alors $P(D+2) = (D+2)^3 - (D+2)^2 - 4(D+2) - 4$.

Exercices supplémentaires :

1) Calculer le noyau de l'opérateur différentiel :

$$L : C^4(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}) : y \to D^4y + 2D^3y + 3D^2y + 2Dy + y.$$

2) Résoudre les problèmes suivants :

a. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 2x^2 - 4x - 1 + (2x^2 + 5x + 1)e^{2x}$
$y(0) = 3, y'(0) = 1, y''(0) = 10$

b. $y'' - y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

c. $y''' - 7y'' + 10y' = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b, \quad y''(0) = c$

1.2 Equations d'Euler Homogènes

Rappels : On ne considère que des équations d'Euler du deuxième ordre[1] :

$$ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0 \qquad \text{pour } x > 0$$

<u>1ère méthode</u> on pose $x = e^t, z(t) = y(e^t)$; on obtient

$$[aD(D-1) + bD + c]\, z(t) = 0$$

<u>2ème méthode</u> on recherche une solution de la forme $y(x) = x^r$; on obtient l'équation indicielle

$$a\ r(r-1) + b\ r + c = 0$$

Exercices

I. Calculer la solution générale des équations suivantes :

1) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$
2) $x^2y'' - xy' - 3y = 0$
3) $2x^2y'' - xy' + y = 0$
4) $x^2y'' - xy' + y = 0$
5) $x^2y'' + xy' + 4y = 0$
6) $x^3y''' + xy' - y = 0$

1. La méthode se généralise facilement à un ordre quelconque.

Chapitre 2

Systèmes différentiels et équations d'Euler non-homogènes.

2.1 Equations d'Euler non-homogènes :

I. Calculer la solution général des équations suivantes :

1) $x^2y'' - xy' + y = 8x$
2) $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$
3) $x^2y'' - 2y = \sin(\ln x)$, $x > 0$
4) $x^3y'' - 2xy = 6\ln x$, $x > 0$

II. Résoudre les problèmes suivants : $y(0) = y'(0) = 0$.

1) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$
2) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$
3) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$
4) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x$

2.2 Systèmes différentiels

Rappels :

A. Exponentielle d'une matrice : Soit $A \in \mathfrak{Mat}(n \times n)$ une matrice. On définit l'exponentielle de A par :

$$e^A = \mathrm{Id} + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

n.b. : si la matrice A est nilpotente la série précédente devient une somme finie (pourquoi ?).

B. Réduction d'équations différentielles linéaires à un système du premier ordre : On considère l'équation différentielle linéaire [1] non-homogène suivante :

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{n-1}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x) = f(x). \tag{2.1}$$

En posant :

$$\begin{cases} z_0 & = y, \\ z_2 & = y', \\ & \vdots \\ z_{n-1} & = y^{(n-1)} \end{cases}$$

l'équation (2.1) peut se réduire à un système d'équations différentielles du premier ordre. On a :

$$\begin{aligned} z_0' =& z_1, \\ z_1' =& z_2, \\ & \vdots \\ z_{n-1}' =& -a_0 z_0 - a_1 z_1 - \cdots - a_{n-1} z_{n-1} + f \end{aligned}$$

On peut alors écrire :

$$\mathbf{z}' = A\mathbf{z} + F \tag{2.2}$$

avec $z = (z_0, \ldots, z_{n-1})$, $F = (0, \ldots, f)$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. On ne suppose pas que les coefficients sont constants.

C. Résolution du système (2.2) dans un cas simple : Si la matrice A est à coefficients constants, on résout d'abord le système homogène associé en posant :

$$\mathbf{z}(x) = e^{Ax}\mathbf{c}, \tag{2.3}$$

avec $\mathbf{c} = (c_0, \ldots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Il suffit de calculer e^{Ax} Ensuite on trouve une solution particulière.

<u>**Exercices :**</u>

I. Soit $t \in \mathbb{R}$ un paramètre réel. Calculer e^{At} pour chacune des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$
$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II. Réduire les équations différentielles suivantes à un système du premier ordre :

1) $D^2y + 4Dy = 0$,
2) $D^3y - 6D^2y + 9Dy = 0$,
3) $\ddot{y} + 2\dot{y} - 8y = e^t$,

III. Résoudre les systèmes suivants :

1)
$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2)
$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

VI. Exercices supplémentaires :

1) Reprendre les exercices de la première séance et réduire les équations différentielles à des systèmes différentiels d'ordre 1.
2) Reprendre les matrices que vous avez trouvé au point 1) et calculez e^{At}.
3) Résoudre les problèmes différentiels de la première séance (ex II.) en réduisant les équations différentielles à des systèmes différentiels. Vérifier que vous obtenez les mêmes réponses.

Chapitre 3

Fonction de Lagrange.

3.1 Equations différentielles linéaires non homogènes, fonction de Lagrange

Soient

$$[P(D)y](x) := a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y(x)\ ,\ x \in I \subseteq \mathbb{R}$$
$$\vec{y}(x) := (y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n-1)}(x))\ ,\ \vec{c} := (c_1, c_2, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n$$

Si les fonctions f, a_i sont continues sur l'intervalle I et $a_0(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$,
alors le problème de Cauchy

$$P(D)y(x) = f(x) \tag{3.1}$$
$$\vec{y}(x_0) = \vec{c} \tag{3.2}$$

possède $\forall x_0 \in I, \quad \forall \vec{c} \in \mathbb{R}^n$, une et une seule solution notée $y(x; x_0, \vec{c}, f)$.

Pour l'équation homogène

$$P(D)y = 0 \qquad\qquad (3)$$

on pose pour la suite

$$y(x; x_0, \vec{c}) = y(x; x_0, \vec{c}, 0)$$

I. a) $\vec{y}(x_0; x_0, \vec{c}, f) =$??

b) $\vec{y}(u; u, \vec{c}, f) =$?? , $u \in I$

II. Démontrer que

1) $y(x; x_0, \vec{c}, f) = y(x; x_0, \vec{c}) + y(x; x_0, \vec{0}, f)$

2) si l'équation homogène (3) est à coefficients constants, on a

$$y(x; x_0, \vec{c}) = y(x - x_0; 0, \vec{c})$$

<u>Application :</u> pour $y'' + y = 0$, calculer $y(x; 3, \vec{c})$ où $\vec{c} = (1, 2)$.

III. Démontrer la formule de Lagrange $y(x; x_0, \vec{0}, f) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \ell(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (4)$

où la fonction de Lagrange $\ell(x, \xi)$ de $P(D)$ est l'unique solution du problème de Cauchy

$$P(D)y = 0 \quad y(\xi) = y'(\xi) = \cdots y^{(n-2)}(\xi) = 0, y^{(n-1)}(\xi) = \frac{1}{a_0(\xi)}$$

<u>Indication :</u> pour calculer les dérivées de $z(x) := \displaystyle\int_{x_0}^{x} \ell(x, \xi) f(\xi) d\xi$ utiliser la formule

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} F(x, \xi) d\xi = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial F}{\partial x}(x, \xi) d\xi + F(x, \beta(x))\beta'(x) - F(x, \alpha(x))\alpha'(x)$$

IV. Si l'équation homogène (3) est à coefficients constants, démontrer que

$$\ell(x, \xi) = \ell(x - \xi, 0)$$

V. Calculer la fonction de Lagrange pour $P(D)y =$

1) $y'' + \omega^2 y$, $\omega \neq 0$

2) $y'' - 2ay' + a^2 y$, $a \neq 0$

3) $y^{(n)}$

4) $(D - a)(D - b)(D - c)y$ avec $a \neq b, a \neq c,$ et $b \neq c$

VI. Résoudre le problème de Cauchy

$$y'' + \omega^2 y = f \ , \ y(x_0) = a \ , \ y'(x_0) = b \qquad \text{où } \omega \neq 0 \quad \text{et} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Utiliser 2)a), 2)b), 3) et 5)a).

<u>Application :</u> $x_0 = 0$

	$a =$	$b =$	$\omega =$	$f(x) =$
a)	2	1	1	3
b)	-1	0	2	e^x
c)	0	0	1	$\sec x$
d)	0	0	$\neq 0$	$\sin \Omega x$
e)	2	3	1	$\begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x < \pi \\ 2 & \text{pour} \quad x \geq \pi \end{cases}$

VII. Pour $n = 2$ c'est-à-dire $[P(D)y](x) := a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x)$

a) Calculer la fonction de Lagrange $\ell(x, \xi)$ à l'aide d'un système fondamental de solutions $\{y_1, y_2\}$ de l'équation homogène (3).

b) Retrouver la formule de Lagrange (4) en calculant $y(x; x_0, \vec{0}, f)$ par la méthode de variation des constantes de Lagrange.

3.2 Fonction de Lagrange (Suite) :

I. Pour tout $y \in C^2(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R})$, soit

$$Ly := y'' + \frac{2y'}{x}$$

(a) L'opérateur L est-il linéaire ? Justifier.

(b) Calculer la fonction de Lagrange $\ell(x, \xi)$ de L

II. (a) Calculer la fonction de Lagrange de l'équation d'Euler

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

(b) Montrer que le problème

$$\begin{cases} x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) &= x^3g(x) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$$

possède au moins une solution (où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue)

(c) En déduire toutes les solutions du problème

$$\begin{cases} x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) &= 2x^3 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$$

III. Résoudre les problèmes suivants :

1)

$$\left\{\begin{array}{rcl} y''(x) - y'(x) & = & e^x \\ y(0) & = & 2 \\ y'(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

2)

$$\left\{\begin{array}{rcl} y''(x) - y(x) & = & f(x) \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

où $f = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{array}\right.$

3) Janvier 2008

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2y''(x) - 2xy'(x) - 4y(x) & = & x^6 \\ y(1) & = & 2 \\ y'(1) & = & 3 \end{array}\right.$$

Pour $x \in \mathbb{R}_0^+$.

Deuxième partie

Suites et séries de fonctions.

Chapitre 4

Séries Numériques.

4.1 Séries réelles :

<u>**Rappels :**</u> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres (réels ou complexes). Une *série* numérique de *terme général* u_n est une suite de la forme $s_k = \sum_{n=0}^{k} u_n$.

A. La série géométrique : Une *série géométrique* est une série dont le terme général u_n est de la forme q^n avec $q \in \mathbb{C}$. On montre aisément que s_n est alors égale à $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. La suite géométrique converge ssi $|q| < 1$.

B. Séries à termes positifs : Une série $s_n = \sum_k u_k$ est dite à termes positifs si $u_k \geq 0$ pour tout k. Pour qu'une série à termes positifs $S = \sum_{n\geq a} u_n$ converge il faut et il suffit que la suite de ses sommes partielles $(s_n)_{n\geq a}$ soit bornée. La limite de la série vaut alors le supremum de l'ensemble $(s_n)_{n\geq a}$.

C. Les séries $\sum_k \frac{1}{n^s}$: Soit $s \in \mathbb{R}_0^+$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge si $s > 1$ et diverge si $s \leq 1$.

D. Critère de comparaison : Soit $T = \sum_n b_n$ une série. Supposons que les termes généraux (u_n) d'une autre série S vérifie $|u_n| < b_n$ pour tout n. On dit alors que la série S *domine* la série T. La convergence de la série $\sum_n b_n$ implique celle de la série $\sum_n u_n$.

E. Critère de la racine (Cauchy) : Supposons que $\lim |u_n|^{1/n}$ converge vers une limite α. Alors :

- si $\alpha < 1$ **:** S converge absolument,

- si $\alpha > 1$ **:** S diverge,

-si $\alpha = 1$ **:** est un cas épineux qu'il faut traiter à part.

F. Critère du quotient (d'Alembert) : Si la limite $\alpha = \lim \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ existe dans $\bar{\mathbb{R}}^+$ alors :

-$\alpha < 1$ **:** la série converge absolument,

-$\alpha > 1$ **:** la série diverge,

-$\alpha = 1$ **:** est un cas épineux qu'il faut traiter à part.

G. Critère d'Abel : Soit $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$. Si :

1. La suite $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ est bornée, c'est-à-dire : $\sup\{|s_k|, k \in \mathbb{N}\} \leq M$.
2. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant.

Alors la série S est convergente.

Exercices :

I. 1) Les séries suivantes sont-elles à termes positifs ?

$$a)\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n}{100} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{100}{n} \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100-3n}{2n-999}$$

2) Les séries de l'exercice 1 vérifient-elles la condition nécessaire de convergence ?

II. Etudier la convergence des séries suivantes :

$$a)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2} \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!}$$

$$d)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad e)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \qquad f)\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n}$$

$$g)\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{100}{n} \qquad h)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n^3-2n+11}{13n^5+4n^4+n^3-2}$$

$$i)\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right) \qquad j)\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{2n+1}{2n-1}$$

ou $(2n+1)!! = 1.3.5.7\cdots(2n+1)$

III. Discuter en fonction du paramètre positif α la convergence des séries suivantes :

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha n+1} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\alpha^n}$$

$$c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}+1} \qquad d)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+\alpha}{n+1}\right)^{n^2}$$

IV. Etudier la convergence des séries suivantes :

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{100}{n} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$$

$$c)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \text{ où } \begin{cases} a_{2k} & = 0 \\ a_{2k+1} & = \dfrac{1}{4k+1} \end{cases}$$

V. Pour $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$ et $b_n = \dfrac{2}{1-4n}$, peut-on écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n + \sum_{n=1}^{\infty}b_n \quad ?$$

Commenter.

4.2 Séries complexes et séries entières réelles et complexes.

Rappels. Une *série entière* de variable complexe z est une série de la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

où (c_n) est une suite de nombres complexes. Le rayon de convergence d'une série entière est défini quant à lui par :

$$M = \sup\{r > 0 \text{ tel que la suite } (||c_n| r^n) \text{ soit bornée } \}$$

Exercices.

I. Etudier la convergence des séries complexes $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, avec $w_n =$

$$1)\ \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{i}{3^{n-1}} \qquad 2)\ \frac{1}{n} + \frac{i}{10^n} \qquad 3)\ \frac{n}{n+1} + i\frac{n+1}{n+2}$$

$$4)\ \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \qquad 5)\ \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n$$

II. Déterminer l'intervalle de convergence (sans oublier l'étude de la convergence aux extrémités) des séries entières

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad \text{avec } u_n(x) =$$

$$a)\ \frac{x^n}{n} \qquad b)\ \frac{(x-2)^n}{n^2} \qquad c)\ n!(x-5)^n \qquad d)\ \frac{x^n}{n!} \qquad e)\ \frac{x^{3n}}{10^n}$$

$$f)\ \frac{2^n x^{5n}}{2n-1} \qquad g)\ \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n} \qquad h)\ \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n} \qquad i)\ \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n!}$$

1. Déterminer le domaine de convergence des séries entières complexes

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \qquad \text{avec } u_n(z) =$$

$$a)\ \left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^n z^n \qquad b)\ \left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^n (z-i)^n \qquad c)\ \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n} \qquad d)\ \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$e)\ n! z^n \qquad f)\ \frac{z^{4n}}{n}$$

Chapitre 5

Suites et séries de fonctions.

5.1 Normes et convergence : suite et séries de fonctions.

Rappels :

A. Convergence simple : Soit $(f_n : D \in \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. La suite $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ converge *simplement* ou *ponctuellement* vers $f : D \to \mathbb{R}$ ssi pour tout $x \in D$ la suite (numérique) $f_n(x)$ converge vers $f(x)$. Cette notion de convergence est conceptuellement simple mais se comporte très mal au sens suivant :

- Il se peut que la fonction limite f ne soit pas continue bien que les f_n le soient.
- $\int \lim f_n \neq \lim \int f$.

B. Convergence uniforme : La suite (f_n) converge *uniformément* vers f si $\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)\|$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. La convergence uniforme est introduite pour palier les tares de la convergence simple :

- Si (f_n) est une suite de fonctions continues alors sa limite uniforme f, si elle existe, est continue,
- $\int \lim f_n = \lim \int f$,
- Si (f_n) est une suite de fonctions réels dérivables tel que :
  i) Df_n converge uniformément vers Df
  ii) il existe un x_0 pour lequel $f_n(x_0)$ converge vers $f(x_0)$.

Alors $\lim Df_n = D \lim f_n = Df$.

C. Convergence en Moyenne quadratique : Une suite de fonctions f_n converge en moyenne quadratique vers f si $\int \|f_n - f\|^2$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exercices

1. a) Calculer $\| \|_\infty$ et $\| \|_2$ pour les fonctions f_n définies sur $[0, 1]$, $(n \geq 1)$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 1 - nx & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

   b) Démontrer que $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\, \|f\|_\infty$ $\quad (f \in L^2([a, b]))$.

   c) En déduire que la convergence uniforme (en norme $\| \|_\infty$) d'une suite de fonctions f_n vers une fonction f entraîne la convergence en moyenne quadratique (en norme $\| \|_2$) de cette suite vers cette même fonction f (sur $[a, b]$).

   d) Vérifier l'inégalité pour les fonctions f_n de 1.a)

2. Etudier la convergence simple, uniforme et en moyenne quadratique des suites de fonctions f_n suivantes $(n \geq 1)$:

   a) f_n de l'exercice 1.a)

   b) $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto n^2 x e^{-nx}$

   c) $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} x - \dfrac{nx^2}{2} & 0 \leq x < \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{2n} & \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$

3. Enoncer le critère de Weierstrass concernant la convergence des séries de fonctions. En l'utilisant, démontrer que les séries suivantes convergent uniformément sur $\mathbb{R}$:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n(nx)}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{x^{2n} + n^3}$

4. Soit la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x(1-x^2)^{k-1}$.

   a) Calculer $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x(1-x^2)^{k-1}$.

   b) En déduire l'intervalle de convergence I et la somme $S(x)$ de cette série.

   c) Démontrer qu'il n'y a pas convergence uniforme de la série sur I.

   d) Démontrer qu'il y a convergence uniforme de la série sur $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

5. Déterminer le domaine de convergence de la série suivante : $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$

6. Soit la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ où $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \frac{1}{2^n} < x \leq \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

   a) Dessiner le graphe de $f_n(x)$ et de $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

   b) Etudier la convergence simple et uniforme de cette série sur $[0, 1]$.

5.2 Suites et séries de fonctions : propriétés.

1. (a) Relever dans l'exercice 2) de la séance précédente les suites de fonctions continues convergeant vers une fonction continue/discontinue.

   (b) Enoncer une propriété liée à vos observations.

   (c) La série de l'exercice 4) : $\sum_{k=1}^{\infty} x(1-x^2)^{k-1}$ converge-t-elle uniformément ? Sur quel intervalle ? Justifier (sans calculer la $\| \|_\infty$).

2. Pour les suites de l'exercice 2) de la séance précédente, calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ et $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$. Comparer. Enoncer une propriété liée à cette comparaison.

3. Soit la suite de fonctions $f_n(x)$:

$$f_n(x) : [0,1] \to \mathbb{R} : x \to f_n(x) = \begin{cases} x - \frac{nx^2}{2} & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \\ \frac{1}{2n} & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

   Calculer sa limite et la dérivée de cette limite ainsi que la limite de la suite des dérivées. Que constatez-vous ? Justifier.

Exercice supplémentaire : Sachant que l'équation différentielle

$$y'' - xy' + 2y = 0$$

possède une solution générale de la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, calculer cette solution.

Troisième partie

Intégrales Généralisées et Règle de Leibniz

Intégrales généralisées.

1. En utilisant la définition d'une intégrale généralisée, vérifier si les intégrales suivantes sont convergentes. Si oui, calculer les.

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}$ c) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx \quad (a > 0)$

b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$

2. Pour chacune des fonctions $f(x)$ suivantes, déterminer n et $A(\neq 0)$, deux réels tels que $f(x) \sim \dfrac{A}{x^n}, \quad x \to \infty.$

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^3+1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3}$ c) $f(x) = \dfrac{xe^{\frac{1}{x}} - x + 1}{x-1}$

3. Etudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\,dx$ c) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}} - x + 1}{x-1}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\alpha}}\,dx$ d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx$

4. En utilisant la définition d'une intégrale généralisée, vérifier si les intégrales suivantes sont convergentes et calculer les.

a) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$ b) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

5. Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer n et $A(\neq 0)$, deux réels tels que $f(x) \sim \dfrac{A}{x^n}, \quad x \to 0.$

a) $f(x) = \ln(1+x)$ c) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - \cos x}$

b) $f(x) = 1 - \cos x$ d) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^{\frac{1}{3}})}{e^{\sin x} - 1}$

6. Etudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+x^{\frac{1}{3}})}{e^{\sin x}-1}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{e^x - \cos x}$ d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\ln(1+\sqrt{x})}\,dx$

Règle de Leibniz

7. Soit $y(x) = \int_0^x (e^{x-t} - 1)t^2 dt$. A l'aide de la formule de Leibniz, calculer y' et y'' et vérifier que y est la solution du problème

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) &= x^2 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$$

8. Soit $I(t)$ la fonction définie par $\iint_{D_t} (x^2+y^2)(t+1)ds$ où D_t est le disque de rayon t centré en l'origine. Calculer $I'(t)$ de deux manières différentes en utilisant la formule de Leibniz.

9. Soit $I(t)$ la fonction définie par $\iint_{D_t} xyds$ où D_t est le domaine délimité par les axes $x = 0$ et $y = 0$, la courbe $y = \sqrt{x}$ et la droite $x = t^3$, $t > 0$. Calculer $I'(t)$ de deux manières différentes en utilisant la formule de Leibniz.

Exercices supplémentaires. (examens janvier 2008, août 2008, août 2009) :
Pour chacune des intégrales suivantes, discuter la convergence en fonction du paramètre réel α :

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^\alpha}dx \qquad \int_2^\infty \frac{1}{(x^2-4)^\alpha}dx \qquad \int_1^\infty \frac{x^\alpha(1-\cos\frac{1}{x})}{x-(\frac{1}{3})^x}dx$$

Quatrième partie

Séries de Fourrier.

Séries de Fourier.

Rappel

La série de Fourier $S(x)$ d'une fonction périodique F de période T est donnée par :

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\} \quad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Les coefficients sont donnés par : $\left\{\begin{array}{lclll} a_0 & = & \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_c^{c+T} F(x)\ dx & & \\ a_n & = & \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_c^{c+T} F(x)\ \cos(n\omega x)\ dx & & n \in \mathbb{N}_0 \\ b_n & = & \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_c^{c+T} F(x)\ \sin(n\omega x)\ dx & & n \in \mathbb{N}_0 \end{array}\right.$ où c est un réel quelconque.

Exercices

1. Soit la fonction $f :]0, 2[\to \mathbb{R}, x \mapsto x$
   a) Combien y a-t-il de fonctions $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques de période 2 telles que $F(x) = f(x)$ pour $0 < x < 2$?
   b) Calculer $F(k), F(k + 0), F(k - 0)$ pour k entier
   c) Faire le graphe d'une fonction F
   d) Calculer la série de Fourier $S(x)$ d'une fonction F
   e) Déterminer les valeurs de x telles que $F(x) = S(x)$; pour les autres valeurs de x, calculer $F(x)$ et $S(x)$
   f) Faire le graphe des trois premières sommes partielles S_1, S_2, S_3 de S
2. Soit la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période 2π telle que

$$F(x) = \begin{cases} \pi & \text{si} \quad -\pi \leq x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

   On pose

$$F_p(x) = \frac{F(x) + F(-x)}{2} \text{ et } F_i(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2}$$

a) Faire les graphes des fonctions F, F_p, F_i

b) Déduire les séries de Fourier de F_p et F_i de celle de F

c) En utilisant l'égalité de Parseval, calculer

$$\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

où a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de F

3. Si une fonction périodique F de période T est *alternative* c'est-à-dire

$$F(x + \frac{T}{2}) = -F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a) Démontrer que $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(x)dx = 0$.

b) Si en plus elle est paire, démontrer que $F(-\frac{T}{4}) = F(\frac{T}{4}) = 0$.

4. Soit la fonction $f :]0, 2[\to \mathbb{R}, x \mapsto x$

a) Combien y-a-t-il de fonctions $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques de période 4 et alternatives telles que $F(x) = f(x)$ pour $0 < x < 2$?

b) Calculer $F(2k), F(2k+0), F(2k-0)$ pour k entier

c) Faire le graphe d'une fonction F

d) Calculer la série de Fourier $S(x)$ de F sachant que cette série ne contient que des harmoniques de rang impair.

5. Soit la fonction $f :]0,2[\to \mathbb{R}, x \mapsto x$
   a) Combien y-a-t-il de fonctions $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques de période 8, alternatives et paires telles que $F(x) = f(x)$ pour $0 < x < 2$?
   b) Calculer $F(2k), F(2k+0), F(2k-0)$ pour k entier
   c) Faire le graphe d'une fonction F
   d) Calculer la série de Fourier $S(x)$ de F, sachant que cette série de cosinus ne contient que des harmoniques de rang impair.

6. Démontrer les formules des coefficients de la série de Fourier d'une fonction F périodique lorsqu'elle est :
   a) alternative,
   b) alternative et paire,
   c) alternative et impaire.

   Indication : étudier la nature des fonctions

$$G_n(x) := F(x)\cos n\omega x, \quad H_n(x) := F(x)\sin n\omega x$$

   pour cela, calculer $G_n\left(x + \frac{T}{2}\right)$ et $H_n\left(x + \frac{T}{2}\right)$

Séries de Fourier Généralisées.

I. Soit E un espace préhilbertien (réel ou complexe), $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ un système orthonormÈ et E_n le sous-espace de base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$

∗ 1) Déterminer les a_k pour que $P_n\, x := \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ soit la projection orthogonale de x sur E_n c.-à-d. $(x - P_n x)$ soit perpendiculaire à E_n

2) En déduire que $\forall x \in E$ on a

∗ a) $\|x - P_n x\| \leq \|x - y\| \qquad \forall y \in E_n$

∗ b) $\|P_n x\| \leq \|x\|$

c) L'inégalité de Bessel c.-à-d. $\sum_{n=1}^{\infty} |< x, e_n >|^2 \leq \|x\|^2$

3) Démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \implies \lim_{n\to\infty} < x_n, y > = < x, y > \qquad \forall y \in E$$

4) Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

a) (e_n) est complet c.-à-d.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \qquad \text{avec } \ c_n = < x, e_n > \qquad \forall x \in E$$

b) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \qquad \forall x \in E$

c) $< x, y > = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n^* \qquad$ avec $d_n = < y, e_n > \qquad \forall x, y \in E$

5) Applications

∗ a) Enoncer 2)a) dans le cadre des séries de Fourier trigonométriques

b) Déterminer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ pour que

$$\int_{-1}^{1} \Big(|x| - (ax^3 + bx^2 + cx + d)\Big)^2 dx$$

soit minimum ; utiliser les polynômes de Legendre normalisés
(cf. exercice II)

Produit scalaire
Polynômes de Legendre et algorithme de Gram-Schmidt

$*$ II. Soit l'espace vectoriel réel $\mathcal{P}_4$ des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 3 muni du produit scalaire

$$< p, q >= \int_{-1}^{+1} p(x)q(x)dx,$$

de la norme $\|p\| = \sqrt{< p, p >}$ et de la base standard $s = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ avec $s_i(x) = x^{i-1}$

a) Calculer $< s_i, s_j >$

b) En déduire une base othonormée $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base s et vérifier que $e_{n+1}(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n(x)$ où les $P_n(x)$ sont les polynômes de Legendre

Définition :

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$