

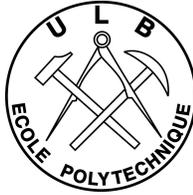
# **ELEC-H-305**

## **Circuits logiques et numériques** **2011-2012**

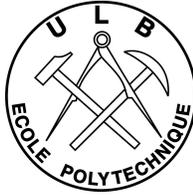
### **Cours 2**

**Dragomir Milojevic**

*[Dragomir.Milojevic@ulb.ac.be](mailto:Dragomir.Milojevic@ulb.ac.be)*



1. Codes
2. Codes correcteurs — parité
3. Algèbre de Boole
4. Fonctions logiques
5. Réalisation matérielle

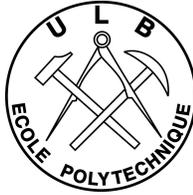


## Codes

- En décimal: tout nombre est composé de chiffre, chaque chiffre est décrit à l'aide des 10 symboles  $\{0, 9\}$ .
- Pour représenter chaque chiffre en binaire: il faut  $\log_2 10$  de bits (en arrondissant sur le premier nombre entier supérieur: 4 bits)
- Lors de la représentation d'un chiffre à l'aide des 4 bits nous avons 16 codes, dont 6 inutiles (due au arrondissement):

1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111

- Pour octal et hexadécimal c'est plus pratique, avec 3 et 4 bits respectivement il n'y a pas de codes inutiles (respectivement 8 et 16 symboles).



## Trois classes de codes

### 1. Codes **pondérés** (*weighted codes*)

- ♦ 8421 *Binary Coded Decimal* (BCD) — chaque chiffre codé séparément
- ♦ 2421 Code
- ♦ 642-3 Code excédent 3 (*Excess 3*)

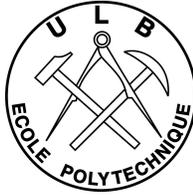
} Codes auto-complémentaires

### 2. Codes **non-pondérés**

- ♦ Code Gray
- ♦ Code ASCII

### 3. Codes **détecteurs d'erreur**





## Aspect pratique : Addition en BCD

Exemple:  $(532+268)_{10}$

532	0101	0011	0010
+268	+0010	0110	1000
	1	1	

---

800	1000	1010	1010
		0110	0110

---

(1000	0000	0000) <sub>2</sub>
↓	↓	↓

---

( 8 0 0 )<sub>10</sub>

Résultat  $\geq 10$  correction: +6(0110)

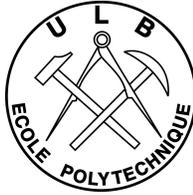
On reporte!!! la dizaine qui en binaire nécessite +6

## Code Gray (code cyclique)

- Principe de la *Look-up Table*: la conversion ne suis pas une règle, on peut faire ce que l'on veut...
- **Code Gray** — deux codes voisins ne diffèrent que par la valeur d'un seul bit (pour éviter des probs.).
- Lors de transitions (passage d'une valeur à l'autre — le comptage p.e.) il n'y a pas deux bits qui changent de valeur en même temps.
- Plusieurs codes sont possibles (on peut imaginer un algorithme permettant de générer de tels codes).

Décimal	Gray
0	000
1	001
2	011
3	010
4	110
5	111
6	101
7	100

# 1. Codes non-pondérés



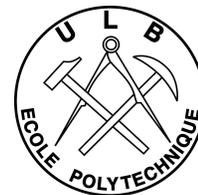
## Code ASCII

*(American Standard Code for Information Interchange)*

- Utilisé pour coder les caractères dans des systèmes de traitement d'information numérique.
- C'est un code sur 8 bits: donc 256 possibilités ( $2^8$ ), mais en pratique on n'utilise que 128.
- Utilisé pour coder les lettres en MAJ et MIN, chiffres, ponctuation, caractères de contrôle...
- Attention à l'interprétation des codes (caractères ou les nombres)

**Différence entre un fichier texte et un fichier binaire?**

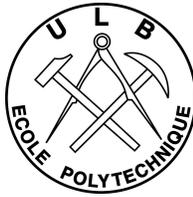
# 1. Codes non-pondérés: ASCII



Dec	Hx	Oct	Char	Dec	Hx	Oct	Html	Chr	Dec	Hx	Oct	Html	Chr	Dec	Hx	Oct	Html	Chr
0	0	000	NUL (null)	32	20	040	&#32;	Space	64	40	100	&#64;	@	96	60	140	&#96;	`
1	1	001	SOH (start of heading)	33	21	041	&#33;	!	65	41	101	&#65;	A	97	61	141	&#97;	a
2	2	002	STX (start of text)	34	22	042	&#34;	"	66	42	102	&#66;	B	98	62	142	&#98;	b
3	3	003	ETX (end of text)	35	23	043	&#35;	#	67	43	103	&#67;	C	99	63	143	&#99;	c
4	4	004	EOT (end of transmission)	36	24	044	&#36;	\$	68	44	104	&#68;	D	100	64	144	&#100;	d
5	5	005	ENQ (enquiry)	37	25	045	&#37;	%	69	45	105	&#69;	E	101	65	145	&#101;	e
6	6	006	ACK (acknowledge)	38	26	046	&#38;	&	70	46	106	&#70;	F	102	66	146	&#102;	f
7	7	007	BEL (bell)	39	27	047	&#39;	'	71	47	107	&#71;	G	103	67	147	&#103;	g
8	8	010	BS (backspace)	40	28	050	&#40;	(	72	48	110	&#72;	H	104	68	150	&#104;	h
9	9	011	TAB (horizontal tab)	41	29	051	&#41;	)	73	49	111	&#73;	I	105	69	151	&#105;	i
10	A	012	LF (NL line feed, new line)	42	2A	052	&#42;	*	74	4A	112	&#74;	J	106	6A	152	&#106;	j
11	B	013	VT (vertical tab)	43	2B	053	&#43;	+	75	4B	113	&#75;	K	107	6B	153	&#107;	k
12	C	014	FF (NP form feed, new page)	44	2C	054	&#44;	,	76	4C	114	&#76;	L	108	6C	154	&#108;	l
13	D	015	CR (carriage return)	45	2D	055	&#45;	-	77	4D	115	&#77;	M	109	6D	155	&#109;	m
14	E	016	SO (shift out)	46	2E	056	&#46;	.	78	4E	116	&#78;	N	110	6E	156	&#110;	n
15	F	017	SI (shift in)	47	2F	057	&#47;	/	79	4F	117	&#79;	O	111	6F	157	&#111;	o
16	10	020	DLE (data link escape)	48	30	060	&#48;	0	80	50	120	&#80;	P	112	70	160	&#112;	p
17	11	021	DC1 (device control 1)	49	31	061	&#49;	1	81	51	121	&#81;	Q	113	71	161	&#113;	q
18	12	022	DC2 (device control 2)	50	32	062	&#50;	2	82	52	122	&#82;	R	114	72	162	&#114;	r
19	13	023	DC3 (device control 3)	51	33	063	&#51;	3	83	53	123	&#83;	S	115	73	163	&#115;	s
20	14	024	DC4 (device control 4)	52	34	064	&#52;	4	84	54	124	&#84;	T	116	74	164	&#116;	t
21	15	025	NAK (negative acknowledge)	53	35	065	&#53;	5	85	55	125	&#85;	U	117	75	165	&#117;	u
22	16	026	SYN (synchronous idle)	54	36	066	&#54;	6	86	56	126	&#86;	V	118	76	166	&#118;	v
23	17	027	ETB (end of trans. block)	55	37	067	&#55;	7	87	57	127	&#87;	W	119	77	167	&#119;	w
24	18	030	CAN (cancel)	56	38	070	&#56;	8	88	58	130	&#88;	X	120	78	170	&#120;	x
25	19	031	EM (end of medium)	57	39	071	&#57;	9	89	59	131	&#89;	Y	121	79	171	&#121;	y
26	1A	032	SUB (substitute)	58	3A	072	&#58;	:	90	5A	132	&#90;	Z	122	7A	172	&#122;	z
27	1B	033	ESC (escape)	59	3B	073	&#59;	;	91	5B	133	&#91;	[	123	7B	173	&#123;	{
28	1C	034	FS (file separator)	60	3C	074	&#60;	<	92	5C	134	&#92;	\	124	7C	174	&#124;	
29	1D	035	GS (group separator)	61	3D	075	&#61;	=	93	5D	135	&#93;	]	125	7D	175	&#125;	}
30	1E	036	RS (record separator)	62	3E	076	&#62;	>	94	5E	136	&#94;	^	126	7E	176	&#126;	~
31	1F	037	US (unit separator)	63	3F	077	&#63;	?	95	5F	137	&#95;	_	127	7F	177	&#127;	DEL

Source: [www.LookupTables.com](http://www.LookupTables.com)

a  
ou  
97  
?



## Distance de *Hamming*

*La distance de Hamming quantifie la distance (la différence) entre deux séquences de symboles.*

### Exemple

La distance entre 0101001 et

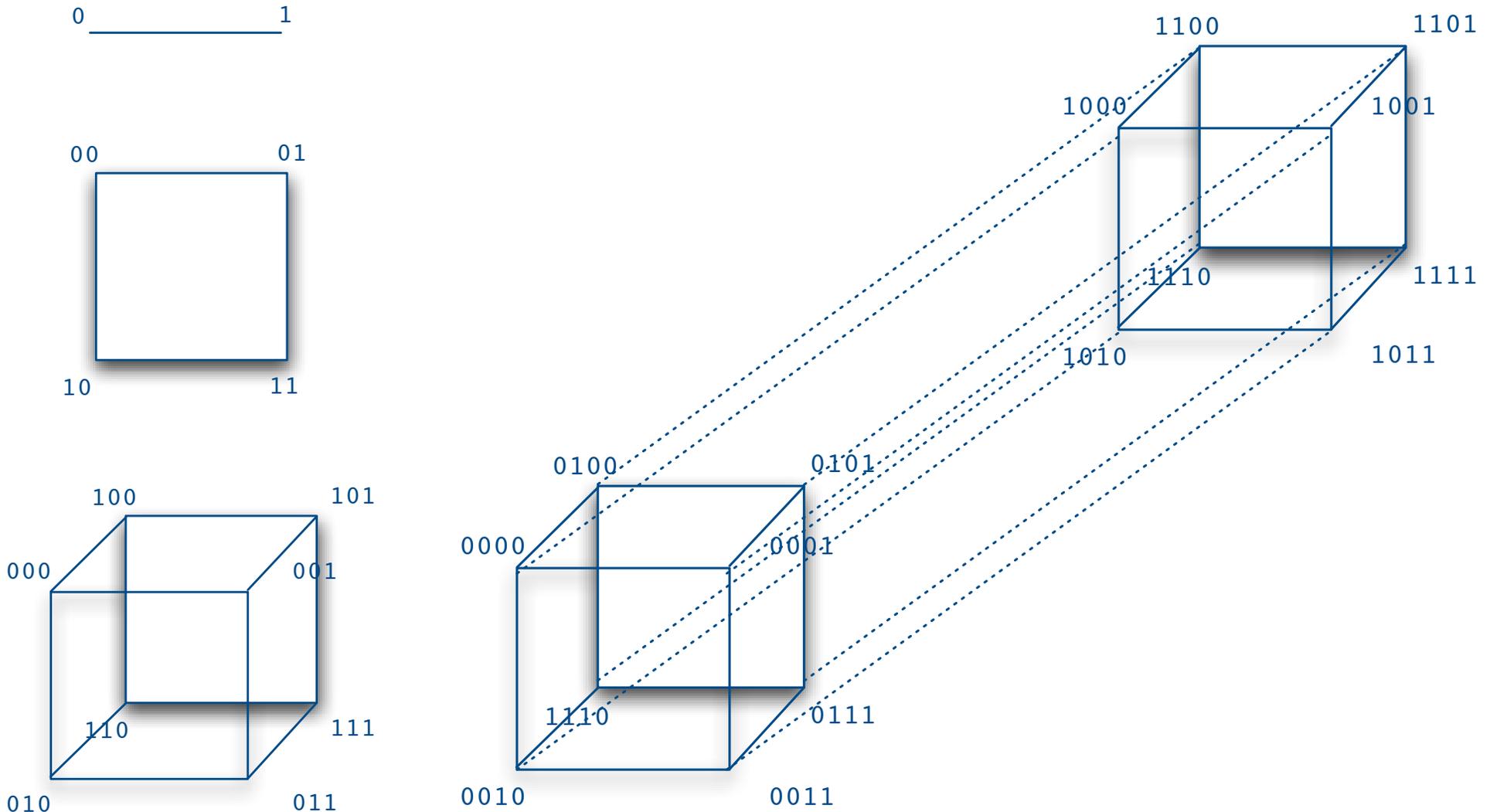
0111100 est de 3.

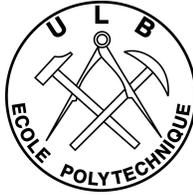
Un  $n$ -cube est un cube à  $n$ -dimensions avec  $2^n$  sommets.

Un  $n$ -bit string est représenté comme un des sommets binaires d'un  $n$ -cube.

Sommets adjacents ont une distance de Hamming de 1.

Représentation graphique des  $n$ -cubes pour  $n = 1, 2, 3$  et  $4 \dots$





## Principe général

- Avec un mots de  $n$ -bits on peut coder  $2^n$  mots différents.
- On peut imaginer utiliser que la moitié des mots pour les **codes corrects** et l'autre moitié pour les **codes erronés**.
- En fait pour un mot de  $n$ -bits, en ajoutant 1 bit en plus nous avons  $n$  mots supplémentaires que l'on pourrais qualifier d'erronés.
- Pour un code détecteur d'erreur - dans certains conditions (erreur de transmission p.e.):

Le **code correct** est transformé en **code erroné**.



## Codes de parité paire ou impaire (*Even (odd) parity codes*)

- Un mot de  $n$ -bits est codé à l'aide de  $(n+1)$  bits
- Nous avons le même nombre de mots corrects et le même nombre de mots erronés.
- Critère de correction représenté par le bit  $(n+1)$ :
  - On compte le nombre de '1' dans le mot, le bit de parité  $y$  compris — on a deux situations possibles:
    - **Bit de parité paire** — '1' → si c'est un nombre paire
    - **Bit de parité impaire** — '1' → si c'est un nombre impaire

## Exemple

Pour chaque **mot** on compte le nombre des '1' (bit de parité y compris)

0 '1' bit parité impaire =1

1 '1' bit parité paire =1

2 '1' bit parité impaire =1

.

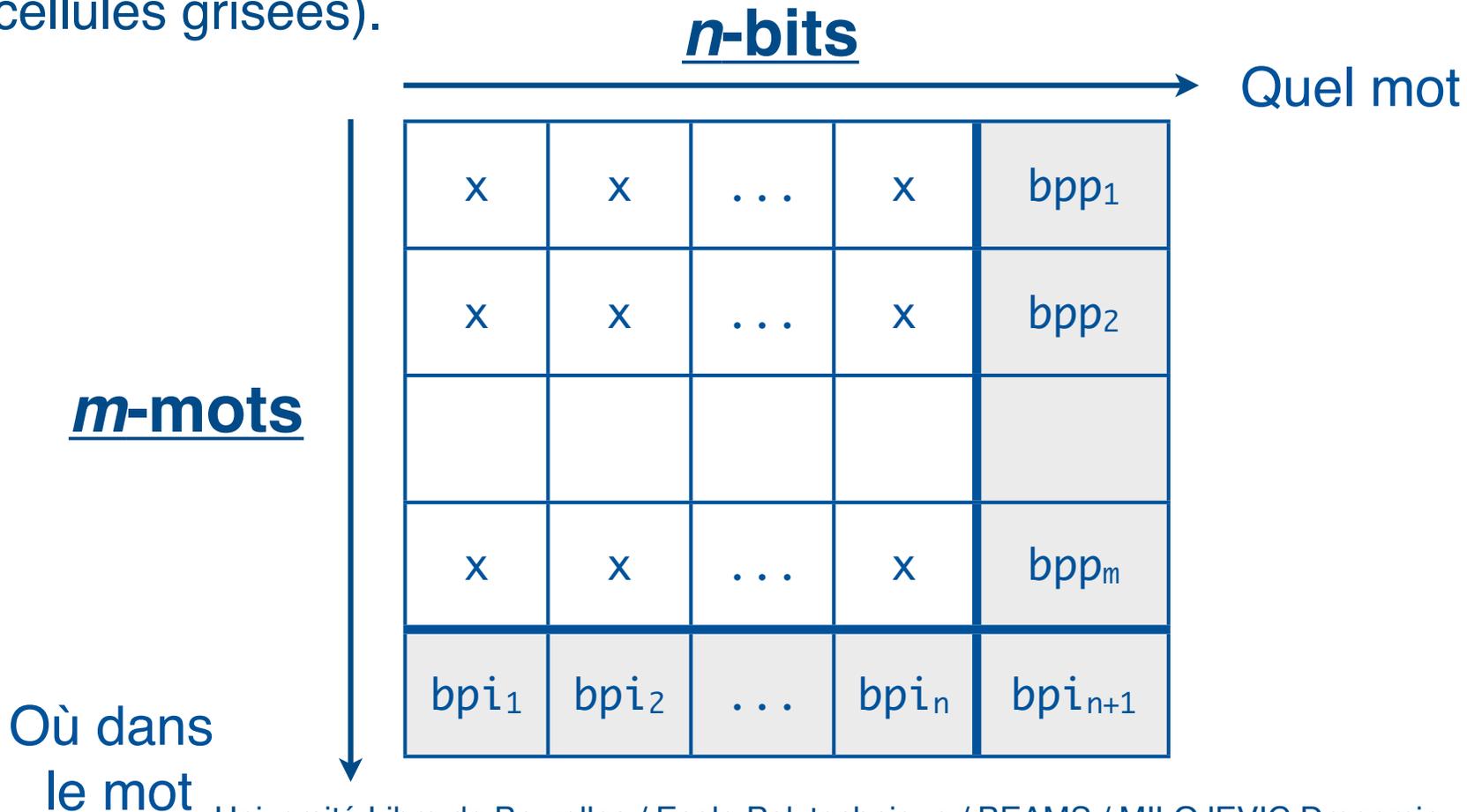
.

.

	b <sub>4</sub>	b <sub>3</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>1</sub>	b <sub>0</sub>	Paire	Impaire
0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0
2	1	1	0	0	0	0	1
.	0	1	1	1	0	1	0
.	1	0	1	1	1	0	1
.	1	1	1	1	1	1	0

## On veut transmettre $m$ -mots de $n$ -bits

On ajoute à chaque mot un bit de parité (les mots à transmettre sont alors de  $(n+1)$  bits). A la fin de la transmission, on ajoute un mot de  $(n+1)$  bits de parité, calculés sur tous les bits des mots transmises ayant le même poids (cellules grisées).



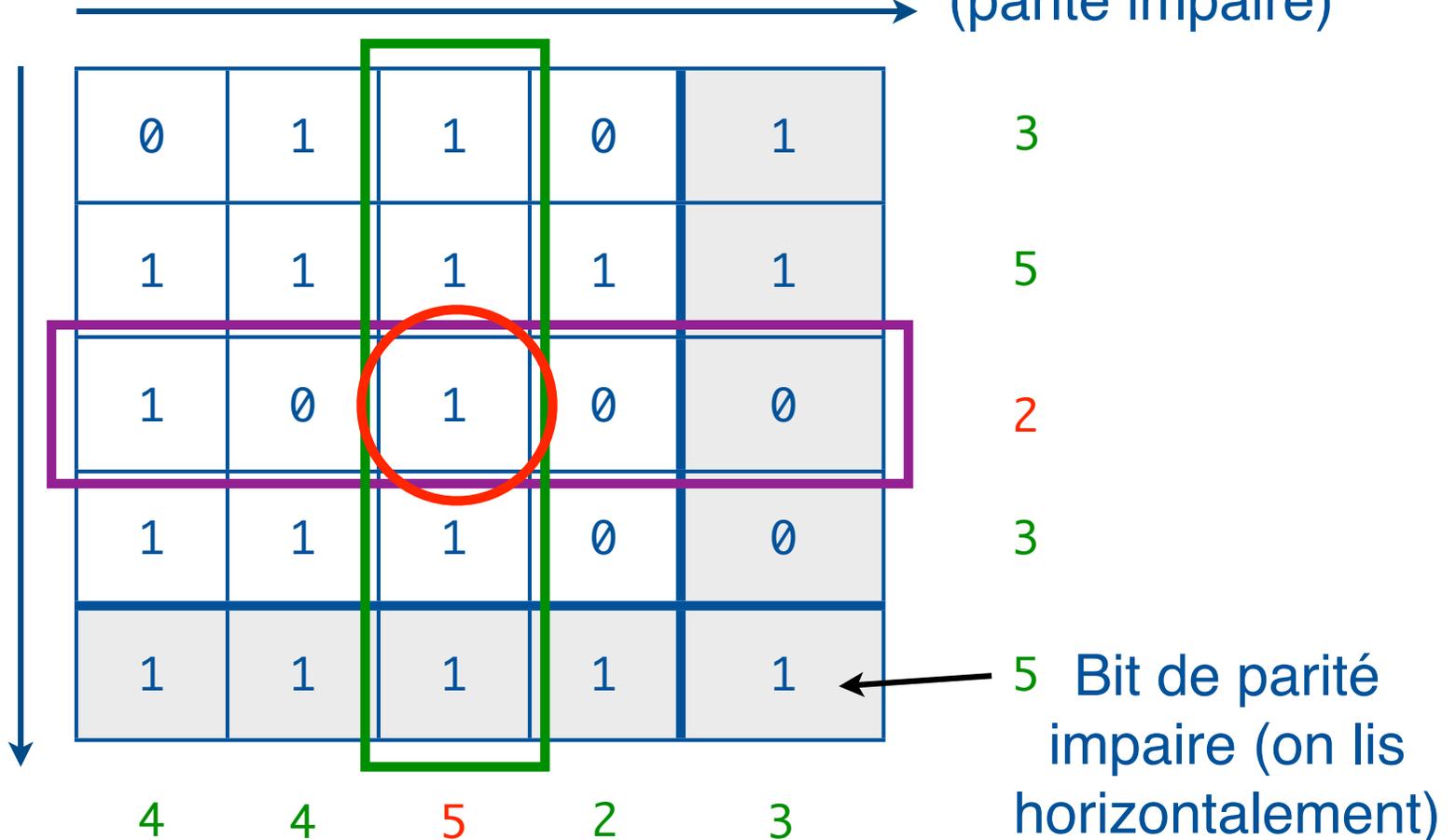
# 2. Exemple concret

On veut transmettre 4-mots de 4-bits – 25 bits en tout

4-bits

Quel mot  
(parité impaire)

4-mots  
Ou dans  
le mot  
(parité paire)





## Repères historiques

**1847** - G. Boole :

*“The mathematical analysis of logic”*

**1904** - E. V. Huntington :

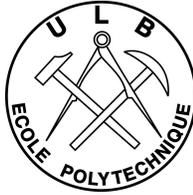
Définition formelle d’algèbre de Boole, telle que l’on la présente aujourd’hui

**1938** - C. E. Shannon :

Montre le lien entre l’algèbre de Boole à deux valeurs et les propriétés de certains circuits électriques. Naissance de l’algèbre de commutation (*Switching Algebra*)

*“Shannon's thesis is possibly the most important, and also the most famous, master's thesis of the century”.*

Howard Gardner, Harvard University



## Définition de l'algèbre de Boole

- ❖ Algèbre de Boole est un quadruplet  $\{B, ', \bullet, +\}$ , où:
  - ♦  $B$  est un ensemble de deux éléments
  - ♦  $'$  est l'opérateur de complément (parfois barre verticale au dessous de symbole)
  - ♦  $\bullet$  est l'opérateur ET
  - ♦  $+$  est l'opérateur OU
- ❖ En fonction de la définition de l'ensemble  $B$  et des 3 opérateurs, on peut définir **plusieurs** algèbres de Boole.

# 3. Algèbre de Boole

## Cas à 2 valeurs

Parmi les différentes Algèbres de Boole nous nous intéressons à celle introduite par Shannon.

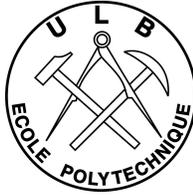
Algèbre de Boole à **deux valeurs** (*Two-valued Boolean algebra*):

1.  $B = \{0, 1\}$  où '0' - faux et '1' - vrai
2. Deux opérateurs binaires :
  - + OU inclusif (OR)    et    • ET (AND)

Opérateurs : Représentation par **Table de Vérité**

### Attention

- **et + ne sont pas des opérateurs arithmétiques !**



Pour qu'un quadruplet  $\{B, ', \bullet, +\}$  soit une algèbre de Boole, les axiomes suivantes doivent être satisfaites:

**Axiome 1.** B est **fermé** pour + et pour  $\bullet$

**Axiome 2.** B a un **neutre** pour + (noté 0) et pour  $\bullet$  (noté 1)

**Axiome 3.** B est **commutatif** par rapport à + et  $\bullet$

**Axiome 4.**  $\bullet$  **distribue** + et + distribue  $\bullet$

**Axiome 5.** **Complément** de x

**Axiome 6.** Il y a au moins 2 éléments  $x, y$  du B tels que  $x \neq y$

**Associativité** est une conséquence de ce qui précède:

$$(a+b)+c=a+(b+c) \text{ et } (a\bullet b)\bullet c=a\bullet(b\bullet c)$$

# 3. Algèbre de Boole

## Cas à 2 valeurs - opérateurs ET et OU

Les opérateurs  $\cdot$  et  $+$  définis par des **Tables de Vérités (TdV)** suivantes:

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

On peut vérifier les 6 axiomes posés par E. V. Huntington pour le cas de l'algèbre de Boole à deux valeurs  $B = \{0, 1\}$

**Axiome 1 :  $B = \{0, 1\}$  est fermé**

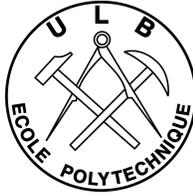
*Le résultat de chaque opération est bien dans le B.*

En examinant les tables de vérités pour les opérateurs  $+$ ,  $\bullet$ ,  $'$  :

x	x'
0	1
1	0

x	y	$x \bullet y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



## Axiome 2 : Neutre (pour les valeurs de B)

$0$  et  $1$  sont les neutres pour  $+$  et  $\bullet$  respectivement

On peut vérifier à l'aide de la définition des opérateurs  $+$  et  $\bullet$  (cf. les TdV des opérateurs).

Pour  $+$  :

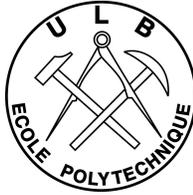
$$0 + 0 = 0$$

$$1 + 0 = 1$$

Pour  $\bullet$  :

$$0 \bullet 1 = 0$$

$$1 \bullet 1 = 1$$



## Axiome 3 : Commutativité

+ et  $\bullet$  sont commutatifs

+ est commutatif, on peut vérifier:

$$x + y = y + x$$

$$0 + 1 = 1 + 0$$

$$1 = 1$$

$\bullet$  est commutatif:

$$x \bullet y = y \bullet x$$

$$0 \bullet 1 = 1 \bullet 0$$

$$0 = 0$$

**Axiome 4 : Distributivité de  $\bullet$  par rapport à  $+$ <sup>a</sup>**

$$x \bullet (y+z) = x \bullet y + x \bullet z$$

x	y	z	y+z	$x \bullet (y+z)$	$x \bullet y$	$x \bullet z$	$x \bullet y + x \bullet z$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

**<sup>a</sup> Preuve par table de vérité**

**Axiome 4 : Distributivité de + par rapport à •**

$$x+(y\bullet z)=(x+y)\bullet(x+z)$$

x	y	z	$y\bullet z$	$x+(y\bullet z)$	$x+y$	$x+z$	$(x+y)\bullet(x+z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

## Axiome 5: Compléments

'0' et '1' sont des compléments respectifs:

$$0 + 0' = 0 + 1 = 1$$

$$0 + 1' = 0 + 0 = 0$$

$$0 \bullet 0' = 0 \bullet 1 = 0$$

$$0 \bullet 1' = 0 \bullet 0 = 0$$

Le complément introduit un troisième opérateur : NON (NOT)

x	y=NOT(x)
0	1
1	0



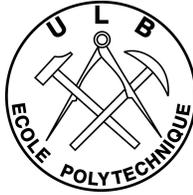
**Axiome 6 :**

**Il y a au moins 2 éléments  $x, y$  du  $B$  tels que  $x \neq y$**

Soit  $B = \{0, 1\}$

Il y a deux éléments différents dans le  $B = \{0, 1\}$ .

Et  $0 \neq 1$  ,  $1 \neq 0$



## Les 7 théorèmes de base de l'algèbre de Boole

On peut les prouver à l'aide des Axiomes ou des TdV.

- ♦ **Th1:** Idempotence pour + et ●

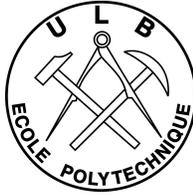
$$x+x=x \quad \text{et} \quad x \bullet x=x$$

- ♦ **Th2:**

$$x+1=1 \quad \text{et} \quad x \bullet 0=0$$

- ♦ **Th3:** Absorption

$$x \bullet (x+y)=x$$



- ❖ **Th4:** Involution

$$(x')' = x$$

- ❖ **Th5:** Associativité

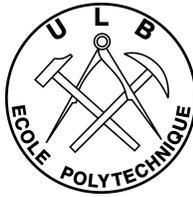
$$(x+y)+z=x+(y+z) \quad \text{et} \quad (x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$$

- ❖ **Th6:** Lois de De Morgan

$$(x+y)' = x' \bullet y' \quad \text{et} \quad (x \bullet y)' = x' + y'$$

- ❖ **Th7:** Consensus

$$x \bullet y + x'z + y \bullet z = x \bullet y + x'z$$



- ❖ En partant d'un énoncé chaque étape de démonstration est franchi à l'aide d'un des axiomes ou des théorèmes déjà prouvé
- ❖ On précise à chaque étape l'axiome ou le théorème appliqué
- ❖ Exemple:  
Preuve de **Th1**

$$\begin{aligned}
 x+x &= (x+x) \bullet 1 \\
 &= (x+x)(x+x') \\
 &= x+x \bullet x' \\
 &= x+0 \\
 &= x
 \end{aligned}$$

Ax2. Neutre

Ax5. Complément

Ax4. Distributivité

Ax5. Complément

Ax2. Neutre

# 3. Démonstrations par TdV

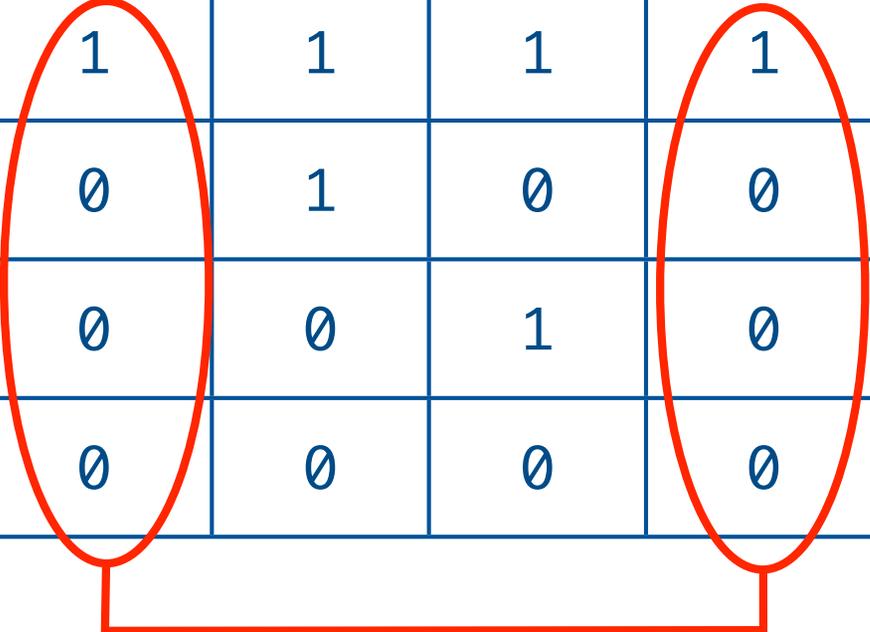


- ❖ Algèbre de Boole à deux variables:
  - ✦ Théorèmes sont des problèmes combinatoires:  
on peut prouver un énoncé à l'aide d'une **Table de Vérité**
- ❖ Nombre de variables détermine le nombre de lignes de la TdV
- ❖ Pour chaque côté de l'expression nous avons une TdV (2 donc)
- ❖ Deux côtés de l'égalité doivent avoir les mêmes valeurs: on compare les deux TdV
- ❖ L'identité de deux colonnes prouve le théorème

## Théorème de De Morgan

$$(x+y)' = x' \bullet y'$$

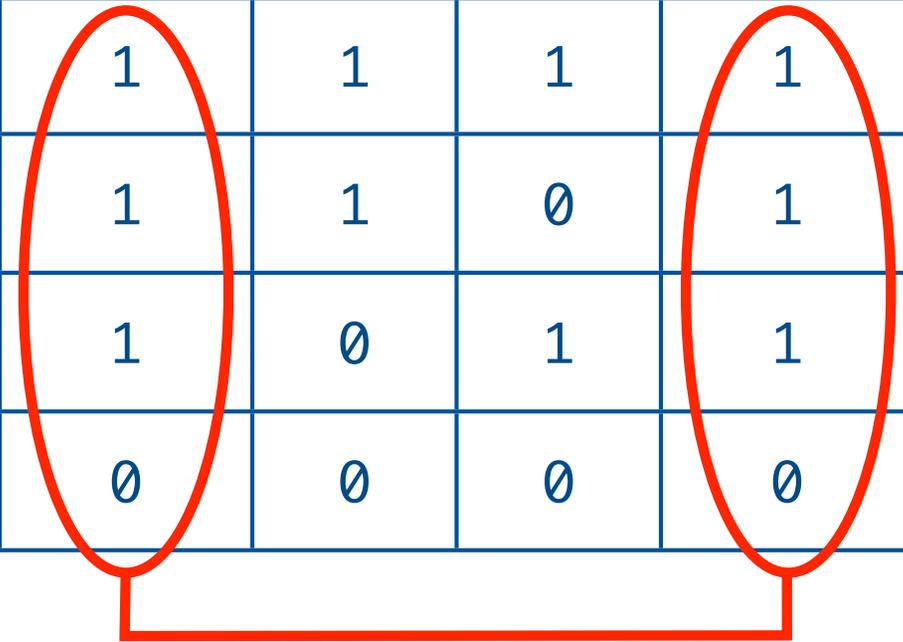
x	y	x+y	$(x+y)'$	$x'$	$y'$	$x' \bullet y'$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0



## Théorème de De Morgan

$$(x \bullet y)' = x' + y'$$

x	y	$x \bullet y$	$(x \bullet y)'$	$x'$	$y'$	$x' + y'$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0



# 3. Principe de dualité



- ❖ Dans une algèbre de Boole, tout résultat se présente sous deux formes **duales**.
- ❖ Soit  $s$  un résultat, son dual  $s^*$  s'obtient en **permutant** systématiquement :
  - ◆ les opérateurs  $+$  et  $\cdot$
  - ◆ les symboles  $0$  et  $1$  de  $B$

**Si un résultat  $s$  est vrai dans une algèbre de Boole, il en est de même pour son dual!**

## Exemples

- ❖ Soit  $S$  le résultat suivant :

$$\forall x, x \in B, x+x=x, \text{ règle d'idempotence}$$

son dual  $S^*$  est :

$$\forall x, x \in B, x \bullet x = x$$

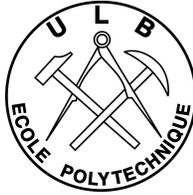
- ❖ De Morgan:

- ♦ Puisque:

$$(x+y)' = x' \bullet y' \text{ est vraie}$$

- ♦ alors

$$(x \bullet y)' = x' + y' \text{ est vraie aussi}$$



## Généralisation

On peut généraliser pour une expression Booléenne à  $n$  – variables.

$$\forall x_i, x_i \in B, E(x_1, \dots, x_n) \rightarrow E^*(x_1, \dots, x_n)$$

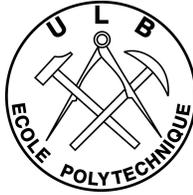
## Exemple d'application:

Extension de De Morgan sur  $n$  – variables

$$(x_1 + \dots + x_n)' = x_1' \bullet \dots \bullet x_n'$$

et aussi

$$(x_1 \bullet \dots \bullet x_n)' = x_1' + \dots + x_n'$$



## Algèbre à 2 valeurs

C'est une algèbre complète:

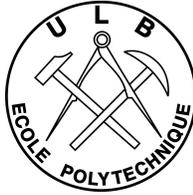
- $B = \{0, 1\}$
- Deux opérateurs:
  - \* ET (AND)
  - \* OU (OR)
  - \* plus 1 opérateur dérivé NON (NOT)
- Pour chaque opérateur on construit un composant physique.
- Assemblage des différents composants (portes) permet la réalisation physique des expressions.
- Plusieurs modes de représentation:
  - A. Fonctions Logiques
  - B. Logigrammes
  - C. Tables de vérité

# 4. Fonctions logiques



- ❖ **Variables**  $a, b, c, \dots$
- ❖ **Opérateurs** ET, OU, NON (AND, OR et NOT)
- ❖ **Evaluation** =
- ❖ **Parenthèses**  
sens de gauche à droite, depuis les “entrées” jusqu’aux “sorties”
  - ◆ **Entrées:** arguments d’une fonction logique
  - ◆ **Sorties:** évaluation de(s) la(es) fonction(s)
- ❖ Une fonction logique pour chaque variable de sortie. On peut avoir dans un même système plusieurs sorties, chaque sortie aura une fonction logique qui lui est propre.

# 4. Fonctions logiques



## Formes de représentation des fonctions logiques:

- A. **Fonctions** — pratique pour une manipulation manuelle, “crayon et papier”; représentation compacte pour un faible nombre de variables.
- B. **Schématique** — représentation graphique; proche du monde de la réalisation physique; facile à comprendre (mais peut être très compliqué pour un grand nombre arguments); beau à voir.
- C. **Tables de Vérité** — Représentation tabulaire, proche de la représentation de type mémoire numérique (style *Look-up-Table*).

**Quelque soit la forme initiale, la fonction peut être transformée d'une forme à l'autre, même de façon automatique.**

## Exemple de formalisme

$$F = xz + xy'z' + x'yz'$$

$$= x \bullet z + x \bullet y' \bullet z' + x' \bullet y \bullet z'$$

$$= \text{ET}(x, z) + \text{ET}(x, y', z') + \text{ET}(x', y, z')$$

$$= \text{OU}(\text{ET}(x, z), \text{ET}(x, y', z'), \text{ET}(x', y, z'))$$

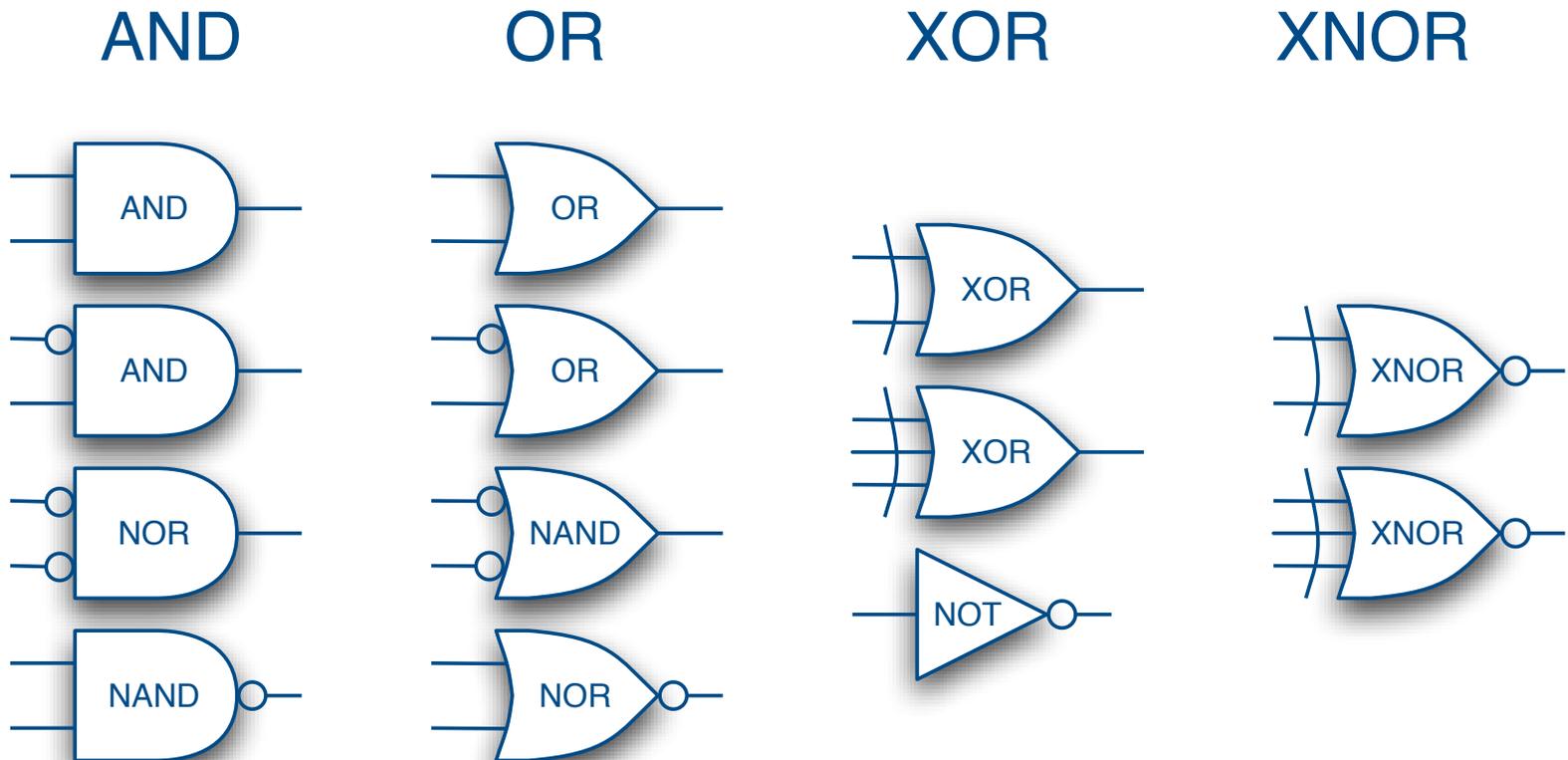
$$= \text{OU}(\text{ET}(x, z), \text{ET}(x, \text{NON}(y), \text{NON}(z)), \text{ET}(\text{NON}(x), y,$$

$$\text{NON}(z)))$$

Le résultat est au format de type **Somme de Produit – SdP** (un opérateur **OU** qui réuni les différents termes **ET**).

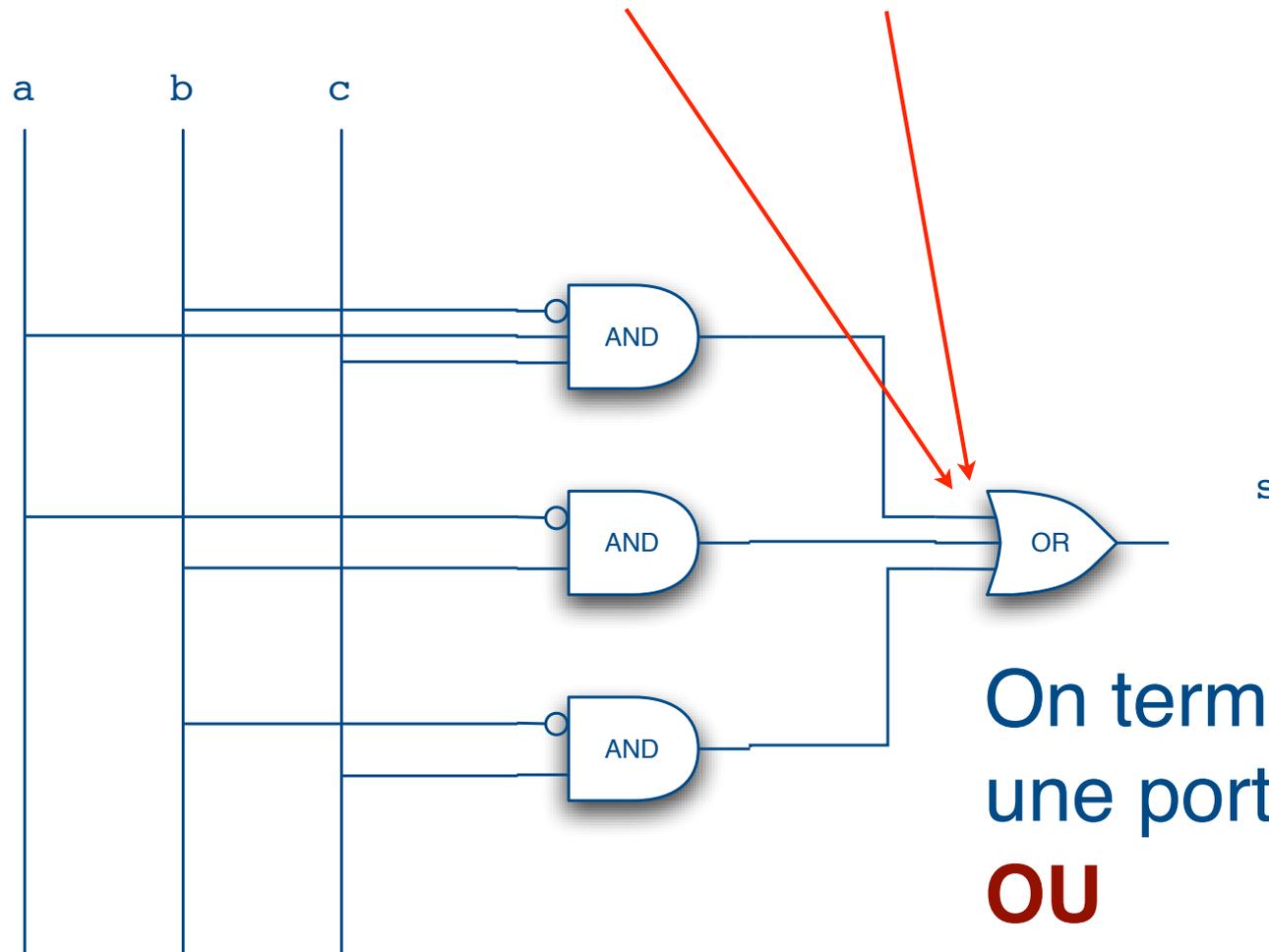
## Schémas : assemblages des opérateurs élémentaires

Symboles des opérateurs élémentaires par classe:



Un circuit sous forme de **Somme de Produits - SdP** ( $\sum \pi$ )

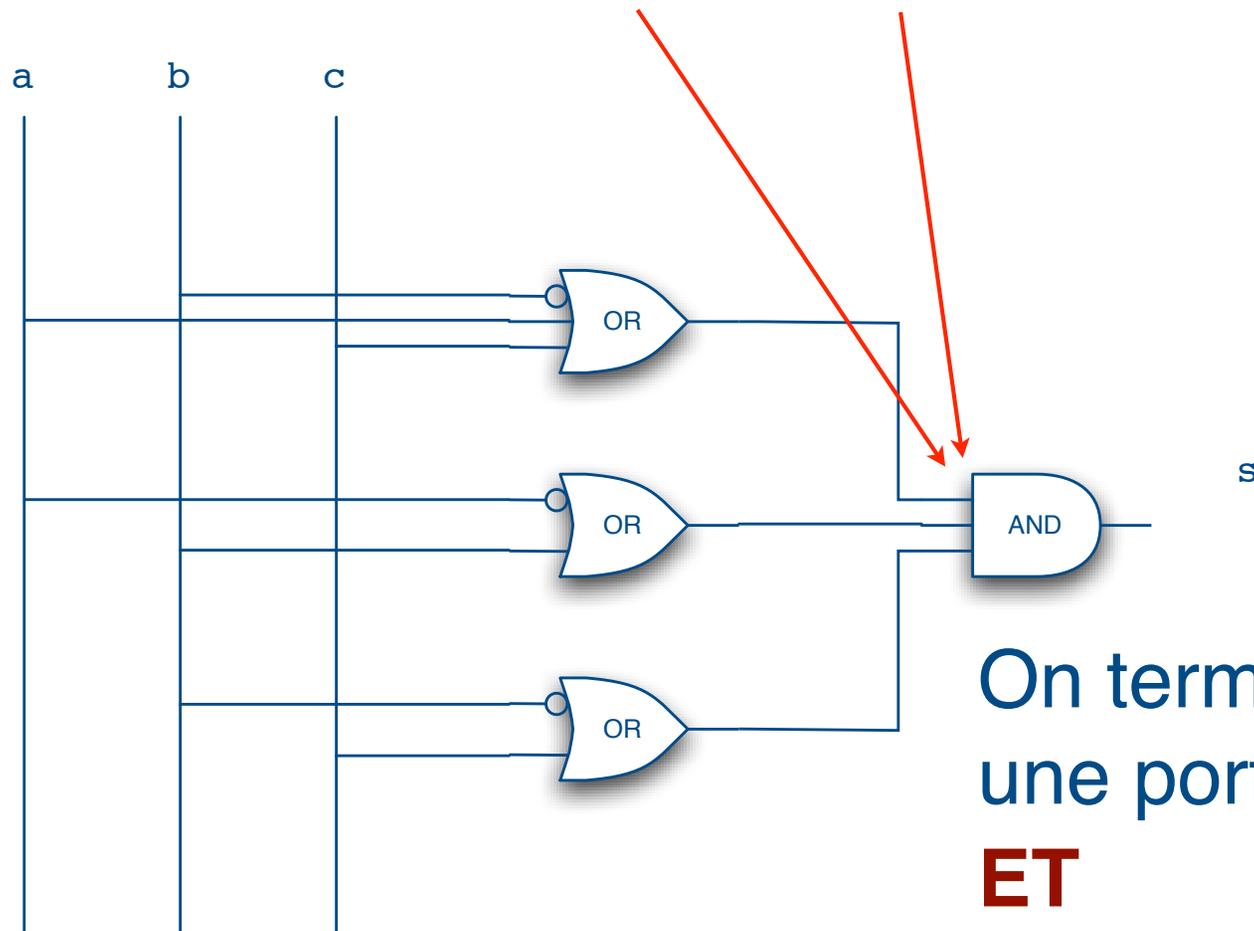
$$s = (a \cdot \bar{b} \cdot c) + (\bar{a} \cdot b) + (\bar{b} \cdot c)$$



# 4. Logigrammes

Un circuit sous forme de **Produit de Sommes - PdS** ( $\pi\Sigma$ )

$$s = (a + \bar{b} + c) \cdot (\bar{a} + b) \cdot (\bar{b} + c)$$



## Table de Vérité (TdV) et Somme de Produits

x	y	z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

F
1
1
0
1
0
0
1
1

+

+

+

+

+

F vaut 1 lorsque x ET y

ET z valent:

0 ET 0 ET 0 **OU**

0 ET 0 ET 1 ...

## SdP

$$F = x'y'z' + x'y'z + x'yz + xyz' + xyz$$

## Table de vérité (TdV) et Produit de Somme

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

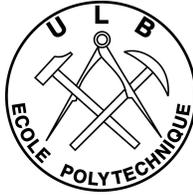
En partant à l'envers: F vaut 1 lorsque xyz ne valent pas 010 ...

$$F = (x'yz')' \\ (xy'z')' \\ (xy'z)'$$

**PdS**

$$F = (x+y'+z)(x'+y+z)(x'+y+z')$$

# 5. Réalisation matérielle



- ❖ Composants **physiques** (électroniques) permettant la réalisation **matérielle (hardware)** des portes logiques (et donc des fonctions logiques)
- ❖ Différentes technologies: relais (électro-mécaniques), tubes électroniques, transistors, ... A partir du moment où le composant est capable de jouer le rôle d'interrupteur on peut réaliser les différentes portes logiques.
- ❖ Au départ ces composants ont été créés pour des besoins “électriques”:
  - ✦ **Diode — Redressement** : Transformer l'alternatif en continu
  - ✦ **Transistor — Amplification** : Augmenter l'amplitude de la tension (courant)

Le choix de la technologie de fabrication de CI a un impact sur certains nombre de paramètres, toujours d'actualité:

## 1. Espace utilisé - encombrement

En fonction de la technologie le nombre de portes logiques:

- SSI - *Small Scale Integration*: 1 à 10 portes par circuit
- MSI - *Medium Scale Integration*: 10 à 100
- LSI - *Large Scale Integration*: 100 à 100 000
- VLSI - *Very Large Scale Integration*: entre 100 000 à 1 million
- Actuellement ~ milliard

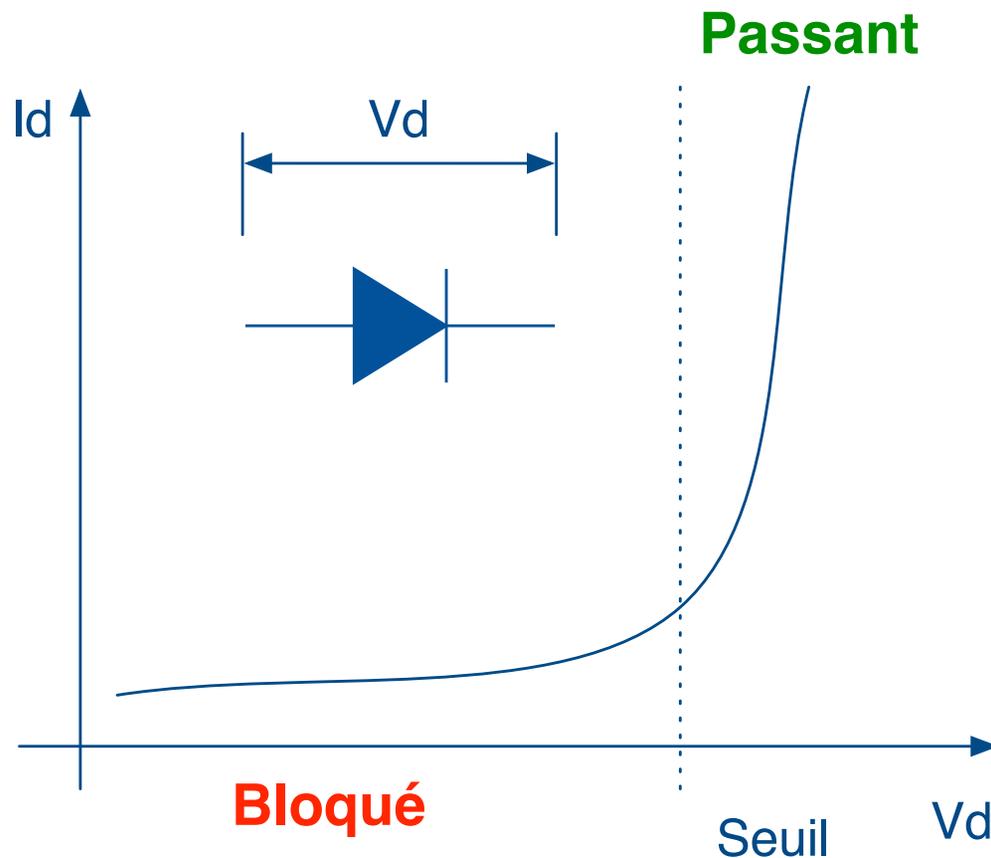
## 2. Fréquence maximale de commutation

Vitesse de circuit = “vitesse de calcul de la fonction logique”

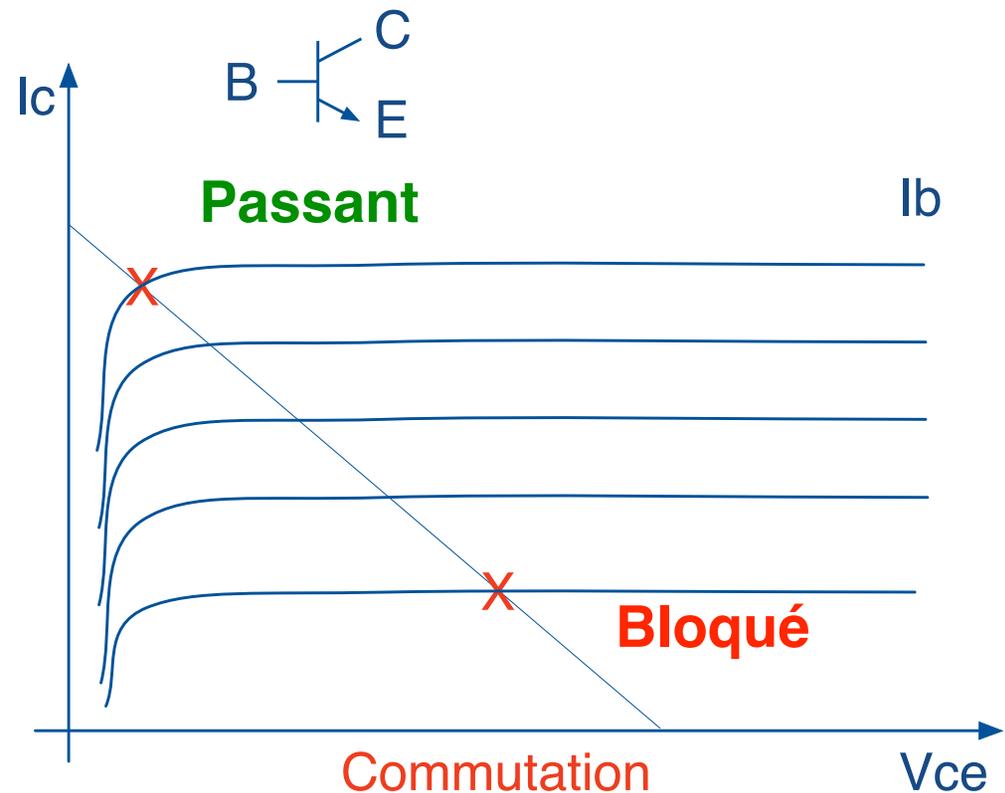
## 3. Puissance dissipée

Lié à la consommation (écologie, autonomie) et refroidissement

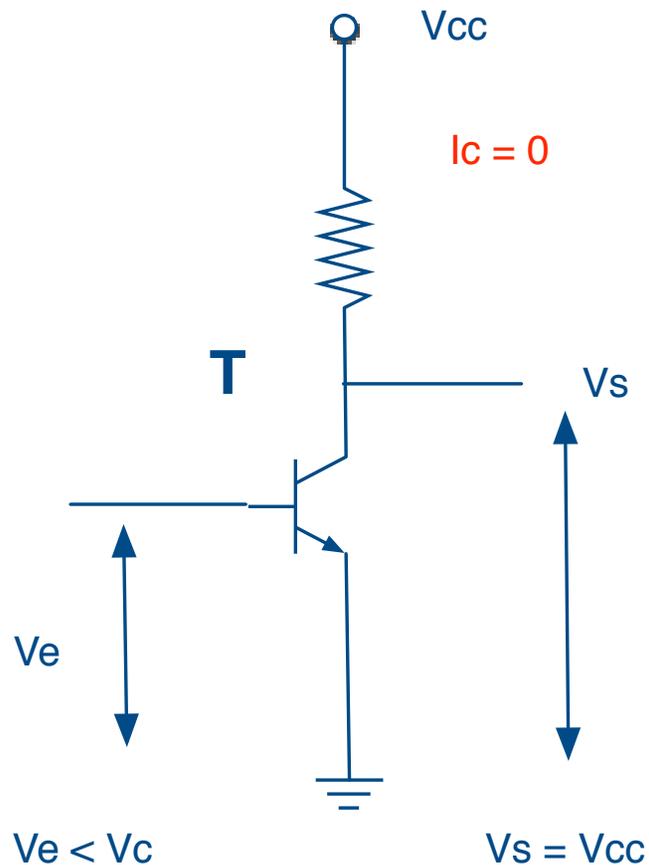
**Diode:** un interrupteur



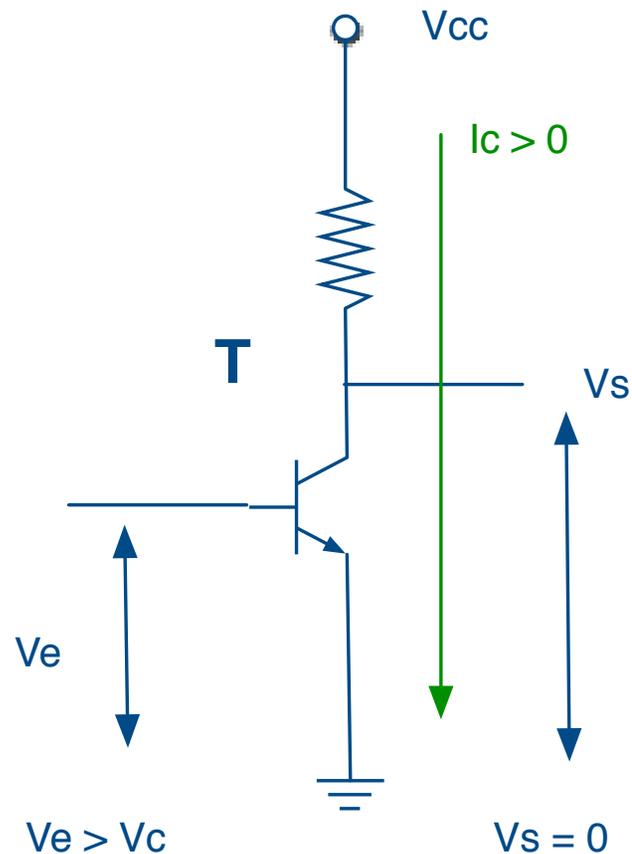
**Transistor:** amplificateur qui peut fonctionner comme un interrupteur



## Montage: Transistor comme interrupteur



**T est bloqué**



**T est passant**

$V_{cc}$  - Alimentation

$V_e$  - Tension "Entrée"

$V_s$  - Tension "Sortie"

$V_c$  - Seuil

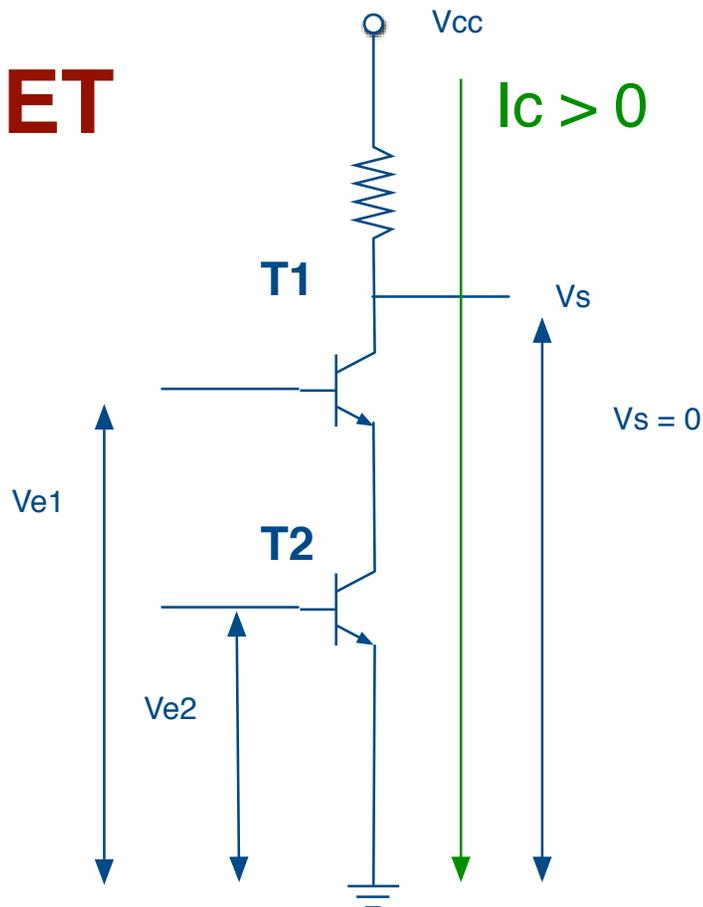
$V_s = V_{cc}$  - '1' logique

$V_s = 0$  - '0' logique

## Portes logiques à l'aide des transistors: NAND et NOR

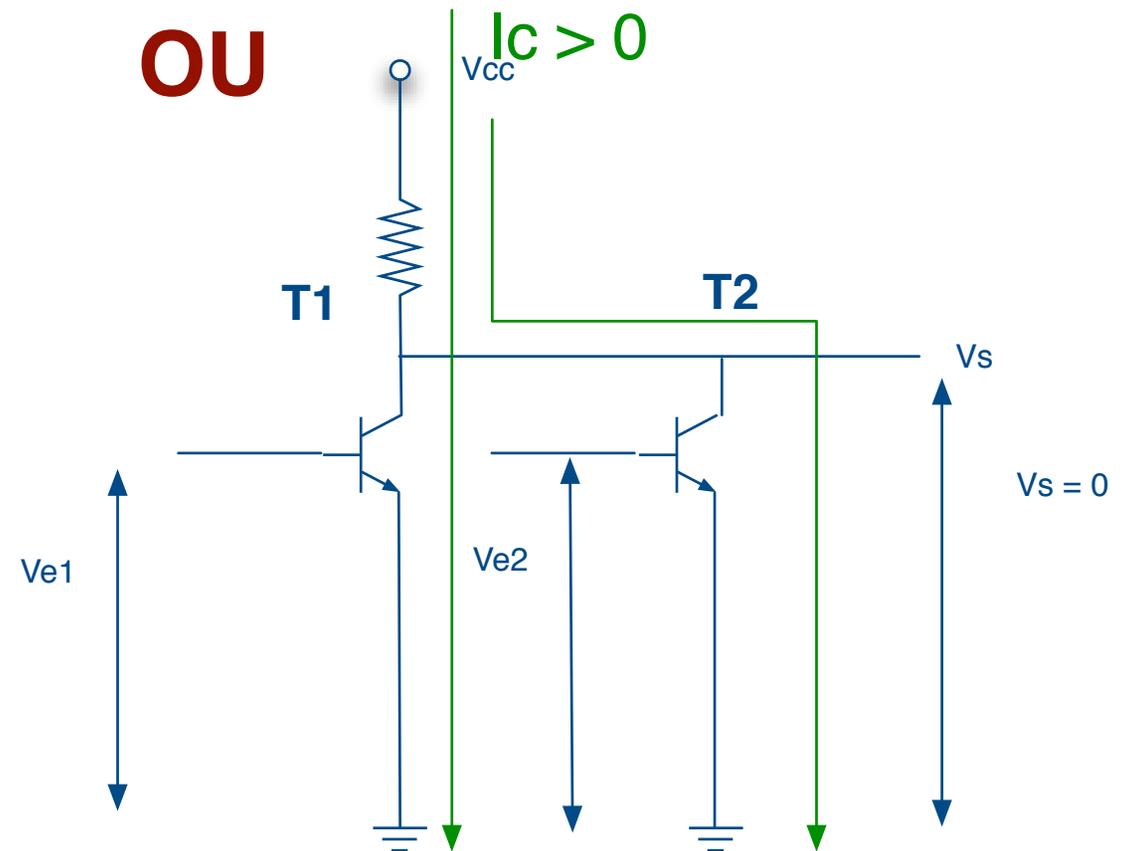
Mise en série et parallèle de 2 transistors.

### ET



$V_{e1} \text{ ET } V_{e2} > V_c$

### OU



$V_{e1} \text{ OU } V_{e2} > V_c$