UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

INFO-F-310 (MATH-H404) Algorithmique et Recherche Opérationnelle

Prof. Yves De Smet

(co-titulaire Prof. Bernard Fortz)

Terminologie

- Recherche Opérationnelle
- Méthodes quantitatives de gestion
- Mathématiques de la Gestion
- Aide à la Décision

Historique

- Naissance (1945 - 1950)
  - 2e guerre mondiale : problèmes de stratégie militaire, de logistique
- Développement (1950 - 1970)
  - Problèmes de stratégie commerciale et économique (économétrie)

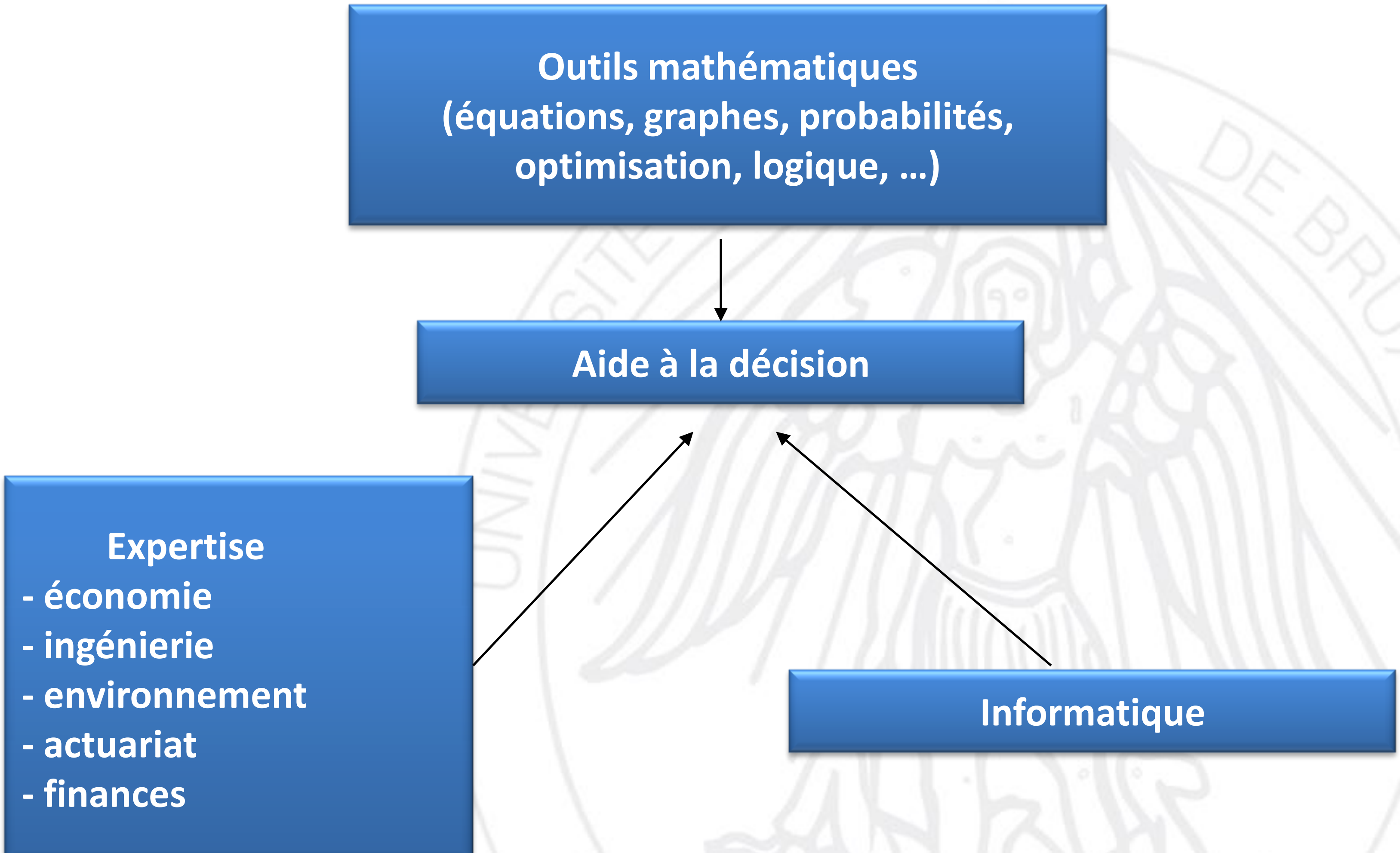
Historique

- Crise (1970 - 1980)
  - Outils accessibles aux grandes entreprises seulement (moyens informatiques !)
  - Modèles trop simples pour une réalité de plus en plus complexe

Historique

- Renouveau (1980 -)
  - Ouverture aux PME grâce à la micro-informatique
  - Utilisation des grands calculateurs pour les problèmes de grandes tailles
  - Approche moins réductrice, modèles plus souples (aide multicritère à la décision, systèmes experts, simulation, heuristiques)

Positionnement



Exemples de problèmes (1)

- Gérer un stock (de matières premières, de pièces de rechange, de déchets, …)
- Planifier des tâches (gestion de grands projets, organisation d’un atelier, d’une administration, d’un laboratoire, CIM, robots, …)
- Gérer la production (de ressources, d’une entreprise, …)

Exemples de problèmes (2)

- Contrôler la fiabilité d'un processus (gestion de pannes)
- Organiser la circulation ou le transport (d'informations, de fluides, de biens consommables, de véhicules, de personnes)
- Localiser (un entrepôt, une déchetterie, une usine, un carrefour, un tracé de TGV, un incinérateur, …)

Principaux outils

- Programmation mathématique
- Méthodes combinatoires et graphes
- Aide multicritère à la décision
- Processus dynamiques
- Simulation
- …

1ère Partie

Programmation Linéaire

Programmation mathématique (1)

Définition

Résoudre un programme mathématique consiste à rechercher les valeurs des variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, qui maximisent (ou minimisent) une fonction

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tout en vérifiant les contraintes

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{Bmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{Bmatrix} b_i, i = 1,2,\ldots,m$$

Programmation mathématique (2)

Cas particulier : Programme linéaire

Rechercher $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui maximisent (ou minimisent)

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

sous les contraintes

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots a_{in} x_n \left\{ \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ = \end{matrix} \right\} b_i \, , i = 1,2,\ldots,m$$

Placement d'un capital

Une entreprise veut placer un capital K. Six modalités de placement sont offertes sur le marché, les taux d'intérêt étant respectivement 3%, 5%, 3,5%, 7%, 6% et 4,5%.

Pour satisfaire aux contraintes légales, l'entreprise doit placer au moins 40% de son capital suivant les deux premières modalités, au plus 35% suivant les deux suivantes et au plus 35% suivant les deux dernières.

- Combien l'entreprise doit-elle placer dans chaque modalité de façon à maximiser son intérêt total ?

Composition d’aliments pour bétail (1)

On désire déterminer la composition, à coût minimal, d’un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus 3 produits bruts : orge, arachide, sésame. L’aliment ainsi fabriqué devra comporter au moins 22% de protéines et 3,6% de graisses pour se conformer aux exigences de la clientèle. On a indiqué dans le tableau suivant, les pourcentages de protéines et de graisses contenus respectivement dans l’orge, les arachides et le sésame ainsi que le coût par tonne de chacun des produits bruts

Composition d'aliments pour bétail (2)

	Orge	Arachides	Sésame
Protéines	12%	52%	42%
Graisses	2%	2%	10%
Coût	25	41	39

Problème de production (1)

Une usine fabrique 2 produits P1 et P2.

Chacun de ces produits nécessite des heures de fabrication unitaires sur les machines A, B, C, D, E comme indiqué au tableau 1.

Les produits utilisent 3 fournitures F1 , F2 , F3 comme indiqué au tableau 2.

- Quelle est la production optimale, sachant que les marges brutes des produits sont 40 Euros pour P1 et 70 Euros pour P2 ?

Problème de production (2)

Tableau 1	A	B	C	D	E
P_1	0	1,5	2	3	3
P_2	3	4	3	2	0
Disponibilité totale	39	60	57	70	57

Problème de production (3)

Tableau 2	F1	F2	F3
P_1	0	12	8
P_2	5	36	0
Unités	Kg	m^3	m^3
Stock disponible	55	432	136

Raffinerie de pétrole (1)

Une raffinerie peut traiter trois types de pétroles bruts en vue de la fabrication de 5 produits finis.

Le tableau ci-dessous reprend les quantités produites et les bénéfices réalisés.

D’autre part, la production est limitée par la capacité des unités de traitement, les possibilités de vente et les stockages disponibles.

- Quelles quantités de pétroles bruts doit-elle traiter pour réaliser un bénéfice total maximum ?

Raffinerie de pétrole (2)

Produits finis	Brut n°1 Afrique	Brut n°2 Moyen-Orient	Brut n°3 Amérique	Limites de production
Gaz et gaz liquéfiés	0,02	-	0,06	300.000 T
Essences	0,20	0,25	0,30	1.050.000 T
Pétrole	0,08	-	0,04	180.000 T
Gasoil	0,40	0,25	0,30	1.350.000 T
Fuel-oil	0,30	0,50	0,30	1.800.000 T
Bénéfices/T	4	5	5	

Problème du flot maximum

Faire passer une quantité maximum de marchandises d’un point (source) à un autre (puits) à travers un réseau de communication à capacités limitées.

Problème de Hitchcock

Etant donné *m* entrepôts contenant des quantités a_i (i = 1, 2,…, m) de marchandises et *n* clients demandant des quantités d_j (j = 1, 2,…, n) et sachant que le coût unitaire de transport de l'entrepôt *i* vers le client *j* est c_{ij}.

- Comment servir les clients en minimisant le coût total ?

Liquidation de stock (1)

Un atelier qui fabrique 4 types de camions désire liquider son stock de pièces en produisant un dernier lot de camions.

Le tableau ci-après précise les pièces nécessaires au montage de chaque type de camion et le bénéfice résultant de la vente des camions.

Déterminer le lot optimal.

Liquidation de stock (2)

Pièces	Stock	Types de camions			
		1	2	3	4
Pneus	4.500	16	8	6	4
Bennes	500	2	0	1	0
Moteurs A	400	1	1	0	0
Moteurs B	600	0	0	1	1
Bénéfices		100	80	80	60

Problème de fabrication (1)

Un atelier peut fabriquer 3 types d'articles :
l'article A_1 (cadence :35 objets à l'heure),
l'article A_2 (cadence : 45 objets à l'heure),
l'article A_3 (cadence : 20 objets à l'heure).

Cette fabrication utilise une machine-outil unique, disponible
200 heures par mois.

Les bénéfices unitaires sont respectivement de 1,50 Euro par objet pour A_1, 1 Euro par objet pour A_2 et 2 Euros par objet pour A_3.

Problème de fabrication (2)

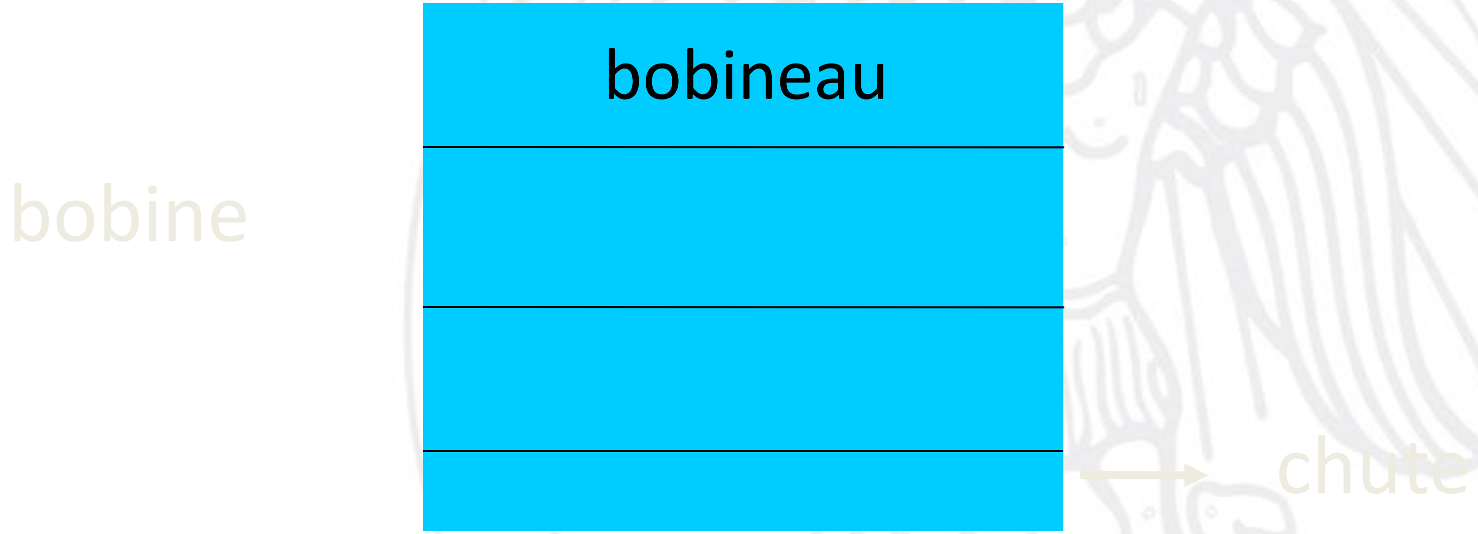
Chaque objet est vérifié par un des trois techniciens de l'équipe de contrôle : chaque technicien travaille 170 h par mois et la vérification d'un objet prend 4 minutes pour A_1, 3 minutes par A_2 et 2 minutes pour A_3.

Le nombre maximum d'objets qu'on peut écouler par mois est de 4900 pour A_1, 5400 pour A_2 et 2000 pour A_3.

Quelle est la production optimale ?

Découpe de bobines (1)

On découpe longitudinalement des bobines en «bobineaux» de largeurs plus petites (et de même longueur).



Découpe de bobines (2)

On dispose d'une bobine B_1 de largeur 29 et de longueur 185 et d'une bobine B_2 de largeur 37 et de longueur 280.

Les bobineaux commandés sont de deux largeurs différentes :

$$l_1 = 3 \text{ et } l_2 = 5$$

Ceux de largeur 3 doivent représenter, ensemble, une longueur totale au moins égale à 2.000 et ceux de largeur 5, une longueur totale au moins égale à 1.800.

- On désire maximiser la surface découpée.

Découpe de barres (1)

On veut découper un stock de barres d'acier de 1 m de long en barreaux de 28 et 45 cm.

Trois types de découpes d'une barre donnée sont possibles :

- 3 barreaux de 28 cm
- 2 barreaux de 45 cm
- 1 barreau de 45 cm et 1 barreau de 28 cm.

On veut découper 36 barreaux de 28 cm et 24 barreaux de 45 cm, commandés par un client, en minimisant le total des chutes.

Découpe de barres (2)

Considérer deux cas :

1. Les barreaux excédents ne sont pas considérés comme des chutes.

2. Les barreaux excédents sont considérés comme des chutes.

Problème du sac à dos

Un alpiniste peut mettre dans son sac à dos au maximum 16 kg de ravitaillement. Il peut choisir un certain nombre d'unités de trois produits différents.

Le poids unitaire et la valeur énergétique unitaire de ces produits sont connus.

- Que doit-il emporter pour maximiser la valeur totale en calories sans dépasser les 16 kg ?

Produits	A	B	C
Poids	2	5	7
Valeurs	4	10	15

Localisation d'émetteurs (1)

Cinq sites ont été retenus pour construire des émetteurs de télévision destinés à desservir 10 localités.

Le tableau ci-après donne, pour chaque site, le coût de construction d'un émetteur sur ce site et les localités desservies par cet émetteur.

- On cherche à déterminer les sites sur lesquels il faut construire
  un émetteur de façon à pouvoir desservir toutes les localités au
  moindre coût.

Localisation d'émetteurs (2)

Site	Coût	Localités desservies
1	4	1, 2, 3, 5, 7, 8, 10
2	7	2, 4
3	11	1, 6, 8, 9, 10
4	6	1, 2, 4, 8, 10
5	10	3, 5, 6, 7, 9

Problème d’affectation

Affecter m ingénieurs à m projets (un ingénieur par projet et un projet par ingénieur) de façon à minimiser le coût total, sachant que l’affectation de l’ingénieur i au projet j coûte c_{ij}.

Construction d'entrepôts (1)

Une société de distribution désire construire un ou plusieurs entrepôts à partir desquels elle servira 6 clients importants.

Quatre terrains appartenant à la société sont disponibles.

Le tableau ci-dessous reprend, pour chacun d'eux, la capacité maximum de l'entrepôt qui pourrait y être construit, le coût de construction et le coût unitaire de transport de cet éventuel entrepôt vers chaque client.

- Sachant que les quantités demandées par les clients sont respectivement 200, 250, 300, 100, 150 et 175, où faut-il construire un (des) entrepôt(s) et comment faut-il organiser la distribution de façon à minimiser le coût total de l'opération ?

Construction d'entrepôts (2)

Clients / Entrepôts	1	2	3	4	5	6	Capacité	Coût
1	2	3	1	4	5	2	500	100
2	3	1	1	2	2	1	400	120
3	4	1	2	3	2	5	600	150
4	6	1	1	1	2	0	1000	80

Planning d’un atelier (1)

Un atelier, comportant *m* machines, fabrique *n* produits différents.

Chaque produit doit passer une fois sur chaque machine, dans un ordre donné et qui diffère selon le produit

Planning d'un atelier (2)

Soit $.r_{ijk} \begin{cases} = 1 & \text{si la } j^e \text{ opération sur le produit } i \text{ nécessite la machine } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$. T_{ik} =$ temps que passe le produit *i* sur la machine *k*

- Comment organiser les opérations de façon à minimiser le temps total de fabrication ?

Affectation de moyens

On désire affecter un budget et une équipe d'hommes à chacun des n projets acceptés par la direction de l'entreprise. Chaque projet *i* doit recevoir un nombre d'hommes compris entre h_1^i et h_2^i et un budget compris entre b_1^i et b_2^i.

Le budget global disponible est égal à B et le nombre total d'hommes est H. La durée de réalisation de chaque projet décroît linéairement avec le budget et le nombre d'hommes affectés à ce projet.

- On désire minimiser la durée de réalisation des *n* projets.

Réseau d'usines

Une entreprise veut construire m centres de production et dispose pour cela de n endroits possibles ($n > m$). Le coût unitaire de transport de l'endroit i à l'endroit j est c_{ij}. Le volume de marchandises à transporter du centre de production k au centre de production l est d_{kl}.

- Où faut-il construire les m centres de production de façon à minimiser le coût total de transport ?

N.B. : programme quadratique !

Problème du voyageur de commerce

- Exemple: tournées de véhicules
- Explosion combinatoire ???
- Si on considère 52 sites (cf U.S.A.), on a approximativement 10^{69} solutions à tester !
- Ordinateurs actuels de **3 Gigahertz** (= 3.000.000.000 opérations par seconde)
- Réduits à $1cm^3$ et 1.000.000 plus puissant
- Surface de la terre 510.100.000 km^2
- Distance min terre – lune 356.000 km
- 600 milliards de millénaires

Exemple B : Traitement des déchets urbains

Les villes X et Y produisent respectivement 500 tonnes et 400 tonnes de déchets par jour. Les déchets doivent être incinérés dans deux incinérateurs I1 et I2 dont les capacités de traitement sont toutes deux de 500 tonnes par jour. Les coûts d'incinération sont de $ 40 / tonne pour I1 et de $ 30 / tonne pour I2. L'incinération réduit chaque tonne de déchets à 0,2 tonne de résidus, qui doivent ensuite être déversés dans une des deux décharges disponibles (D1 et D2). Chaque décharge peut recevoir au maximum 200 tonnes de résidus par jour. Le coût de transport, aussi bien pour les déchets que pour les résidus de leur incinération, est de $ 3 par kilomètre et par tonne. Les distances entre les différents sites sont données dans les deux tableaux ci-dessous.

	I1	I2
Ville X	30	5
Ville Y	36	42

	D1	D2
I1	5	8
I2	9	6

Comment organiser le traitement de déchets de façon à minimiser le coût total de traitement ?

Remarque

Les variables booléennes permettent d'exprimer de nombreuses formes de contraintes.

Exemple 1

(x_1, x_2, …, x_n) doit satisfaire au moins k contraintes parmi les m suivantes :

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$$ i = 1, 2, …, m

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq \delta_i G_i$$ i = 1, 2, …, m

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i \leq m - k$$

$$\delta_i = 0 \, ou \, 1$$

$G_i =$ borne inférieure pour g_i

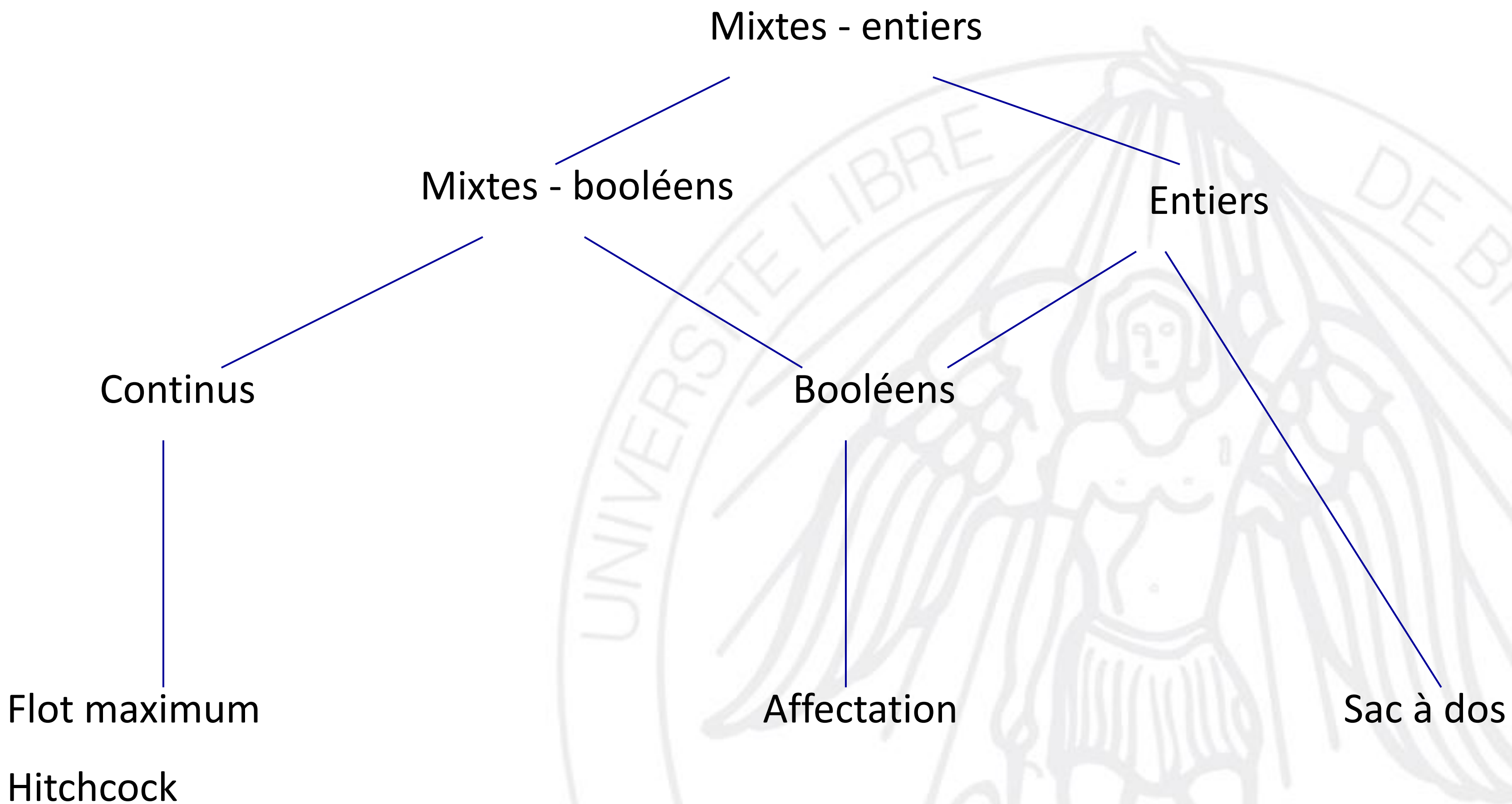
Exemple 2

Si $f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$, alors $g\,(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$

$\rightarrow$ $(x_1, \ldots, x_n)$ doit satisfaire au moins 1 inégalité parmi les deux suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} f\,(x_1, \ldots, x_n) < 0 \\ g\,(x_1, \ldots, x_n) \geq 0 \end{array}\right.$$

Types de programmes linéaires



Remarque 1

Pour certains problèmes particuliers, les solutions du problème continu sont automatiquement entières.

Remarque 2

Un P.L. en variables booléennes peut toujours s’exprimer comme un P.L. en variables entières.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \qquad \leq 1 \\ \qquad x_2 \leq 1 \\ x_j \geq 0 \text{ entiers} \end{array}\right.$$

Remarque 3

… et réciproquement !

En effet, x entier $\geq 0 \Rightarrow$

$x = 2^P y_P + 2^{P-1} y_{P-1} + \ldots + 2^2 y_2 + 2^1 y_1 + 2° y_\circ$ où $y_i = 0$ ou 1.

Exemple :

$23 = 2^4 . 1 + 2^3 . 0 + 2^2 .1 + 2^1 . 1 + 2°.1 = 10111$

Programmation linéaire en variables continues - Exemple numérique

Maximiser $1/2\ x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 & \leq 2 \\ x_1 + x_2 & \leq 3 \\ -x_1 + x_2 & \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Programmation linéaire en variables continues - Exemple numérique (suite)

Les contraintes définissent un polyèdre de solutions admissibles (éventuellement vide ou non borné).

La solution optimale se trouve en un sommet du polyèdre (éventuellement plusieurs ex æquo).

Programmation linéaire en variables entières - Exemple numérique

Maximiser x_1

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \leq 0 \\ 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ et entiers} \end{cases}$$

Programmation linéaire en variables entières - Exemple numérique (suite)