UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

Programmation linéaire en variables continues :

propriétés mathématiques et résolution

Définitions - Notations (1)

Programme linéaire continu

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \ldots, m \\ x_j \geq 0, \forall j \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \min CX \\ AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

Définitions - Notations (2)

N.B.

max $\rightarrow$ min

$\geq \rightarrow \leq$

$= \rightarrow \leq$

$x_j \geq 0$

Définitions - Notations (3)

Variables d'écarts

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \end{Bmatrix} b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix} t_i = b_i$$

Définitions - Notations (4)

Soit le P.L. $\min\{CX : AX = b, X \geq 0\}$

Solution

Vecteur X tel que $AX = b$

Solution admissible

Vecteur X tel que $AX = b$ *et* $X \geq 0$

Définitions - Notations (5)

Base

Matrice B (m x m) extraite de A et dont le dét. est ≠ 0

Indices de base (hors base)

Variables en base (hors base)

Définitions - Notations (6)

Solution de base (associée à une base B)

Solution où les variables hors base sont nulles.

Solution de base explicitée

Solution de base associée à une matrice unité

Résultats fondamentaux (1)

1) $P = \left\{ X : AX \leq b, X \geq 0 \right\}$ est convexe

2) P est $\begin{cases} \text{soit vide} \\ \text{soit un polyèdre convexe} \\ \text{soit un ensemble polyédrique} \\ \text{convexe non borné} \end{cases}$

Résultats fondamentaux (2)

3) Si P est un polyèdre convexe, alors

l'ensemble des solutions optimales du

P.L. $$\min\left\{CX : X \in P\right\}$$

contient au moins un sommet de P.

Résultats fondamentaux (3)

Démonstration

Soit $S_1, \ldots, S_k$ les sommets et $cS_m = \min_i cS_i$

$$X \in P \Rightarrow X = \sum_i \alpha_i S_i \left(\sum_i \alpha_i = 1 \, et \, \alpha_i \geq 0 \right)$$

$$\Rightarrow CX = \sum_i \alpha_i cS_i \geq cS_m$$

Résultats fondamentaux (4)

4) Si A est de rang m, alors tout sommet de

$$\{X : AX = b, X \geq 0\}$$

est une solution de base admissible.

N.B. : P_j = $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A

Résultats fondamentaux (5)

Démonstration

Soit $S = (s_1, \ldots., s_k, 0 \ldots.0)$

un sommet de P ($s_i > 0$).

Si $P_1, \ldots, P_k$ ne sont pas linéairement

indépendants, alors $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k : \sum_{j=1}^{k} \alpha_j P_j = 0$

On a aussi $\sum_{j=1}^{k} s_j P_j = P_0 = b$

Résultats fondamentaux (6)

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} (s_j + \varepsilon\,\alpha_j) P_j = P_0 \\ \sum_{j} (s_j - \varepsilon\alpha_j) P_j = P_0 \end{cases}$$

où ε tel que

$$|\varepsilon\alpha_j| < s_j, \forall j$$

Résultats fondamentaux (7)

$$\Rightarrow\ X_1\ et\ X_2\ \in P, où \begin{cases} X_1 = (s_1 + \varepsilon\alpha_1, \ldots, s_k + \varepsilon\alpha_k, 0\ldots\ldots 0) \\ X_2 = (s_1 - \varepsilon\alpha_1, \ldots, s_k - \varepsilon\alpha_k, 0\ldots\ldots 0), \end{cases}$$

ce qui est impossible car $S = \frac{1}{2}\left(X_1 + X_2\right)$

$\Rightarrow P_1 \ldots\ldots P_k$ sont linéairement indépendants

Résultats fondamentaux (8)

Si $k = m$, S est la solution de base correspondant à

$B = (P_1 \ldots P_k)$

Si $k < m$, S est la solution de base correspondant à

$(P_1 \ldots P_k)$ complétée à l'aide de m-k colonnes

bien choisies.

Résultats fondamentaux (9)

5) Si A est de rang m, alors toute solution de base admissible est un sommet de

$$\{X : AX = b, X \geq 0\}$$

Résultats fondamentaux (10)

Démonstration

Soit $S = (s_1, \ldots, s_m, 0 \ldots 0)$ une solution de base admissible

$\Rightarrow B = (P_1 \ldots P_m)$ est une base et $s_i \geq 0, \forall i$

Si $s_i = 0, \forall i$, S est un sommet.

Résultats fondamentaux (11)

Démonstration (suite)

Sinon et si S n'est pas un sommet, alors

$S = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$ où $0 \leq \lambda \leq 1$, $X_1 \in P$ et $X_2 \in P$

$\Rightarrow x_{1i} = x_{2i} = 0, \forall i > m \;\Rightarrow BX_1 = BX_2 = b$

$\Rightarrow X_1 = X_2 = S.$

Algorithme de dénombrement

Soit min $\{CX : AX = b, X \geq 0\}$ où A est de rang m.
ou
max

1) Rechercher toutes les solutions de base (annuler n-m variables et résoudre le système qui reste).

2) Retenir les solutions de base admissibles (composantes ≥ 0)

3) Sélectionner la meilleure

ULB UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

Algorithme du Simplexe (1)

Principe

Partir d’une première solution de base admissible explicitée et se déplacer de solution de base admissible en solution de base admissible en améliorant toujours la fonction économique.

Algorithme du Simplexe (2)

Hypothèses de départ

- Système d'égalités $AX = b$
- A contient une matrice unité de rang m
- $b \geq 0$

Changement de base (1)

AX = b

Base B : matrice unité

$$\begin{cases} x_i = b_i, \forall\, i \in I(B) \\ x_j = 0, \forall\, j \in J(B) \end{cases}$$

$$Z_0 = \sum_{i \in I(B)} c_i b_i$$

A'X = b'

Base B' : matrice unité

$$\begin{cases} x_i = b_i', \forall\, i \in I(B') \\ x_j = 0, \forall\, j \in J(B') \end{cases}$$

$$Z_0' = \sum_{i \in I(B')} c_i b_i'$$

$$I(B') = \left[I(B) \cup \{k\} \right] \setminus \{r\}$$

Changement de base (2)

Avant le changement de base, on a

$$\left\{ x_i + \sum_{j \in J(B)} a_{ij} x_j = b_i \,,\, i \in I(B) \right.$$

En particulier $(i = r): x_k = \dfrac{b_r}{a_{rk}} - \dfrac{x_r}{a_{rk}} - \sum_{\substack{j \in J(B) \\ j \neq k}} \dfrac{a_{rj}}{a_{rk}} x_j$

Changement de base (3)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_i - \dfrac{a_{ik}}{a_{rk}} x_r + \displaystyle\sum_{\substack{j \in J(B) \\ j \neq k}} \left[a_{ij} - \dfrac{a_{ik} a_{rj}}{a_{rk}} \right] x_j = b_i - \dfrac{a_{ik} b_r}{a_{rk}}, i \in I(B), i \neq r \\ x_k + \dfrac{x_r}{a_{rk}} + \displaystyle\sum_{\substack{j \in J(B) \\ j \neq k}} \dfrac{a_{rj}}{a_{rk}} x_j = \dfrac{b_r}{a_{rk}} \end{cases}$$

Changement de base (4)

Après le changement de base, on a

$$\left\{ x_i + \sum_{j \in J(B')} a'_{ij} x_j = b'_i, \quad i \in I(B') \right.$$

Changement de base (5)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_i + a'_{ir} x_r + \sum\limits_{\substack{j \in J(B) \\ j \neq k}} a'_{ij} x_j = b'_i, i \in I(B), i \neq r \\ x_k + a'_{kr} x_r + \sum\limits_{\substack{j \in J(B) \\ j \neq k}} a'_{kj} x_j = b'_k \end{cases}$$

Changement de base (6)

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{rj}\frac{a_{ik}}{a_{rk}}, \forall i \in I(B) \cap I(B')$$

$$a'_{kj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}$$

$$b'_{i} = b_{i} - b_{r}\frac{a_{ik}}{a_{rk}}, \forall i \in I(B) \cap I(B')$$

$$b'_{k} = \frac{b_{r}}{a_{rk}}$$

Changement de base (7)

Variation de la fonction économique

$$z_0' = \sum_{i \in I(B')} c_i b_i' = \sum_{i \in I(B) \cap I(B')} c_i b_i' + c_k b_k'$$

$$= \sum_{i \in I(B) \cap I((B')} c_i \left(b_i - b_r \frac{a_{ik}}{a_{rk}} \right) + c_k \frac{b_r}{a_{rk}}$$

Changement de base (8)

$$= \sum_{i \in I(B)} c_i \left(b_i - b_r \frac{a_{ik}}{a_{rk}} \right) + c_k \frac{b_r}{a_{rk}}$$

$$= \sum_{i \in I(B)} c_i b_i - \frac{b_r}{a_{rk}} \left[\underbrace{\sum_{i \in I(B)} c_i a_{ik}}_{z_k} - c_k \right]$$

$$= z_0 - \frac{b_r}{a_{rk}} (z_k - c_k)$$

Changement de base (9)

Choix de k et r

Il faut

$$\begin{cases} z_k - c_k > 0 \text{ dans problème à minimum} \\ z_k - c_k < 0 \text{ dans problème à maximum} \\ a_{rk} > 0 \qquad \text{(pivot)} \\ b_i - b_r \dfrac{a_{ik}}{a_{rk}} \geq 0, \forall\, i \in I(B) \cap I(B') \end{cases}$$

Changement de base (10)

Règle

$$z_k - c_k = \max_j (z_j - c_j) \text{ si problème à minimum}$$

$$z_k - c_k = \min_j (z_j - c_j) \text{ si problème à maximum}$$

$$\frac{b_r}{a_{rk}} = \min_{a_{ik}>0} \frac{b_i}{a_{ik}}$$

Critère d'optimalité (1)

Calcul de $Z_0(Q)$ où
Q = point quelconque admissible

On a $\left\{ x_i + \sum_{j \in J(B)} a_{ij} x_j = b_i, \forall i \in I(B) \right.$

$$Z_o(Q) = \sum_{i \in I(B)} c_i x_i(Q) + \sum_{j \in J(B)} c_j x_j(Q)$$

Critère d'optimalité (2)

$$= \sum_{i \in I(B)} c_i \left[b_i - \sum_{j \in J(B)} a_{ij} x_j(Q) \right] + \sum_{j \in J(B)} c_j x_j(Q)$$

$$= \sum_{i \in I(B)} c_i b_i - \sum_{j \in J(B)} \left[\sum_{i \in I(B)} c_i a_{ij} - c_j \right] x_j(Q)$$

$$= Z_0 - \sum_{j \in J(B)} (z_j - c_j) x_j(Q)$$

Critère d'optimalité (3)

Problème à min. :

$z_j - c_j \leq 0, \forall j \in J\,(B) \Rightarrow Z_0(Q) \geq Z_0, \forall Q$

Problème à max. :

$z_j - c_j \geq 0, \forall j \in J\,(B) \Rightarrow Z_0(Q) \leq Z_0, \forall Q$

Critère d'optimalité (4)

Cas où on ne trouve pas de pivot positif

Soit, dans un problème à <u>min</u>. : $\begin{cases} z_k - c_k > 0 \\ a_{ik} \leq 0, \forall\, i \end{cases}$

Soit le point Q tel que : $\begin{cases} x_j(Q) = 0, \forall\, j \in J(B), j \neq k \\ x_k(Q) > 0 \\ x_i(Q) = b_i - a_{ik} x_k(Q), \forall\, i \in I(B) \end{cases}$

Critère d'optimalité (5)

Q est admissible $\Rightarrow$

$$z_0(Q) = z_0 - (z_k - c_k)\, x_k(Q) < z_0,$$

et x_k (Q) peut être aussi grande que l'on veut.

$\Rightarrow$ solution infinie.

Algorithme du Simplexe pour un problème à minimum (1)

① Il faut $\min \{CX : AX = b, X \geq 0\}$

où $\begin{cases} A \text{ contient une matrice unité de rang } m, \\ b \geq 0. \end{cases}$

② Si $z_j - c_j \leq 0, \forall j$, alors optimalité.

Sinon, on choisit $k : z_k - c_k = \max_j (z_j - c_j) > 0$.

Algorithme du Simplexe pour un problème à minimum (2)

③ Si $a_{ik} \leq 0, \forall i$, alors solution infinie.

Sinon, on choisit $r \quad tel\,que \quad \dfrac{b_r}{a_{rk}} = \min_{a_{ik}>0} \dfrac{b_i}{a_{ik}}$

④ Effectuer le changement de base et aller en ②.

Algorithme du Simplexe pour un problème à maximum (1)

① Il faut $\max \{CX : AX = b, X \geq 0\}$

où $\begin{cases} A \text{ contient une matrice unité de rang } m, \\ b \geq 0. \end{cases}$

② Si $z_j - c_j \geq 0, \forall j$, alors optimalité.
Sinon, on choisit $k : z_k - c_k = \min_j (z_j - c_j) < 0$.

Algorithme du Simplexe pour un problème à maximum (2)

③ Si $a_{ik} \leq 0, \forall i$, alors solution infinie.

Sinon, on choisit $r \ \ tel\, que \ \dfrac{b_r}{a_{rk}} = \min\limits_{a_{ik}>0} \dfrac{b_i}{a_{ik}}$

④ Effectuer le changement de base et aller en ②.

Méthode de la base artificielle (1)

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \geq 0, i = 1 \ldots m \\ x_j \geq 0, j = 1 \ldots n \\ \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + v_i = b_i, i = 1 \ldots m \\ x_j \geq 0, \forall j; v_i \geq 0, \forall i \\ \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{i} v_i \end{cases}$$

I

II

Méthode de la base artificielle (2)

- Si, dans la solution optimale de II, $v_i = 0, \forall i$, alors, c'est la solution optimale de I .

Sinon, le problème I n'a pas de solution admissible

(système contradictoire)

Convergence - Technique de perturbation

Dualité : définition

$$\left\{\begin{array}{l} AX \geq b \\ X \geq 0 \\ \min CX \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} YA \leq C \\ Y \geq 0 \\ \max Yb \end{array}\right.$$

Dualité : autres cas (1)

$$\begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \\ \max CX \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \mathrm{YA} \geq \mathrm{C} \\ \mathrm{Y} \geq 0 \\ \min \mathrm{Yb} \end{cases}$$

ULB UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

Dualité : autres cas (2)

$$\begin{cases} AX \geq b \\ X \geq 0 \\ \max CX \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} YA \leq -C \\ Y \geq 0 \\ \max Yb \end{cases}$$

Dualité : autres cas (3)

$$\begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \\ \min CX \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \mathrm{YA} \geq -\mathrm{C} \\ \mathrm{Y} \geq 0 \\ \min \mathrm{Yb} \end{cases}$$

Dualité : autres cas (4)

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \\ \min CX \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} YA \leq C \\ Y \text{ s.r.s.} \\ \max Yb \end{cases}$$

Théorèmes fondamentaux (1)

Soit

$$\left\{\begin{array}{l} AX = b \\ X \geq 0 \\ \min CX \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} YA \leq C \\ Y \text{ s.r.s.} \\ \max Yb \end{array}\right.$$

Théorèmes fondamentaux (2)

1) Si X et Y sont admissibles alors $CX \geq Yb$.

Dém. : $CX \geq Y A X = Yb$

Théorèmes fondamentaux (3)

2) Si $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont admissibles et si $C\tilde{X} = \tilde{Y}b$,

alors $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont optimales

Dém. : corollaire du précédent.

Théorèmes fondamentaux (4)

3) **a)** Si la solution optimale du primal existe et est finie, alors celle du dual aussi et les valeurs optimales des fonctions économiques sont égales

b) Si la solution optimale du primal est infinie, alors le dual est contradictoire

Théorèmes fondamentaux (5)

Démonstration

a) $A_f X = b_f$ où $A_f = K^{-1}A, b_f = K^{-1}b, c_f A_f - c \leq 0$

$$Soit\ \tilde{\tilde{Y}} = c_f K^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{\tilde{Y}} A = c_f K^{-1} A = c_f A_f \leq c \\ \tilde{\tilde{Y}} b = c_f K^{-1} b = c_f b_f \end{cases}$$

<u>N.B.</u> : $(c_f K^{-1})_j = z_j$

b) Corollaire du 1er théorème

<u>Remarque</u> : Les deux programmes peuvent être contradictoires

Algorithme dual simplexe (1)

Principe :

Partir d'une première solution de base non admissible explicitée et se déplacer de solution de base non admissible en solution de base non admissible en faisant des concessions sur la fonction économique.

Algorithme dual simplexe (2)

Hypothèses de départ :

- Système d'égalités $AX = b$
- A contient une matrice unité de rang m
- $z_j - c_j$ satisfont le critère d'optimalité

Algorithme dual simplexe (3)

Changement de base : idem Simplexe.

Algorithme dual simplexe (4)

Choix de r et k

Règle :

$$\begin{cases} b_r = \min\limits_i b_i \\[2ex] \dfrac{z_k - c_k}{a_{rk}} = \min\limits_{a_{rj}<0} \dfrac{z_j - c_j}{a_{rj}} & \text{(si problème à min)} \\[2ex] \dfrac{z_k - c_k}{a_{rk}} = \max\limits_{a_{rj}<0} \dfrac{z_j - c_j}{a_{rj}} & \text{(si problème à max)} \end{cases}$$

Algorithme dual simplexe (5)

N.B. : si $a_{rj} \geq 0, \forall j$ (pas de pivot négatif),

alors le système est contradictoire car

$$0 \leq \sum_j a_{rj} x_j = b_r < 0$$

Méthode de la contrainte artificielle (1)

Cas où la matrice unité de départ correspond aux variables d'écarts

Soit un problème à min. :

il faut $z_j - c_j \leq 0, \forall j \Rightarrow c_j \geq 0, \forall j.$

Soit

$$P = \{j : c_j \geq 0\}, N = \{j : c_j < 0\} \; et \; c_f = \min_{j \in N} c_j$$

Méthode de la contrainte artificielle (2)

On ajoute la contrainte artificielle

$$\sum_{j \in N} x_j + x_{n+1} = M$$

$$\Rightarrow x_f = M - \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq f}} x_j - x_{n+1}$$

Méthode de la contrainte artificielle (3)

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j \in P} c_j x_j + \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq f}} \left(c_j - c_f\right) x_j + c_f M - c_f x_{n+1}$$

Si la solution optimale est sur la contrainte artificielle,

alors la solution optimale du problème initial est infinie.

Adjonction d’une contrainte

Coûts et prix marginaux (1)

1) Rappel :
$$z_0(Q) = z_0 - \sum_{j \in J(B)} \left(z_j - c_j\right) x_j(Q)$$

Soit
$$\begin{cases} x_k(Q) = 1, \text{ où } k \in J(B) \\ x_j(Q) = 0, \forall j \in J(B), j \neq k \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_0(Q) = z_0 - \underbrace{\left(z_k - c_k\right)}_{}$$

Coût marginal

N.B. : Q est admissible si $b_i - a_{ik} \geq 0, \forall i.$

Coûts et prix marginaux (2)

2) *Soit*

$$\begin{array}{l} AX = b \\ X \geq 0 \\ \min CX \end{array} \quad et \quad \begin{array}{l} AX = b' \\ X \geq 0, \\ \min CX \end{array} \quad où \quad \begin{cases} b_i' = b_i, \forall i \neq \hat{i} \\ b_{\hat{i}}' = b_{\hat{i}} + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_f b_f' = c_f K^{-1} b' = c_f K^{-1}\left(b + e^{\hat{i}}\right) = c_f b_f + \underbrace{z_{\hat{i}}}_{\text{Prix marginal}}$$