

2.4 - Composants réactifs et outils associés

Les 7 "péchés capitaux"

- ▶ 1) utiliser les mauvaises unités
 - ▶ 2) utiliser des ordres de grandeur non réalistes
 - ▶ 3) ne pas définir (sens des flèches, nom, etc) les grandeurs utilisées dans les équations
 - ▶ 4) appliquer les théorèmes linéaires sur des systèmes non-linéaires
- ▶ 5) mal utiliser les axes dans un plan de Bode
 - ◆ ex: graphe à l'envers, log du log, etc
 - ▶ 6) utiliser les phaseurs pour calculer une réponse indicielle
 - ▶ 7) proposer pour une capacité ou une inductance un comportement non réaliste
 - ◆ = comportement contredisant les lois temporelles ou l'impédance

Plan

- ▶ Plan du module

- ◆ 2.4.1 - Analyse temporelle
- ◆ 2.4.2 - Analyse fréquentielle (I): impédances
- ◆ 2.4.3 - Analyse fréquentielle (II): fonctions de transfert

2.4.1 - Analyse temporelle

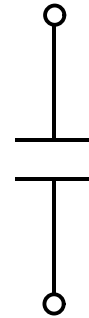
Introduction

► dipôles réactifs

- ◆ inductance et capacité
- ◆ ne consomment pas de puissance
- ◆ stockent/restituent de l'énergie
 - électrostatique pour la capacité
 - magnétique pour l'inductance
- ◆ "duals" l'un de l'autre



$$v = L \cdot (di/dt)$$



$$C \cdot (dv/dt) = i$$

► que faire de C ou L dans un circuit?

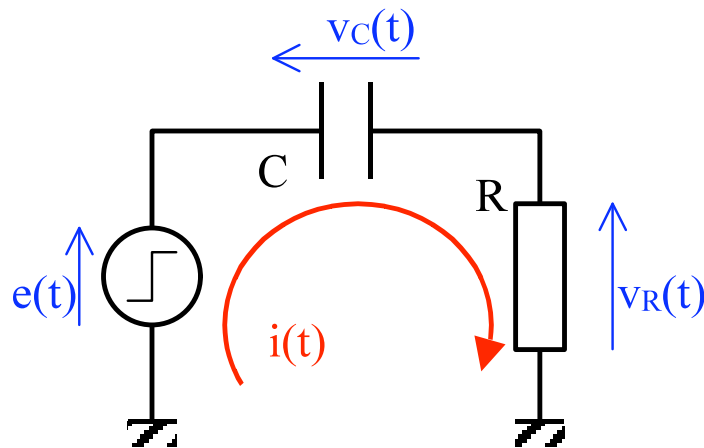
- ◆ 2 aspects: [temporel](#) et [fréquentiel](#)

Capacité: comportement temporel

- ▶ charge et décharge
 - ◆ charge = augmentation de la |tension|
 - capacité chargée = tension >0 ou tension <0
 - ◆ décharge = diminution de la |tension|
 - capacité déchargée = tension nulle
- ▶ 3 lois fondamentales
 - ◆ c'est la ddp qui régit la charge/décharge
 - ◆ loi HF: la ddp ne varie pas instantanément
 - ◆ loi BF: pour $t \gg$, le courant est nul
 - mais pas forcément la ddp!
- ▶ application: circuit RC

Circuit RC en temporel: circuit à résoudre

- ▶ réponse à un échelon E en $t=0$

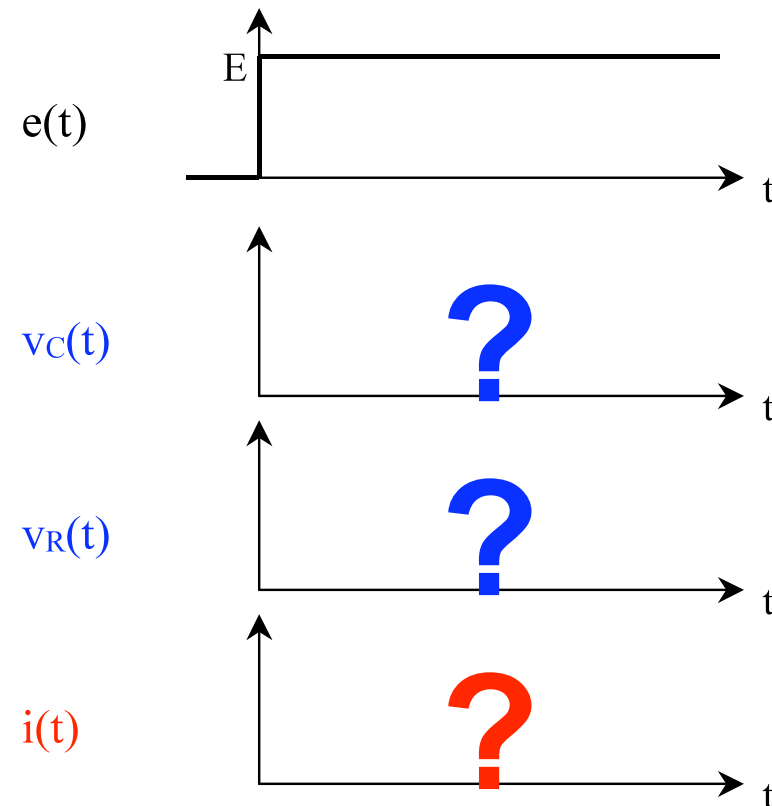


constatations

$$e(t) = v_R(t) + v_C(t)$$

un seul courant

$$i(t) = v_R(t)/R$$



Circuit RC en temporel: résolution analytique pour $t > 0$

loi des mailles

$$e(t) = v_R(t) + v_C(t)$$

loi des composants

$$\begin{cases} v_R(t) = R.i(t) \\ v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi + v_C(0) \end{cases}$$

=>

$$e(t) = R.i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi + v_C(0)$$

dérivation

$$\frac{de(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} .i(t) = 0$$

équa. dif. 1er ordre

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} i(t)$$

Circuit RC en temporel: résolution analytique pour $t > 0$

- ♦ solution du type:
 - exponentielle décroissante

$$i(t) = A.e^{\frac{-t}{RC}}$$

"A" fixé par conditions initiales

capa déchargée = $v_C(0)=0$

$\Rightarrow v_R(0)=E$

$\Rightarrow i(0) = E/R = A$

solution:

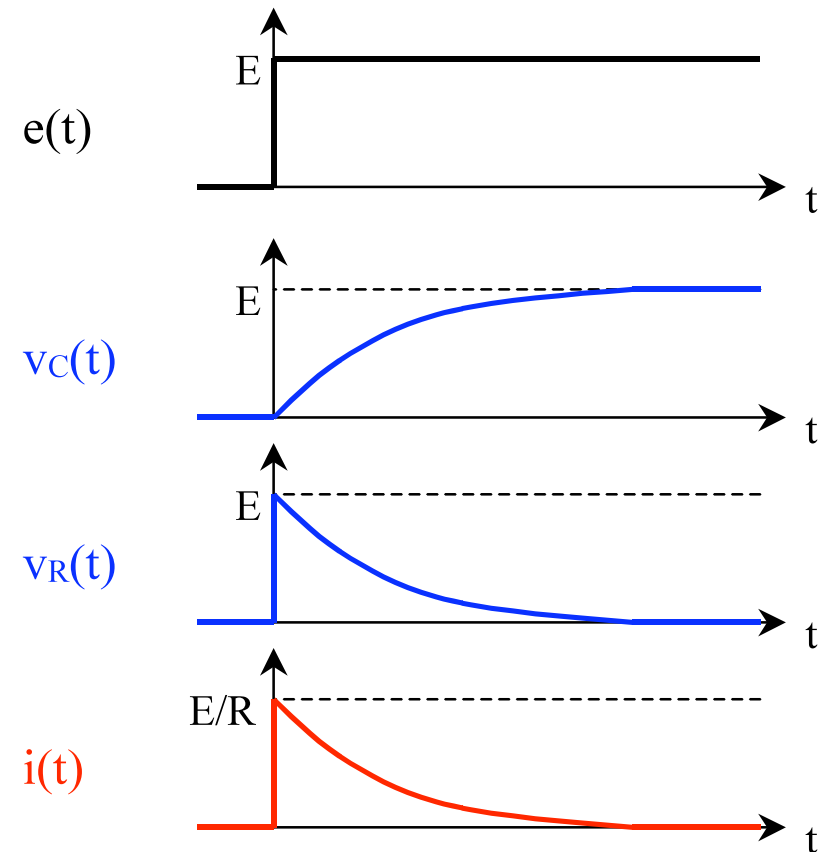
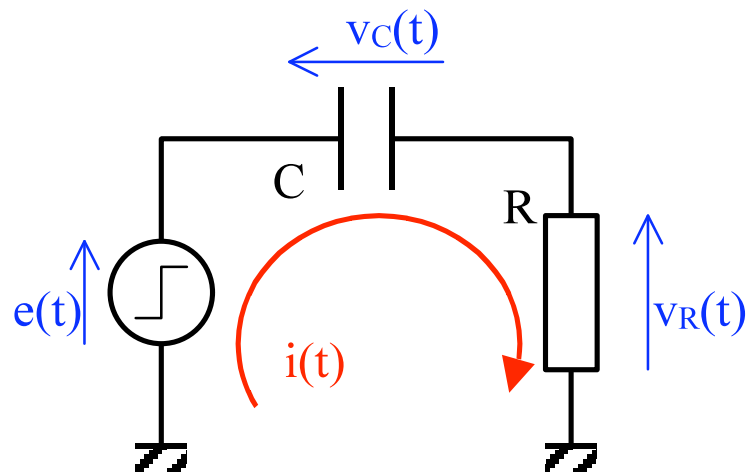
$$i(t) = \frac{E}{R}.e^{\frac{-t}{RC}}$$

$$v_R(t) = R.i(t) = E.e^{\frac{-t}{RC}}$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi = E. \left(1 - e^{\frac{-t}{RC}} \right)$$

Circuit RC en temporel: résultat

- ▶ réponse à un échelon E en $t=0$



Circuit RC en temporel: discussion

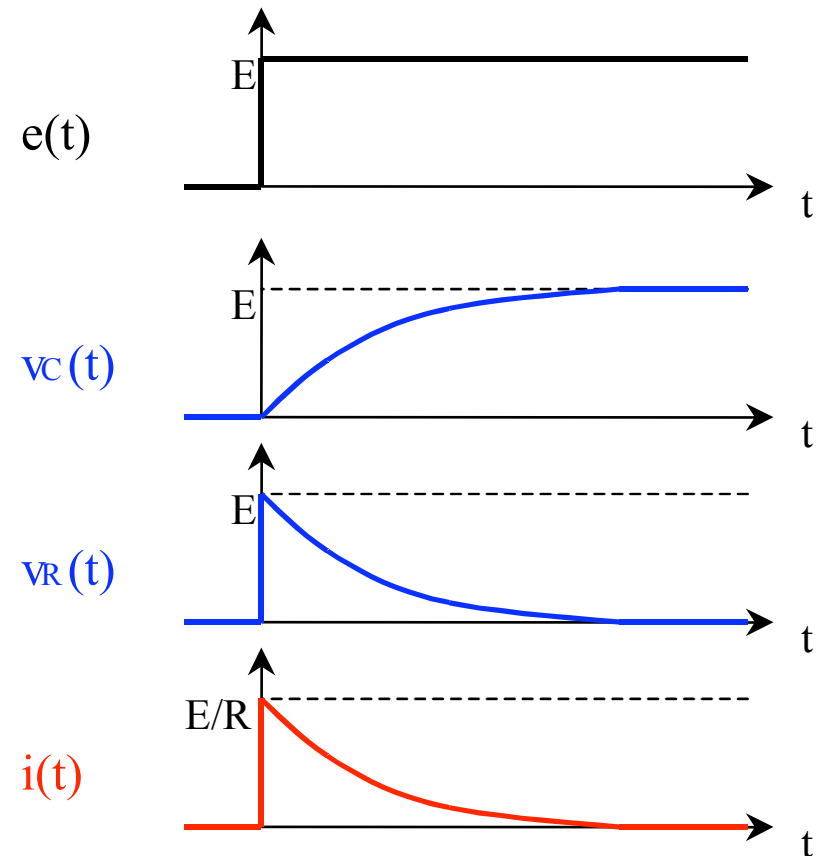
- ▶ résolution analytique: avantages
 - ◆ rassurant!
 - moyen préféré des étudiants
- ▶ inconvénients
 - ◆ lent
 - ◆ pas de "feeling"
 - si erreur => aberrations
 - ◆ peu transposable à d'autres circuits
- ▶ conclusion
 - ◆ intéressant pour une première fois mais pas comme outil de résolution!
 - ◆ >< démarche "ingénieur"

Circuit RC en temporel: résolution rapide

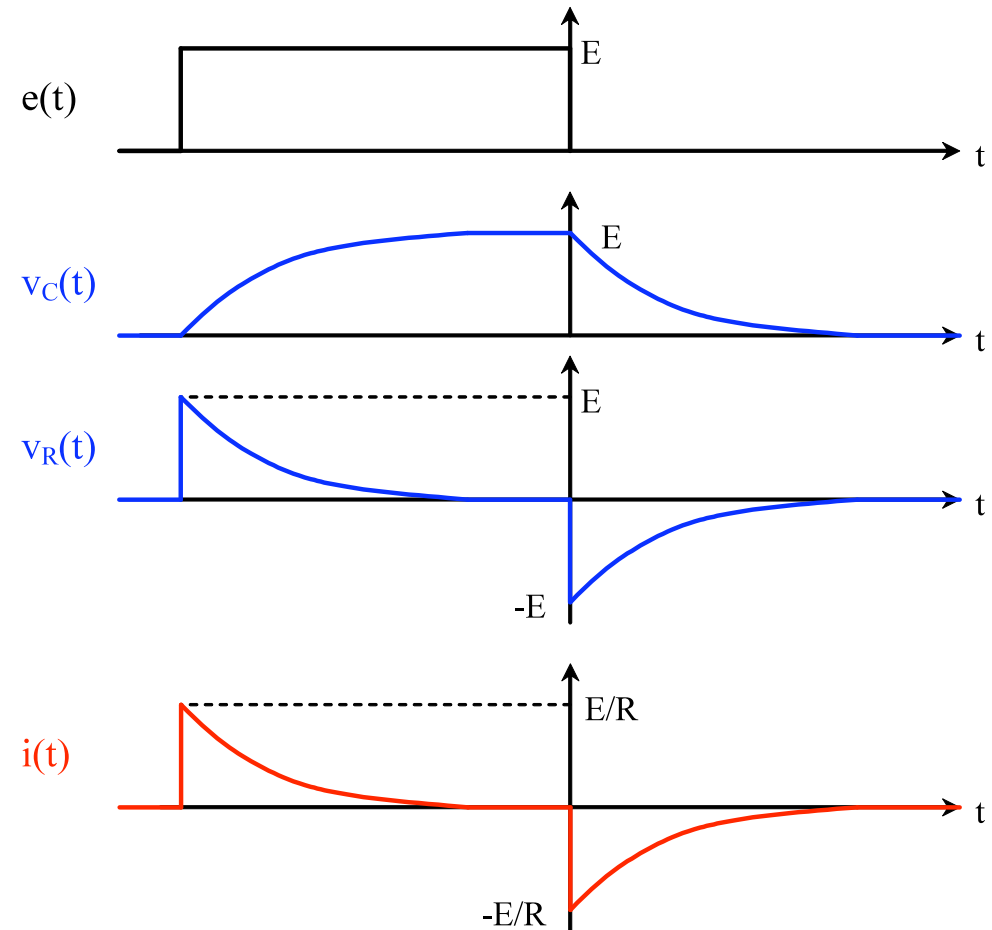
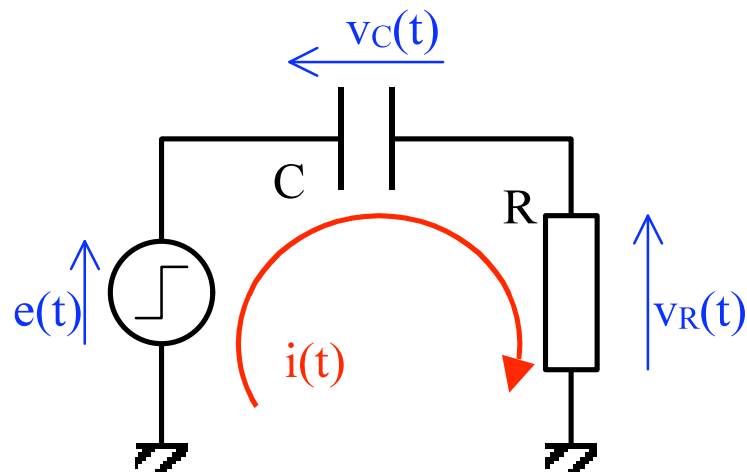
- ▶ rappel des 3 lois de la capacité:
 - ◆ c'est la **ddp** qui régit la charge/décharge
 - ◆ **loi HF**: la **ddp ne varie pas instantanément**
 - ◆ **loi BF**: pour **$t \gg$** , le **courant** est nul
 - mais pas forcément la ddp!

Circuit RC en temporel: résolution rapide (échelon +E)

- ◆ conditions initiales
 - $i=0$ (loi BF) ; $v_R=0$
 - $v_C=0$
- ◆ en $t=0$: échelon
 - $v_C=0$ (loi HF)
 - $v_R=E$; $i=E/R$
- ◆ ensuite
 - i non nul $\Rightarrow v_C$ croît (charge)
 - v_R décroît
 - exponentielles décroissantes
- ◆ $t \gg$
 - $i=0$ (loi BF) ; $v_R=0$
 - $v_C=E$



Circuit RC en temporel: résolution rapide (échelon -E)



► CCL

- ♦ passage en négatif à cause de la "rigidité" de la capa

Circuit RC en temporel: vocabulaire

- ▶ constante de temps

- ◆ temps caractéristique de la charge/décharge de la capa
 - 63% après τ
 - 95% après 3τ
 - 99% après 5τ

$$\tau = RC$$

- ▶ filtres

- ◆ $v_C(t)$ est un filtre passe-bas de $e(t)$
- ◆ $v_R(t)$ est un filtre passe-haut de $e(t)$

- ▶ coupure

- ◆ fréquence/pulsation de coupure

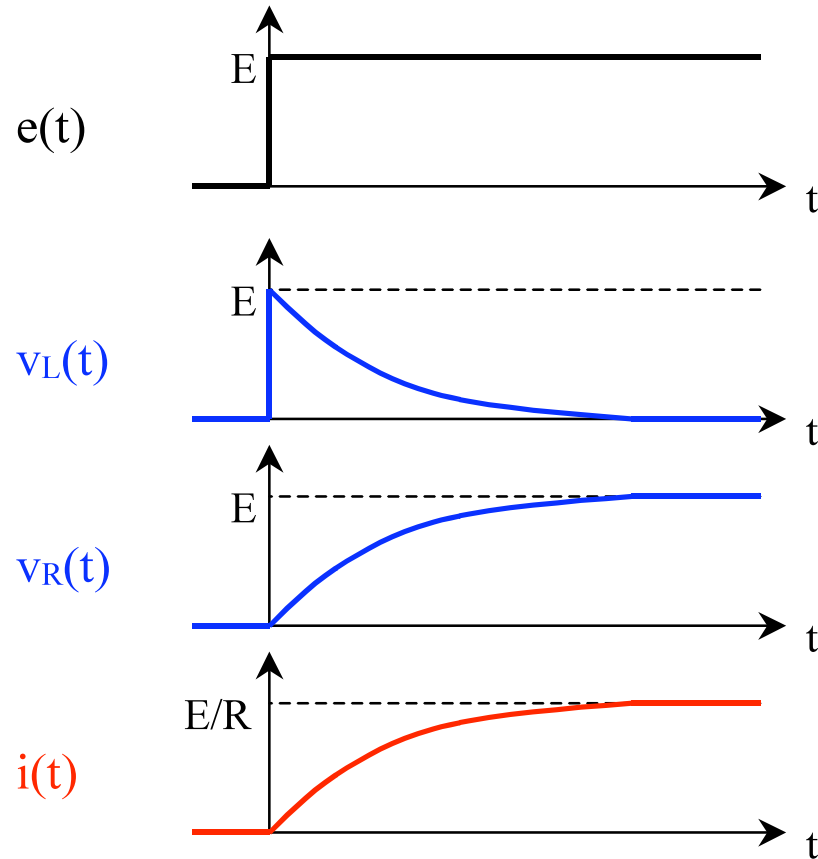
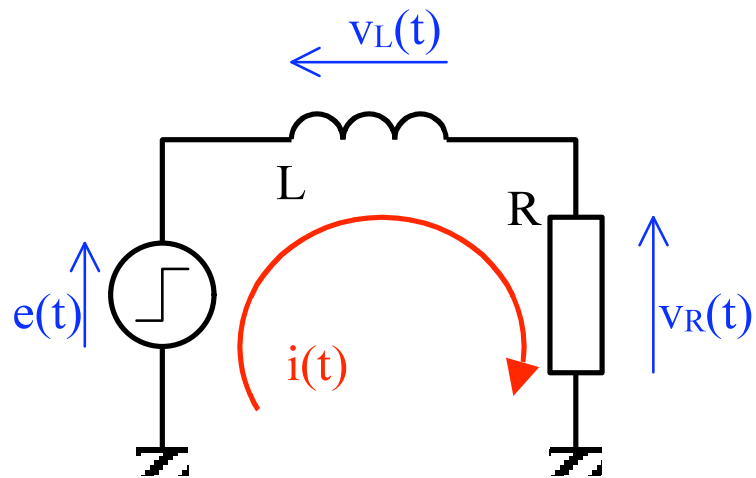
- ▶ bande passante

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\tau} \quad \omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

Inductance: comportement temporel

- ▶ composant dual de la capacité
- ▶ magnétisation et démagnétisation
 - ◆ magnétisation = augmentation |courant|
 - ◆ démagnétisation = diminution |courant|
- ▶ lois fondamentales
 - ◆ **loi HF**: le courant ne varie pas instantanément
 - ◆ **loi BF**: pour $t \gg$, la ddp est nulle
 - mais pas forcément le courant!
- ▶ application: circuit RL

Circuit RL en temporel: résultat



Circuit RL en temporel: vocabulaire

- ▶ constante de temps

$$\tau = \frac{L}{R}$$

- ▶ filtres

- ◆ $v_L(t)$ est un filtre passe-haut de $e(t)$
- ◆ $v_R(t)$ est un filtre passe-bas de $e(t)$

- ▶ coupure

- ◆ fréquence/pulsation de coupure

- ▶ bande passante

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\tau}$$

2.4.2 – Analyse fréquentielle (I): impédances

Analyse fréquentielle: introduction

- ▶ "circuits linéaires en régime sinusoïdal"
 - ◆ linéaires $\Rightarrow$ R, L, C constants
 - ◆ en régime $\Rightarrow$ formes d'onde périodiques
 - ◆ sinusoïdal $\Rightarrow$ monochromatique
- ▶ propriétés
 - ◆ une seule fréquence
 - un circuit linéaire ne modifie pas la fréquence
 - excitation sinusoïdale
 - ◆ Fourier
 - tout signal périodique est une **somme** de sinusoïdes
 - circuit linéaire $\Rightarrow$ théorème de superposition
- ▶ principe
 - ◆ analyse à une seule fréquence (variable)

Analyse fréquentielle: AC et DC

- ▶ terminologie
 - ◆ signal continu = constant dans le temps
 - valeur moyenne du signal
 - ◆ signal alternatif = périodique de moyenne nulle
 - sinusoïde ou somme de sinusoïdes
 - ◆ signal quelconque = continu + alternatif
- ▶ en langage courant
 - ◆ AC = composante alternative
 - ◆ DC = composante continue
- ▶ appareils de mesure (oscilloscope)
 - ◆ AC = composante alternative
 - ◆ DC = tout le signal (alternatif + continu)

Valeur efficace

► définition

◆ rms = "root mean square"

$$X_{eff} = X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T X^2(t) dt}$$

interprétation

X_{eff} liée à la **puissance**
contenue dans le signal
valeur du courant DC de
même puissance

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T R.i^2(t) dt = R.I_{eff}^2$$

cas particulier: sinusoïde
rem: valeur efficace "vraie"

$$X_{eff} = \frac{\hat{X}}{\sqrt{2}}$$

convention

par défaut: $1V = 1V_{eff}$

Outils: phaseurs

- ▶ circuit linéaire en régime sinusoïdal
 - ◆ tous les signaux sont de la forme

$$X(t) = A_X \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_X)$$

- ◆ signal caractérisé par amplitude et phase

phaseur:

$$\underline{X} = A_X e^{j\varphi_X}$$

conversion phaseur <-> signal temporel:

$$X(t) = \sqrt{2} \Re \{ \underline{X} e^{j\omega t} \}$$

Outils: phaseurs

$$\underline{X} = A_X e^{j\varphi_X}$$

► interprétation

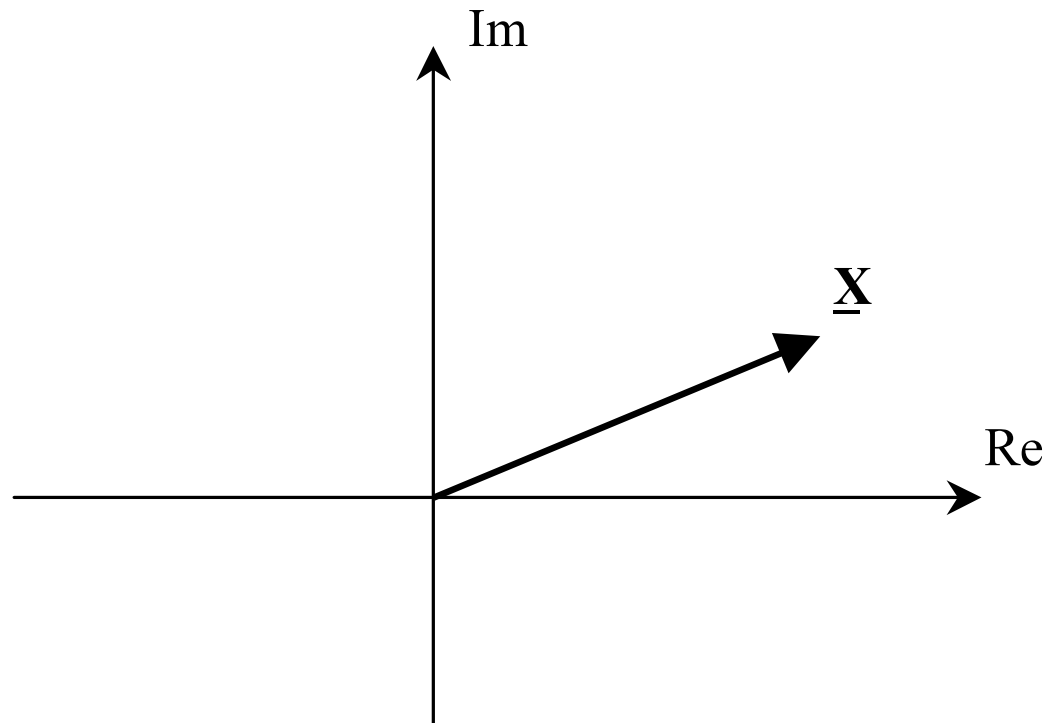
- ◆ phaseur = nombre complexe / vecteur représentant un signal sinusoïdal
 - phase et amplitude
 - abstraction de la variation périodique d'un ensemble de signaux

► intérêt

- ◆ concision de notation et de représentation
 - signal temporel **variable** -> nombre complexe **constant**
 - raisonnement plus facile
- ◆ résolution du circuit électrique
 - éq. **différentielles** réelles -> éq. **algébriques** complexes
- ◆ généralisation de la notion de résistance aux composants réactifs

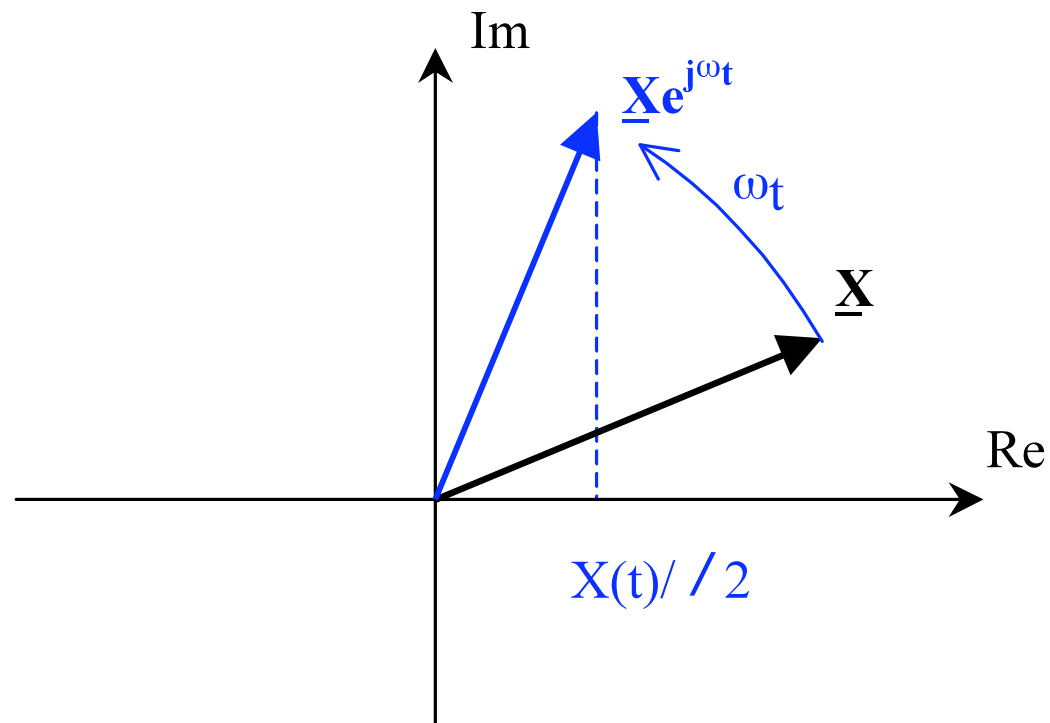
Outils: phaseurs

- représentation (plan complexe)



Outils: phaseurs

- ▶ représentation (plan complexe)
 - ◆ passage au signal temporel



Outils: impédance

- ▶ impédance d'une inductance

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\sqrt{2} \Re\{ \underline{V} e^{j\omega t} \} = L \frac{d}{dt} \left(\sqrt{2} \Re\{ \underline{I} e^{j\omega t} \} \right) = j\omega L \sqrt{2} \Re\{ \underline{I} e^{j\omega t} \}$$

$$\underline{V} = j\omega L \underline{I}$$

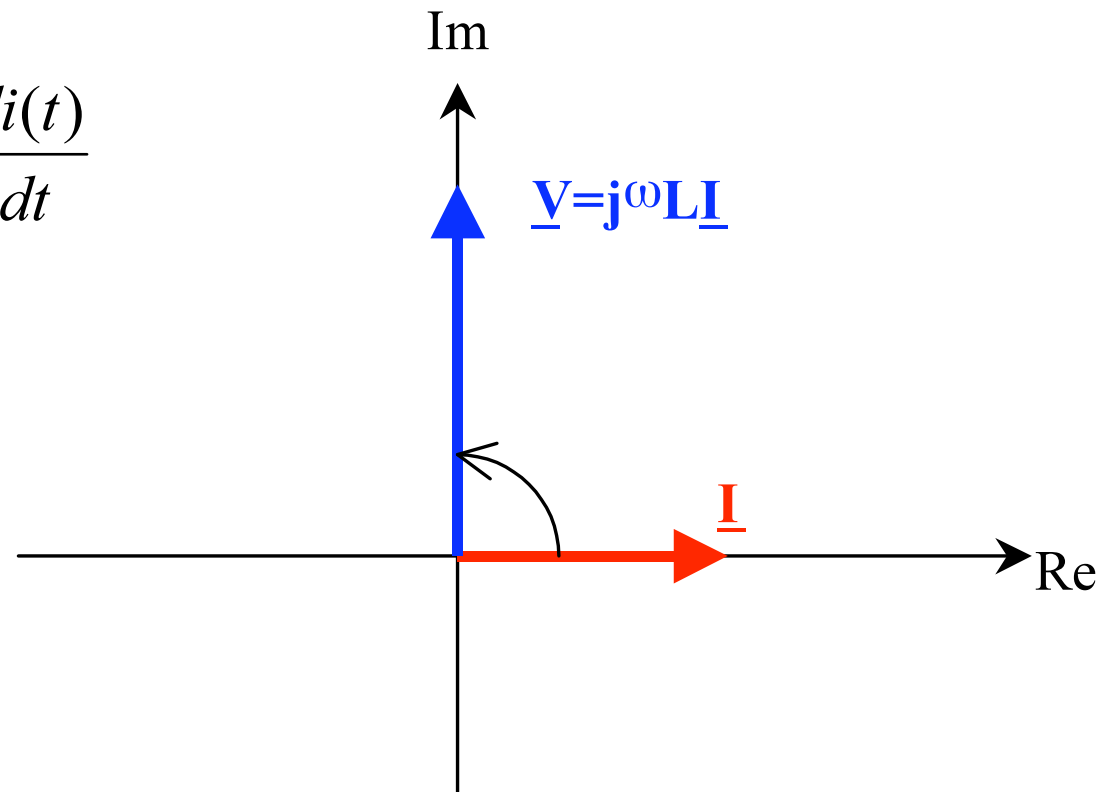
$$\boxed{Z_L = j\omega L}$$

$$\underline{V} = Z_L \underline{I}$$

Outils: impédance

- ▶ impédance d'une inductance
 - ◆ tension en **avance** de phase de 90° sur courant

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$



Outils: impédance

- ▶ impédance d'une capacité

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\underline{V} = j\omega L \underline{I}$$

$$\boxed{Z_L = j\omega L}$$

$$\underline{V} = Z_L \underline{I}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t)$$

$$\underline{V} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I}$$

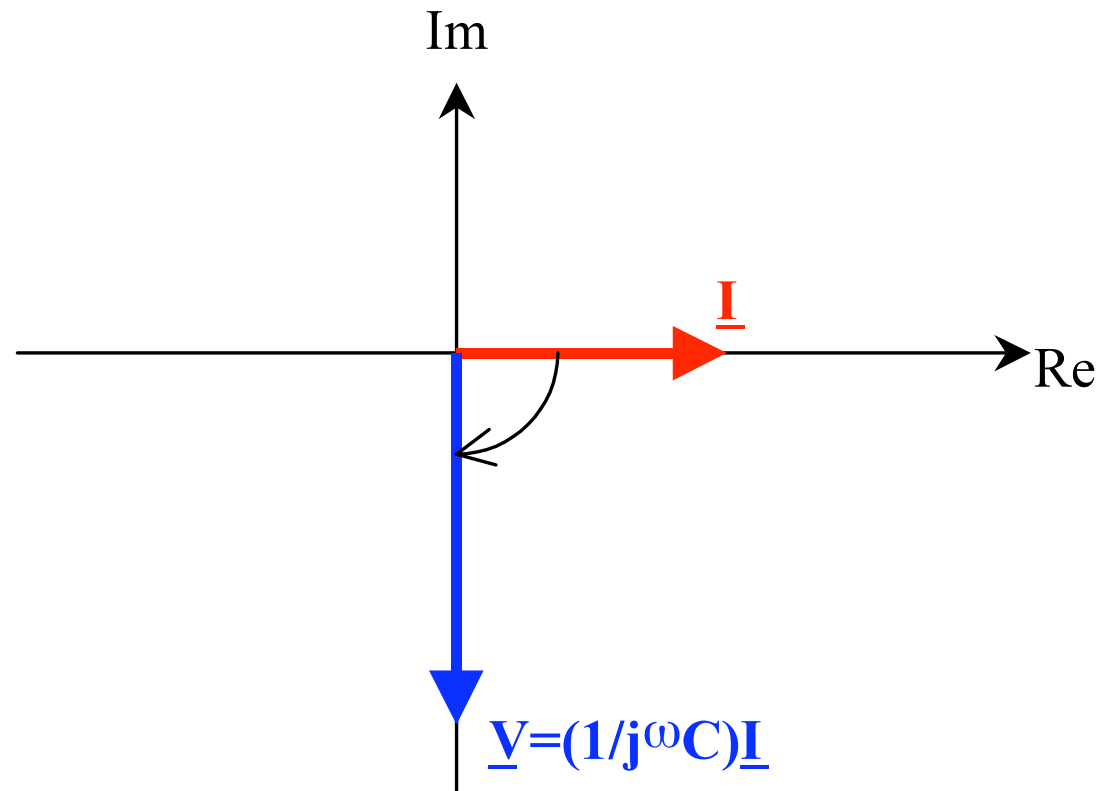
$$\boxed{Z_C = \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\underline{V} = Z_C \underline{I}$$

Outils: impédance

- ▶ impédance d'une capacité
 - ◆ tension en **retard** de phase de 90° sur courant

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t)$$

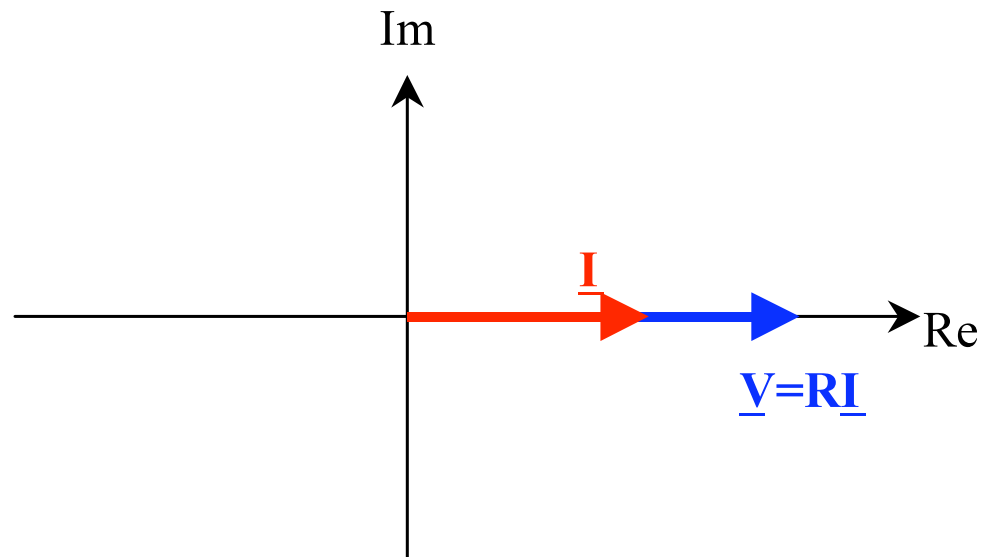


Outils: impédance

- ▶ impédance d'une résistance
 - ◆ tension et courant en phase

$$\boxed{Z_R = R}$$

$$\underline{V} = Z_R \underline{I}$$



Outils: impédance

► conclusion

- ◆ impédance = généralisation de la notion de résistance aux composants réactifs

$$\underline{V} = Z \underline{I}$$

$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_R = R$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

restent applicables:

lois de mise en série et en parallèle

addition vectorielle dans le plan complexe

procédure de résolution d'un circuit

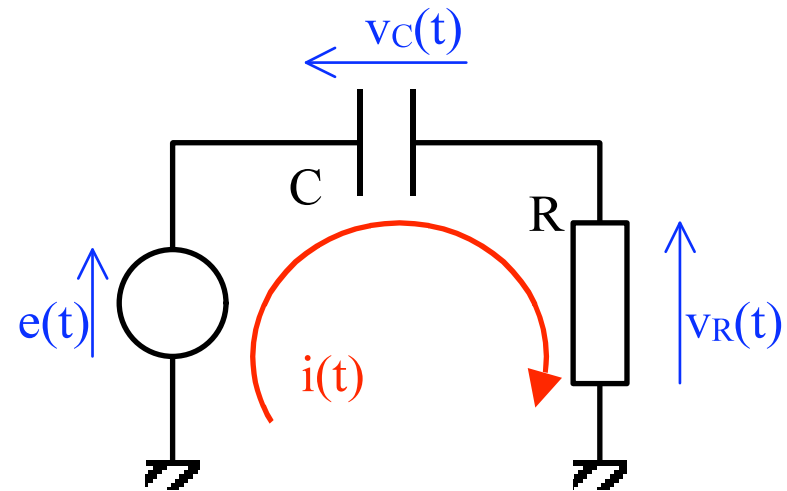
théorème de superposition

équivalents de Thévenin/Norton

Exemple: circuit RC

- calcul en phaseurs

$$\begin{cases} \underline{E} = A_E e^{j\varphi_E} \\ \underline{I} = A_I e^{j\varphi_I} \\ \underline{V}_R = A_R e^{j\varphi_R} \\ \underline{V}_C = A_C e^{j\varphi_C} \end{cases}$$



$$\underline{E} = Z_R \underline{I} + Z_C \underline{I} = R \underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \underline{I}$$

$$\underline{V}_R = \frac{Z_R}{Z_R + Z_C} \underline{E}$$

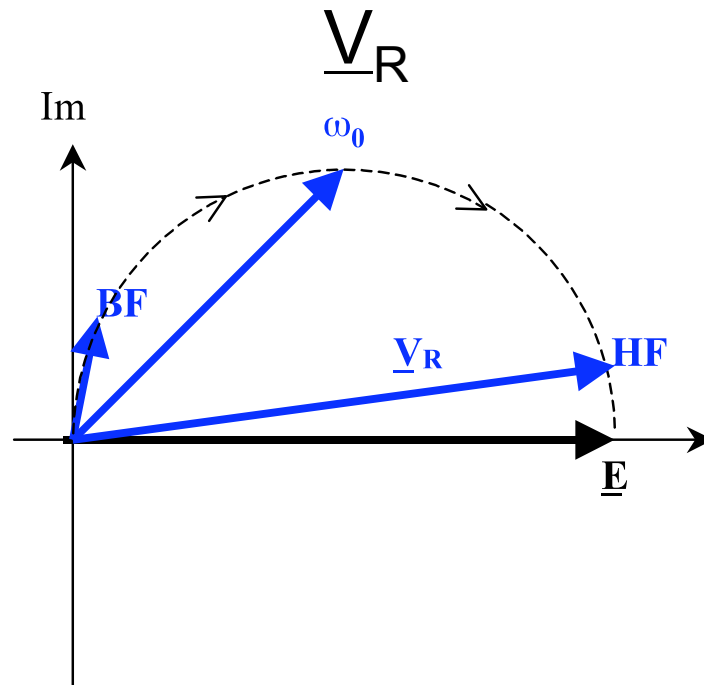
$$\underline{I} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC} \underline{E}$$

$$\underline{V}_R = R \underline{I} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \underline{E}$$

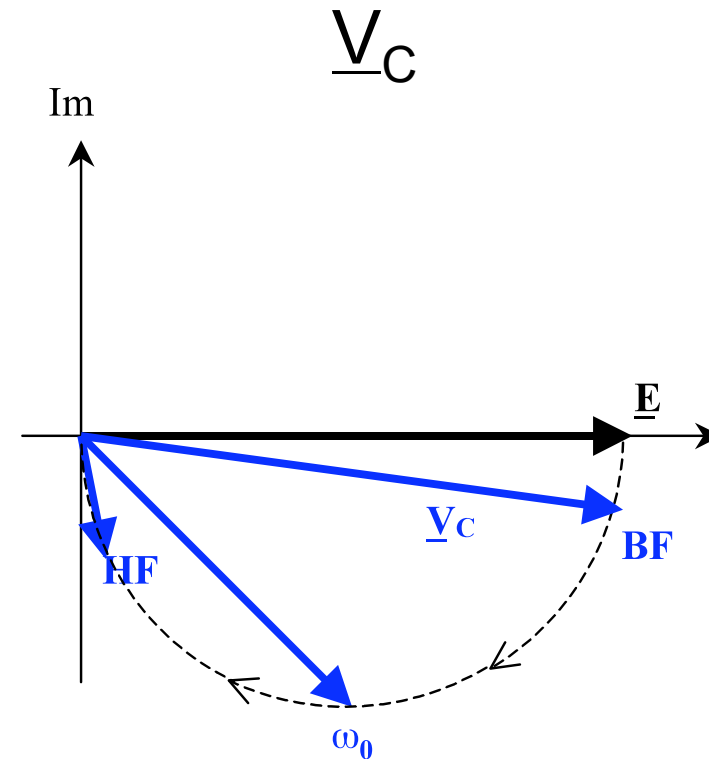
$$\underline{V}_C = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \underline{E}$$

Example: circuit RC

► résultat:



passe-haut



passe-bas

Remarques

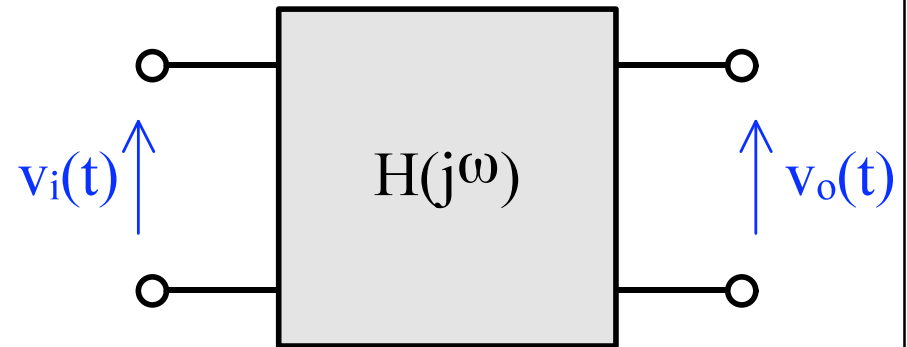
▶ Remarques

- ◆ permet une analyse beaucoup plus rapide d'un circuit
- ◆ via une analyse monochromatique, donne des conclusions sur tout type de signal
 - filtrage passe-haut/passe-bas

2.4.3 – Analyse fréquentielle (II): fonctions de transfert

Outils: fonction de transfert

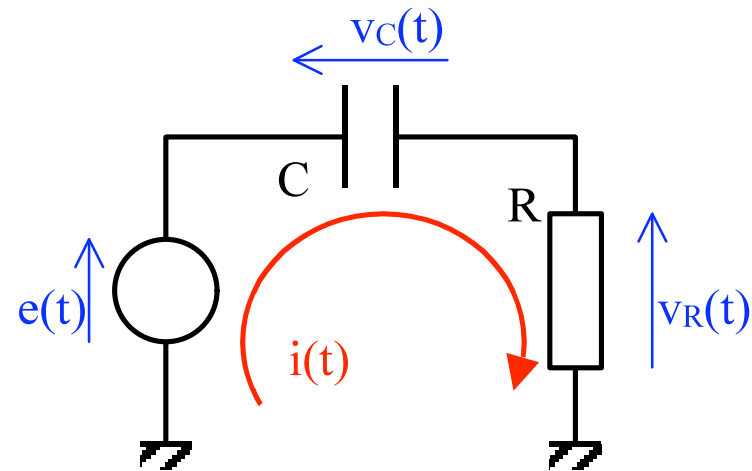
- ▶ fonction de transfert $H(j\omega)$
 - ◆ = rapport des phaseurs d'entrée et de sortie
 - ◆ "opération" réalisée par le circuit



circuit RC

2 fonctions de transfert:

$$\begin{cases} H_R(j\omega) = \frac{V_R}{E} \\ H_C(j\omega) = \frac{V_C}{E} \end{cases}$$



Outils: fonction de transfert

- ▶ nature d'une fonction de transfert
 - ◆ nombre complexe variable en fonction de la fréquence
 - amplitude $A(\omega)$
 - phase $\varphi(\omega)$

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

- N.B.: $H(j\omega)$ >< phaseur

plan de Bode

= représentation graphique de la fonction de transfert

gain: graphe **bilogarithmique**:

$$\text{Log } [A(\omega)] = \text{fct}(\text{Log } \omega)$$

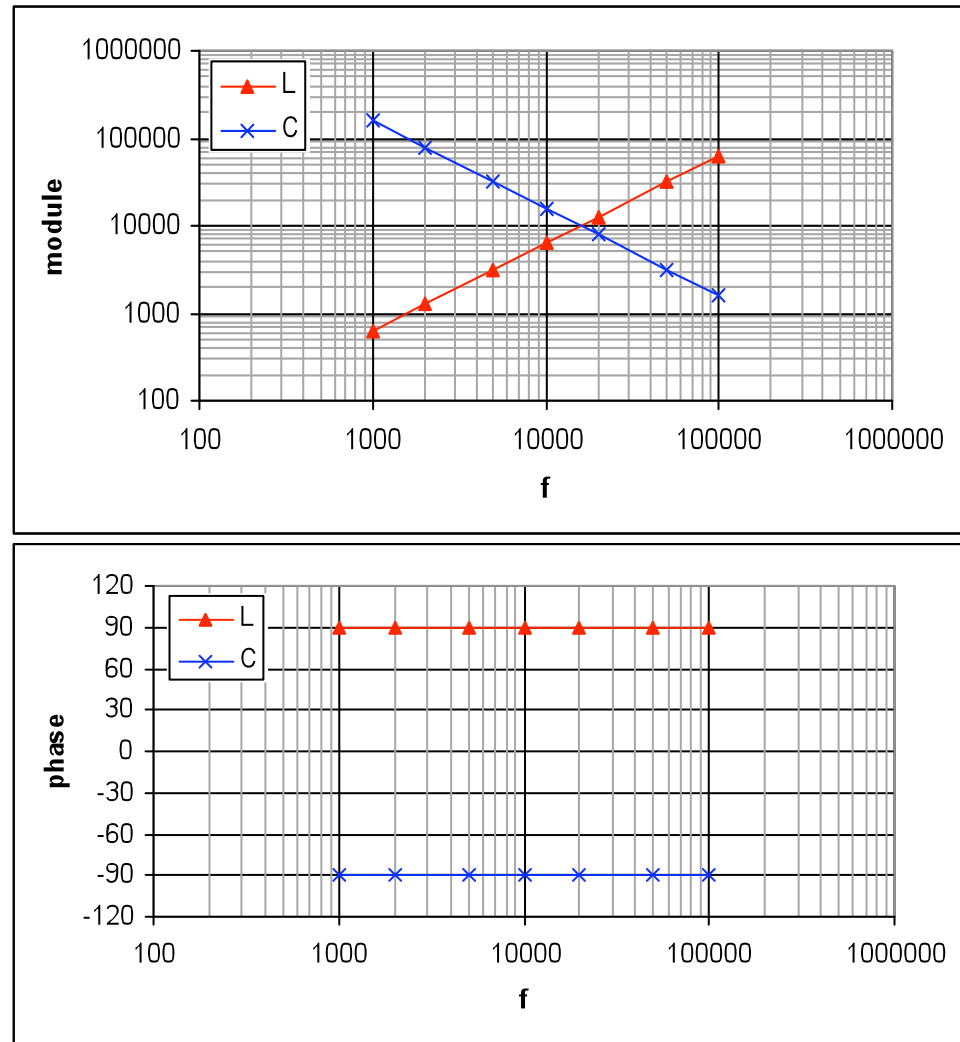
phase: graphe **semi-logarithmique**:

$$\varphi(\omega) = \text{fct}(\text{Log } \omega)$$

Outils: plan de Bode

$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$



Outils: logarithmes (rappels)

- ▶ intérêt des logarithmes
 - ◆ notation concise de nombres variant sur de nombreux ordre de grandeur
 - ◆ multiplication $\rightarrow$ addition
- ▶ application à l'électronique
 - ◆ gain: de 1 à 100000
 - ◆ fréquence: de 0Hz à plusieurs GHz
- ▶ vocabulaire
 - ◆ **décade** = $\times 10$
 - ◆ **octave** = $\times 2$

Outils: décibels (rappels)

► définition

- ◆ unité adimensionnelle pour exprimer un rapport
 - rapport de tension ou de courant:

$$X[dB] = 20 \text{Log} X$$

!! rapport de puissances:

$$X[dB] = 10 \text{Log} X$$

intérêt

équipement électronique = modules successifs
=> addition des décibels de chaque module

Outils: décibels (rappels)

► valeurs courantes (rapport de tensions):

◆ 100000	=	100dB
◆ 10000	=	80dB
◆ 1000	=	60dB
◆ 100	=	40dB
◆ 10	=	20dB
◆ 2	=	6dB
◆ $\sqrt{2}$	=	3dB
◆ 1	=	0dB
◆ $1/\sqrt{2}$	=	-3dB
◆ 1/2	=	-6dB
◆ 1/10	=	-20dB
◆ 1/1000	=	-60dB

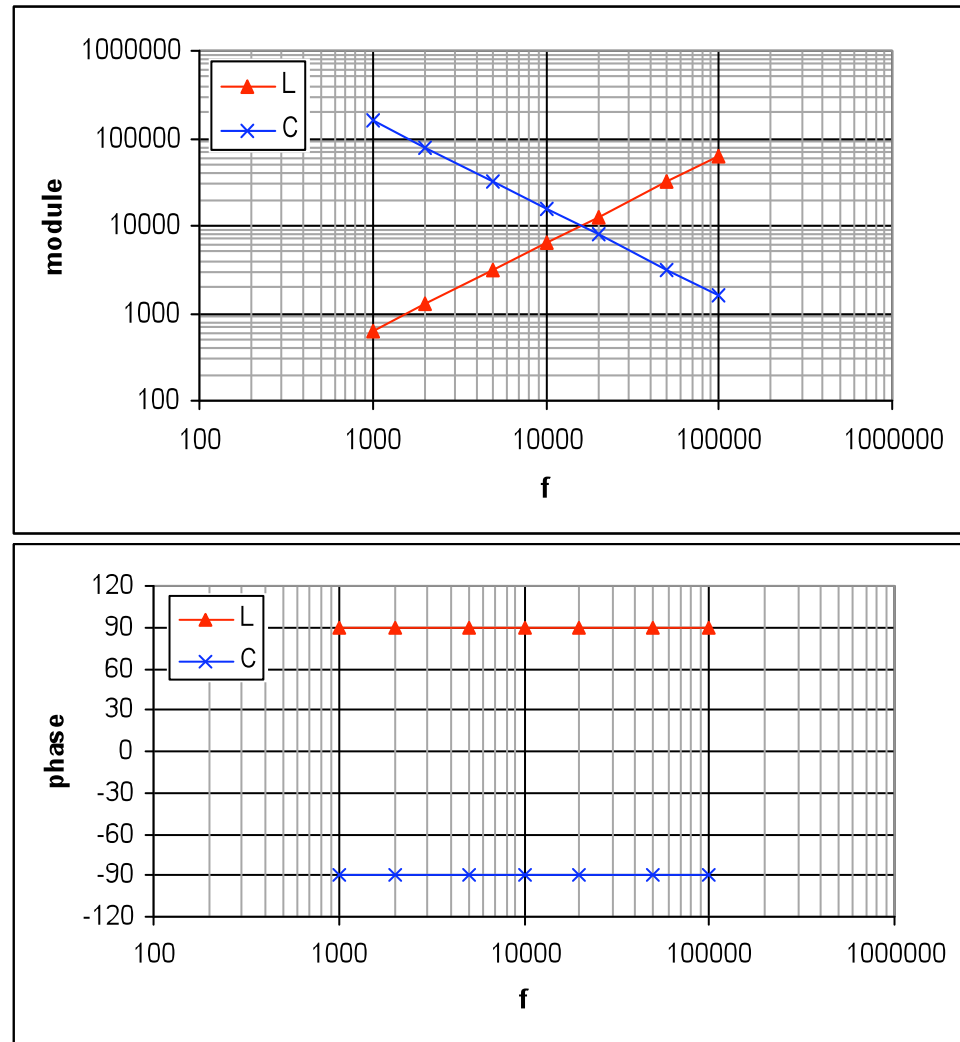
Tracé d'une fonction de transfert dans le plan de Bode

- ▶ pièges à éviter
 - ◆ 1) tenir le graphe à l'envers
 - ◆ 2) calculer le logarithme du logarithme
 - ◆ 3) mettre une graduation "0"
- ▶ tracé asymptotique
 - ◆ trouver les puissances de ω en BF et en HF
 - ◆ tout l'art est de négliger correctement

Tracé d'une fonction de transfert dans le plan de Bode

$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$



Exemple: circuit RC

- ▶ rappel des résultats en phaseurs

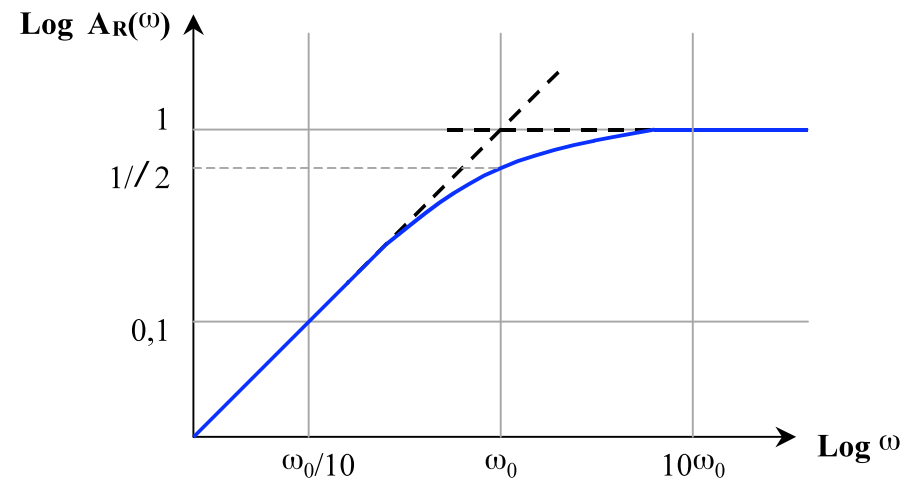
$$\underline{V_R} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \underline{E} \qquad \underline{V_C} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \underline{E}$$

fonctions de transfert:

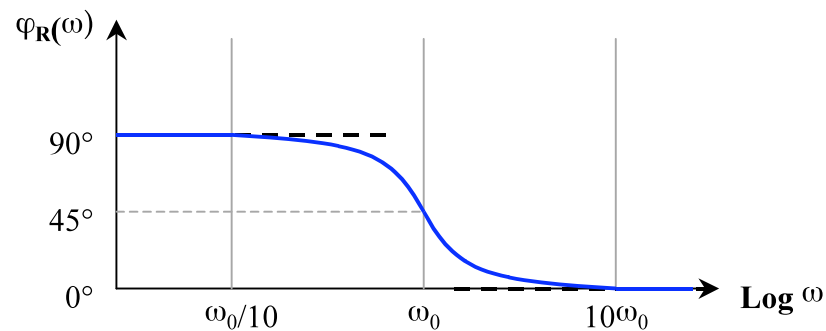
$$\begin{cases} H_R(j\omega) = \frac{\underline{V_R}}{\underline{E}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \\ H_C(j\omega) = \frac{\underline{V_C}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \end{cases}$$

Exemple: circuit RC

► fonctions de transfert du circuit RC



$$H_R(j\omega) = \frac{V_R}{\underline{E}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$



Exemple: circuit RC

► fonctions de transfert du circuit RC

