VADEMECUM D'ÉLECTRICITÉ

Frédéric ROBERT

2012/13 *(v.2.1)*

Table des matières

Introduction 1

Remerciements 1

Conventions typographiques 1

1 Schémas et grandeurs électriques 7
- 1.1 Schémas et composants . . . 8
  - 1.1.1 Dipôles et quadripôles . . . 8
  - 1.1.2 Nœuds et conducteurs . . . 9
  - 1.1.3 Sens de lecture, charge et source . . . 11
- 1.2 Courant . . . 13
- 1.3 Tension(s) . . . 19
  - 1.3.1 La tension : un terme ambigu . . . 19
  - 1.3.2 DDP et potentiel . . . 19
  - 1.3.3 Conventions et signes . . . 20
  - 1.3.4 Interprétation des notions de potentiel et de masse . . . 21
  - 1.3.5 Potentiel représenté comme une ddp . . . 24
  - 1.3.6 Tension différentielle . . . 26
  - 1.3.7 Force électromotrice . . . 27
  - 1.3.8 Terre = protection . . . 27
- 1.4 Puissance, composants actifs et composants passifs . . . 31
  - 1.4.1 Composants actifs et passifs : définition intuitive . . . 31
  - 1.4.2 Conventions récepteur et générateur . . . 31
  - 1.4.3 Formule de la puissance . . . 33
- 1.5 Unités et ordres de grandeur . . . 36

2 Dipôles électriques idéaux 37
- 2.1 Comportement externe : loi et caractéristique d'un dipôle . . . 38
  - 2.1.1 Etat électrique d'un dipôle . . . 38
  - 2.1.2 Comportement électrique du dipôle . . . 38
  - 2.1.3 Loi du dipôle . . . 38
  - 2.1.4 Caractéristique . . . 39
- 2.2 Dipôles réels >< dipôles idéaux . . . 42

2.3 Charges idéales : trois effets physiques 44
2.3.1 Résistance 44
2.3.2 Inductance 46
2.3.3 Capacité 52
2.3.4 Dualité et autres similitudes entre les dipôles L, C et R 55
2.3.5 Aspects énergétiques de L et C : composants réactifs 56
2.3.6 Unités et ordres de grandeur des charges idéales 57
2.4 Sources idéales 59
2.4.1 Source de tension idéale 59
2.4.2 Source de courant idéale 61
2.4.3 Dualité 62
2.5 Court-circuit et circuit ouvert 64
2.5.1 Court-circuit 64
2.5.2 Circuit ouvert 66
2.5.3 Remarques 67
2.6 Combinaisons impossibles 69
2.7 Quelques quadripôles idéaux 71
2.7.1 Sources commandées 71
2.7.2 Transformateur idéal 72
2.8 Linéarité et non-linéarité des composants 74
2.8.1 Circuit linéaire 74
2.8.2 Dipôles linéaires 74
2.8.3 Dipôles non-linéaires 75
2.8.4 Quadripôles 76
2.8.5 Théorèmes applicables 76
2.8.6 Linéarisation 76

3 Résoudre un circuit **79**
3.1 Vocabulaire lié aux circuits 81
3.1.1 Rappels 81
3.1.2 Connexions série et parallèle 82
3.1.3 Branche 82
3.1.4 Maille 82
3.1.5 Lois de Kirchhoff 83
3.2 Procédure canonique en 6 étapes 84
3.2.1 Avertissement 84
3.2.2 Vue d'ensemble 84
3.2.3 Etape 1 : tracer une flèche de courant dans chaque branche du circuit 85
3.2.4 Etape 2 : tracer les flèches de tension sur chaque composant 85
3.2.5 Etape 3 : exprimer les équations qui lient les tensions (loi des mailles) 86
3.2.6 Etape 4 : exprimer les équations qui lient les courants (loi des nœuds) 87

3.2.7 Etape 5 : exprimer les lois des composants 87
3.2.8 Etape 6 : résoudre le système obtenu 88
3.2.9 Valeurs numériques 90
3.2.10 Expression des mailles cachées 91
3.3 Diviseur résistif 93
3.3.1 Diviseur résistif à vide 93
3.3.2 Diviseur résistif chargé 95
3.4 Equivalences série et parallèle 98
3.4.1 Résistances en série 98
3.4.2 Résistances en parallèle 98
3.5 Utilisation des théorèmes de Thévenin/Norton pour résoudre un circuit 100
3.5.1 Principe général : simplification par équivalent de Thévenin/Norton 100
3.5.2 Suppression des composants inutiles 100
3.5.3 Remarque 103
3.6 Résolution par intersection des caractéristiques 104
3.7 Théorème de superposition 107
3.7.1 Rappel : circuits linéaires 107
3.7.2 Théorème de superposition 107
3.7.3 Exemple 107

4 Equivalence de Thévenin et adaptation d'impédance 111
4.1 Circuits équivalents et théorèmes de Thévenin/Norton 112
4.1.1 Equivalence de deux circuits 112
4.1.2 Théorème et équivalent de Thévenin 113
4.1.3 Théorème et équivalent de Norton 117
4.1.4 Remarque : sources idéales 117
4.1.5 Equivalence entre équivalents de Thévenin et de Norton . . 118
4.2 Impédance d'entrée, impédance de sortie (et fem à vide) 120
4.2.1 Equivalent de Thévenin d'un dipôle charge : résistance d'entrée 120
4.2.2 Equivalent de Thévenin d'un dipôle source : résistance de sortie et fem à vide 121
4.2.3 Equivalent de Norton d'un dipôle source 124
4.2.4 Equivalent de Thévenin/Norton d'un quadripôle 124
4.2.5 Mesure des paramètres d'un dipôle/quadripôle 126
4.2.6 Notion d'impédance (d'entrée ou de sortie) 126
4.3 Adaptation d'impédance 128
4.3.1 Connecter deux appareils : pas si simple ! 128
4.3.2 Adaptation d'impédance en tension 128
4.3.3 Adaptation d'impédance en courant 129
4.3.4 Adaptation d'impédance en puissance 130
4.4 Cas particulier des appareils de mesure 131

4.4.1 Noeuds à haute et basse impédance 131
4.4.2 Connexion d'un appareil de mesure 131

5 Composants réactifs **135**
5.1 Analyse temporelle : circuit RC 136
5.1.1 Rappels concernant la capacité 136
5.1.2 Résolution temporelle du circuit RC : échelon de tension . . 137
5.1.3 Constante de temps et fréquence de coupure (pour un circuit du 1er ordre) 143
5.2 Analyse temporelle : circuit RL 145
5.2.1 Rappels concernant l'inductance 145
5.2.2 Résolution temporelle du circuit RL : échelon de tension . . 146
5.2.3 Constante de temps et fréquence de coupure 147
5.2.4 Linéarité des circuits comprenant des éléments réactifs . . . 148
5.3 Analyse fréquentielle (I) : phaseurs et impédances 149
5.3.1 Hypothèses et (absence de) limitations de l'analyse fréquentielle 149
5.3.2 Valeur efficace 151
5.3.3 Phaseurs 153
5.3.4 Impédance d'une inductance pure 155
5.3.5 Impédance d'une capacité pure 160
5.3.6 Impédance d'une résistance pure 163
5.3.7 Impédance d'un dipôle quelconque 164
5.3.8 Admittance, conductance et susceptance 165
5.4 Analyse fréquentielle (II) : réponse en fréquence $H(j\omega)$ et courbes de Bode 167
5.4.1 Réponse en fréquence $H(j\omega)$ 167
5.4.2 Courbes de Bode 169
5.4.3 Courbes de Bode : principes de base et pièges à éviter 171
5.4.4 Tracé asymptotique de $H(j\omega)$: 1re manière 173
5.5 Analyse fréquentielle (III) : tracé asymptotique "pôles et zéros" d'une réponse en fréquence $H(j\omega)$ 175
5.5.1 Principe et justification initiale 175
5.5.2 Tracé asymptotique "pôles et zéros" : 4 étapes 176
5.5.3 Etape 1 : factoriser la réponse en fréquence $H(j\omega)$ 176
5.5.4 Etape 2 : identifier les pôles et les zéros 177
5.5.5 Définitions rigoureuses en $H(p)$ 179
5.5.6 Récapitulatif : interprétation globale des notions de pôles et zéros dans le cadre du tracé asymptotique 181
5.5.7 Cas particulier des facteurs du second degré 182
5.5.8 Etape 3 : identifier les intervalles de fréquence 183
5.5.9 Etape 4 : réaliser le tracé asymptotique 184
5.5.10 Tableau récapitulatif pour le tracé asymptotique 187
5.5.11 Finalisation du tracé 188

5.5.12 Conclusion 188

6 Composants réactifs : annexes **189**

6.1 Décibels et logarithmes 190
6.2 Circuit RC : calcul temporel détaillé 194
6.3 Circuit RL : calcul temporel détaillé 197
6.4 Circuit RC : calcul en phaseurs et impédances 199
6.5 Circuit RL : calcul en phaseurs et impédances 203
6.6 Circuit RC : calcul de la réponse en fréquence 204
6.7 Circuit RL : calcul de la réponse en fréquence 206
6.8 Fitre RC/RL passe-haut : tracé des courbes de Bode 207
6.8.1 Courbes réelles (non asymptotiques) 207
6.8.2 Tracé asymptotique 1re manière (approx. polynomiale) . . . 208
6.8.3 Tracé asymptotique 2de manière ("pôles et zéros") 208
6.9 Filtre RC/RL passe-bas : tracé des courbes de Bode 211
6.9.1 Courbes réelles (non asymptotiques) 211
6.9.2 Tracé asymptotique 1re manière (approx. polynomiale) . . . 212
6.9.3 Tracé asymptotique 2de manière ("pôles et zéros") 212
6.10 Correspondance entre les variables p et $j\omega$ 214
6.11 Comportement asymptotique des facteurs élémentaires de $H()$ . . 217
6.12 Liens entre concepts temporels et fréquentiels 228

Un mot d'introduction

En électronique, le support de l'information est la *tension* ou le *courant*, c'est-à-dire une grandeur *électrique*.

Dix ans d'enseignement de l'électronique m'ont convaincu que les difficultés des étudiants pour l'électronique proviennent moins d'une maîtrise insuffisante des notions de l'électronique elle-même que des notions plus fondamentalement liées à l'*électricité*, telles que :

- où va le courant dans ce schéma ?
- dans quel sens mettre la flèche de tension ?
- comment résoudre ce circuit comportant une capacité ?
- fondamentalement, qu'est-ce qu'une inductance ?
- etc

Ce chapitre regroupe donc un grand nombre des notions "électriques" indispensables à connaître avant de commencer un cours d'électronique proprement dit.
Si elles vous paraissent évidentes, tant mieux ! Vérifiez cependant que vous êtes capables d'appliquer toutes les méthodes décrites et que vous connaissez aussi les quelques notions plus pointues glissées çà et là…
Si elles ne vous paraissent pas évidentes, prenez-le comme un signal d'alarme… et trouvez des solutions concrètes dans les pages qui suivent.

Ce document n'est pas un cours d'électricité : il n'en a pas le rigueur. Il doit plutôt être considéré comme un manuel pratique en électricité à l'usage de l'électronicien. Il a été élaboré sur base de mon expérience d'enseignant avec plusieurs générations d'étudiants. J'espère qu'il vous donnera des éléments de solution concrets dans les situations qui posent généralement problème.

Toute suggestion pour améliorer ce document est la bienvenue.

Bonne lecture...

Frédéric Robert

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement Anthony Leroy pour avoir réalisé la transposition du vade-mecum au format LateX. Celui-ci a en effet beaucoup gagné en qualité à cette occasion, et je suis certain que de nombreuses générations d'étudiants en profiteront.

Je souhaite également remercier l'ensemble de mes collègues directs qui ont participé de près ou de loin à l'amélioration de ce texte, et en particulier : Pierre Mathys, Cédric Boey, Kevin De Cuyper et Michel Osée.

Conventions typographiques

De manière à faciliter la compréhension et l'étude, nous avons utilisé dans ce vade-mecum des conventions typographiques spécifiques. Elles sont expliquées ci-dessous.

Concepts techniques et scientifiques

Comme tout discours scientifique, ce texte utilise un ensemble de termes techniques et scientifiques précis que nous appellerons concepts. Un **concept** est l'association d'un mot précis avec une définition. En langage courant, c'est ce qu'on appelle un "mot de vocabulaire" : résistance, transistor, équivalent de Thévenin, . . . sont des concepts.

Pour comprendre ce qui va être dit sur l'électricité et l'électronique, il est indispensable d'arriver à faire la distinction entre les différents concepts, de même qu'entre un langage de niveau scientifique (qui utilise ces concepts) et le langage courant (qui utilise parfois les mêmes mots mais sans la même rigueur ou sans faire référence aux mêmes définitions). Dans une discipline scientifique, les différents concepts se répondent en effet de manière cohérente pour définir le vocabulaire de la discipline. Si on les confond, il est virtuellement impossible de comprendre ce qui est exposé. Rien que dans ce vade-mecum, plus d'une centaine de concepts scientifiques liés à l'électricité sont utilisés...

Pour mettre en évidence que certains mots sont des concepts et participent donc à la construction d'un édifice théorique cohérent :

- à l'endroit où un concept est *défini* (le plus souvent lors de sa première apparition dans le texte), il apparaîtra en **gras**.
- lorsqu'il nous a paru utile d'insister sur le fait qu'un mot est un concept de niveau scientifique, ce mot sera mis dans cette police particulière.

Un index de ces termes se trouve par ailleurs en fin de document.

Mise en évidence

En dehors des concepts, l'*italique* sera utilisé pour attirer l'attention du lecteur sur un élément particulier du texte.

Erreur classique, piège à éviter

Une "bombe" au début d'un paragraphe signale un piège, une incompréhension typique dans lesquels sont tombés de nombreuses générations d'étudiants avant vous. Autant savoir...

Principe à retenir

Un encadré signale un principe général qu'il est bon de garder à l'esprit

Ces principes sont autant d'éléments "sûrs" auxquels vous raccrocher si vous doutez au cours d'un raisonnement.

Chapitre 1

Schémas et grandeurs électriques

Ce chapitre a pour but de clarifier le vocabulaire fondamental qui sera utilisé dans toute la suite de ce vademecum. Il reprécise les notions liées aux circuits électriques ainsi qu'aux grandeurs électriques elles-mêmes : courant, tension, puissance. Ces notions, bien que fondamentales, cachent souvent quelques subtilités importantes à maîtriser.

Le chapitre est organisé comme suit :

- la section 1.1 revient brièvement sur le vocabulaire directement lié aux schémas et composants
- la section 1.2 précise la notion de courant
- la section 1.3 précise la notion de tension, ce qui implique plusieurs discussions non triviales
- la section 1.4 précise la notion de puissance et les concepts de composant actif ou passif
- la section 1.5 précise les ordres de grandeur courants en électronique

1.1 Schémas et composants

Circuit électrique

Un **circuit** électrique ou électronique est un ensemble de composants interconnectés par des conducteurs. Le terme **montage** est synonyme de circuit.

Schéma

Le **schéma** est la représentation graphique du circuit, où l'on peut voir les différents composants et leur assemblage, selon certaines conventions de représentation. Par exemple, la figure ci-dessous est le schéma d'un filtre audio à 3 voies, c'est-à-dire un montage qui sépare un signal audio en trois parties (aiguës, medium, graves) et les amplifie.

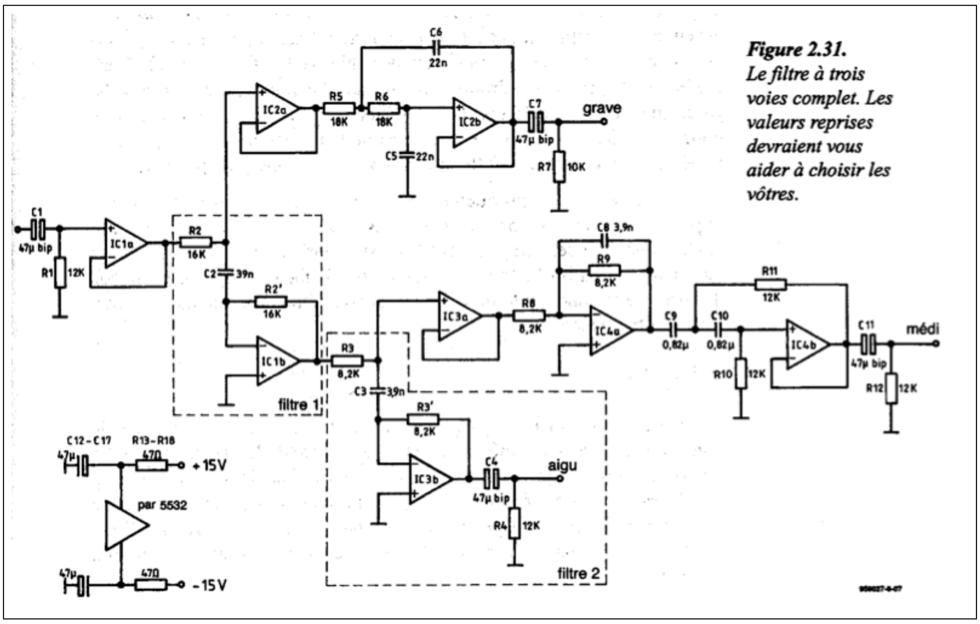

FIGURE 1.1 – Schéma d'un filtre à trois voies (d'après G. Haas, "Sono & Studio : équipement électronique sur mesure", Publitronic/Elektor, 1998)

1.1.1 Dipôles et quadripôles

Dipôle

On appelle **dipôle** ou **1-port** un composant ou équipement qui possède deux bornes. Sont notamment des dipôles :

- de nombreux composants électriques de base : la résistance, la capacité, l'inductance, la source de tension, etc
- le composant électronique le plus simple : la diode (voir chapitre correspondant)

Cette définition ne se limite néanmoins pas aux composants : tout équipement qui possède deux bornes peut être considéré comme un dipôle. Sont donc également des dipôles : un micro, un haut-parleur, un multimètre, une pile, une prise électrique, etc.

Dans ce cours uniquement, nous représenterons un dipôle quelconque de la manière décrite figure 1.2 :

FIGURE 1.2 – symbole générique d'un dipôle (convention propre à ce cours)

Quadripôle

On appelle **quadripôle** ou **biporte** ou **2-ports** tout composant ou équipement qui possède quatre bornes (souvent : deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie).

Exemples de quadripôles :

- composants électriques : un transformateur possède au moins quatre bornes
- composants électroniques : le transistor possède trois bornes mais est souvent représenté sous forme d'un quadripôle (une même borne étant utilisée côté entrée et côté sortie)
- audio : une table de mixage, un ampli... peuvent être considérés comme des quadripôles à partir du moment où on considère qu'ils ont une entrée et une sortie

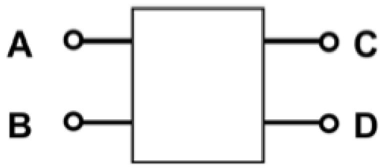

FIGURE 1.3 – Symbole générique d'un quadripôle

1.1.2 Nœuds et conducteurs

Conducteurs

Pour réaliser un circuit, on connectera ensemble des dipôles, des quadripôles et plus généralement des composants de toutes sortes, au moyen de **conduc-**

teurs. Ces derniers sont par définition des connexions constituées d'un matériau transportant bien le courant électrique. Les métaux sont le plus souvent utilisés car ils contiennent beaucoup d'électrons libres (= électrons susceptibles de se déplacer). On utilisera le plus souvent le cuivre pour les pistes de circuits imprimés ou les fils/câbles, l'aluminium dans les circuits intégrés, parfois l'or (câbles et connecteurs audio/vidéo haut de gamme), etc.

Noeuds et bornes

Dans un schéma, un **nœud** est une connexion électrique entre deux composants (ou davantage) ; de plus, un nœud est par définition supposé être équipotentiel : il possède une même valeur de potentiel électrique (voir §1.3.2) partout où il s'étend.

Un nœud ne se limite pas à un seul point de connexion mais couvre en fait l'ensemble de la connexion, comme illustré sur la figure 1.4, où les trois ensembles pointillés représentent chacun un noeud.

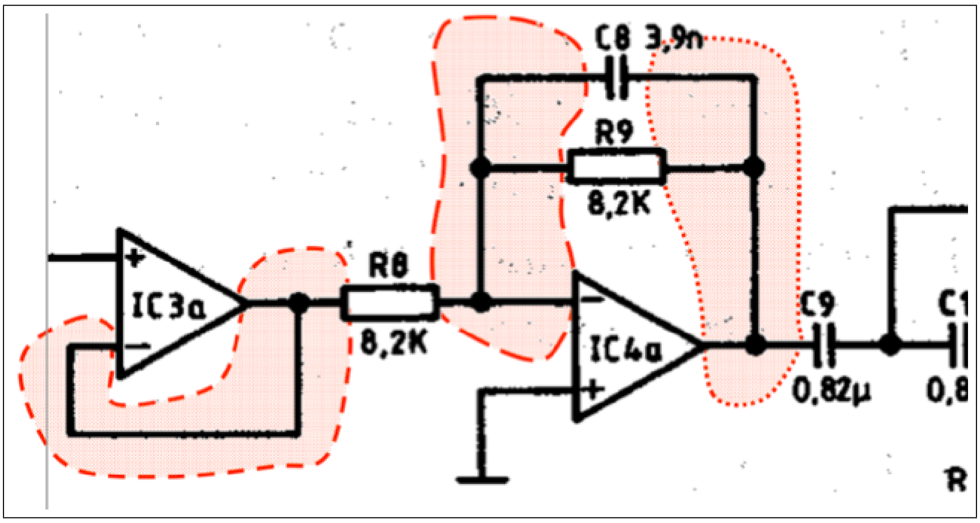

FIGURE 1.4 – Exemples de nœuds dans un schéma (image de fond d'après G. Haas, "Sono & Studio : équipement électronique sur mesure", Publitronic/Elektor, 1998)

Une **borne** est un point de connexion d'un composant ou d'un équipement réel (par exemple : chacune des deux extrémités d'une résistance). Electriquement parlant, une borne est un noeud. Les deux termes seront donc souvent utilisés comme synonymes.

1.1.3 Sens de lecture, charge et source

Sens de lecture

Tout schéma possède un **sens de lecture** qui correspond fondamentalement au sens de propagation de l'information ou de l'énergie dans le circuit. Comprendre d'où vient et où va le signal est un premier pas important pour comprendre le schéma lui-même.

La toute grande majorité des schémas se "lisent" de gauche à droite : les entrées se trouvent donc à gauche et les sorties à droite. C'est notamment le cas de l'exemple du filtre à trois voies, qui possède en particulier une entrée (visible à gauche) et trois sorties (notées "grave", "médi" et "aigu"), visibles dans la partie droite de la figure 1.1.

Charge

La **charge** (d'un montage) désigne le composant ou l'équipement connecté en aval (= à la sortie) de ce montage.

Exemple : on connectera en principe au montage ci-dessus trois haut-parleurs : un haut-parleur pour les graves (basses fréquences : woofer), un haut-parleur pour les medium (fréquences intermédiaires) et un haut-parleur pour les aiguës (hautes fréquences : tweeter). Chacun de ces haut-parleurs est une charge pour la sortie correspondante du montage.

La charge est donc le composant ou l'équipement qui reçoit l'information (ou l'énergie) de la part du montage considéré. Comme les schémas se lisent majoritairement de gauche à droite, la ou les charges se trouvent le plus souvent à droite du schéma.

Quelques exemples de charges :

- un haut-parleur à la sortie d'un ampli est une charge pour cet ampli
- tout appareil connecté dans une prise électrique est une charge pour cette prise

La charge d'un montage ne doit pas être confondue avec la charge électrique, qui se mesure en coulombs. Ces deux notions n'ont rien à voir l'une avec l'autre, même si elles portent le même nom en français.

Montage à vide >< Montage en charge

Lorsqu'aucune charge n'est connectée à un montage/circuit, on dit que ce circuit fonctionne **à vide**.

Inversement lorsqu'une charge est connectée, on dit que le circuit est **chargé** ou fonctionne **en charge**.

Une erreur souvent commise est de calculer le montage à vide, puis de penser qu'il se comporte de manière identique une fois en charge. Dans le principe ceci n'est pas correct. En effet :

connecter un composant additionnel à un circuit revient à modifier ce circuit, et donc potentiellement à redistribuer tous les courants et tensions dans celui-ci

Connecter une charge est bien entendu un cas particulier du principe ci-dessus [1] : un exemple de cette situation est détaillé à la section 3.3.

De manière générale, on retiendra que :

La tension de sortie d'un montage peut varier en fonction de la charge qui lui est connectée

Source

La **source** (d'un montage) désigne le composant ou l'équipement connecté en amont (= à l'entrée) d'un montage.

La source est donc le composant ou l'équipement qui délivre une information (ou de l'énergie) au montage considéré.

Exemples :

- en audio, une table de mixage reçoit plusieurs signaux provenant de micros ou d'autres appareils (lecteur MP3 par exemple) : les micros et le lecteur MP3 sont des sources
- la pile électrique qui alimente un montage est une source

Une source ou une charge (et plus généralement un dipôle) peuvent être aussi bien un tout petit composant qu'un très gros équipement. La seule chose qui importe est la position du composant/équipement par rapport au montage. Cette remarque deviendra plus claire quand nous aborderons la notion d'équivalent de Thévenin dans le Chap 4.

1. connecter un simple appareil de mesure l'est d'ailleurs également.

1.2 Courant

Courant électrique : définition qualitative

Le **courant** électrique est "un déplacement d'ensemble de charges électriques dans un conducteur". Ceci demande de préciser deux notions :

Charge électrique
Vous savez très probablement déjà que :

- dans les métaux, le courant est constitué d'électrons qui se déplacent (électrons libres)
- l'**électron** est une particule élémentaire qui porte une charge électrique négative de valeur $-e$ (avec $e = +1,6.10^{-19}$ C).

Néanmoins un courant n'est pas toujours constitué d'électrons :

- dans les électrolytes (= liquides conducteurs), le courant peut être aussi porté en partie par des ions, un ion étant un atome non neutre
- dans les semi-conducteurs (matériaux utilisés pour fabriquer les composants électroniques, dont le silicium), le courant est constitué d'électrons mais également de charges positives appelées "trous"

Il est donc plus général de dire que le courant est un "déplacement de charges électriques" (positives ou négatives, et dont la valeur n'est pas forcément $-e$) plutôt qu'un déplacement d'électrons.

Déplacement d'ensemble
Pourquoi parler de *déplacement d'ensemble* ? Ne suffit-il pas que les électrons se déplacent pour avoir un courant ? Non.

Pour la facilité, expliquons ce qui se passe en prenant le cas d'un métal, où les charges électriques sont des électrons. Dans un métal, un courant nul ne correspond pas au fait que les électrons ne se déplacent pas. En effet dans un morceau de métal -et pour autant qu'il ne soit pas au zéro absolu de température- les électrons se déplacent spontanément en tous sens : c'est ce qu'on appelle l'agitation thermique. Comme les déplacements sont aléatoirement répartis dans toutes les directions, le déplacement moyen (ou déplacement d'ensemble) des électrons est nul. C'est cette situation (déplacement d'ensemble nul) qui correspond à un courant nul.

Un courant *non nul* apparaît lorsque l'ensemble des électrons, en plus de leurs mouvements individuels aléatoires, se déplacent globalement dans une même direction. Un tel mouvement d'ensemble apparaît notamment lorsqu'on applique une différence de potentiel (ou, ce qui revient au même, un champ électrique) aux bornes de la pièce de métal.

Intensité = valeur du courant électrique

Le courant peut être mesuré. La valeur chiffrée associée au courant s'appelle en toute rigueur intensité. Par abus de langage, on l'appelle souvent cou-

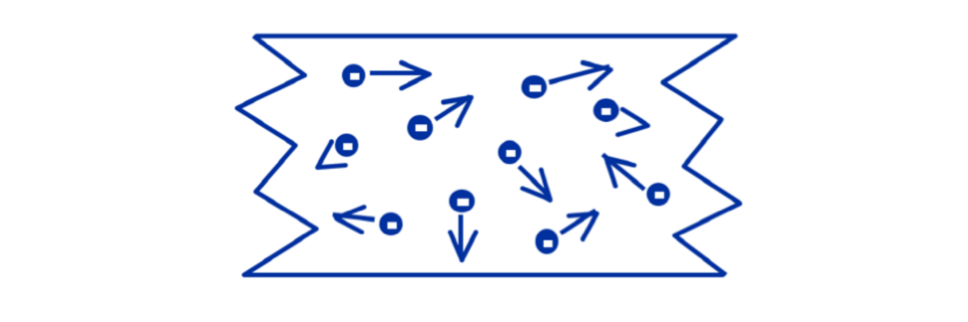

FIGURE 1.5 – Mouvement aléatoire des électrons : le déplacement moyen est nul, donc le courant également

rant, c'est-à-dire qu'on utilise un même terme pour la description qualitative et la description quantitative.

L'**intensité** est tout simplement le débit de charge électrique, c'est-à-dire la quantité de charge électrique (en coulombs) traversant la section du conducteur par unité de temps. L'intensité s'exprime en ampères. Compte tenu de la définition précédente, l'intensité $i(t)$ à l'instant t du courant dans un conducteur peut s'écrire mathématiquement comme la dérivée de la charge électrique $q(t)$ par rapport au temps :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \tag{1.1}$$

Mesure du courant électrique

La mesure d'un courant électrique se fait typiquement en insérant un ampèremètre en série avec le fil dans lequel on désire mesurer le courant. En d'autres termes :

pour mesurer un courant dans un fil (à l'ampèremètre),
il est indispensable d'interrompre ce fil

En pratique, on utilisera souvent un **multimètre** (fig. 1.6), qui regroupe plusieurs appareils en un : ampèremètre, voltmètre, ohmmètre.

Pour éviter de devoir interrompre le circuit, il existe des **pinces ampèremétriques** (fig. 1.7). Une pince ampèremétrique est un appareil de mesure de courant comportant une pince qui permet d'enserrer le conducteur concerné sans l'interrompre. Cette solution est particulièrement utilisée pour la mesure de courants importants.

Représentation du courant : courant conventionnel

Il existe dans les schémas toute une série de symboles graphiques représentant différents éléments du problème (composants, grandeurs électriques, etc). A certains de ces symboles sont associées des conventions.

FIGURE 1.6 – Multimètre

Une **convention** est un choix qui n'a pas de justification fondamentale mais qui a dû être posé pour que tout le monde se comprenne. Le choix aurait donc pu être différent -voire même complètement opposé- tout en restant parfaitement valable.

On trouvera en électricité des conventions de représentation qu'il est fondamental de connaître sous peine de faire des erreurs d'interprétation. On trouvera même des situations dans lesquelles des conventions différentes sont prises par différents auteurs, d'où l'importance de maîtriser celles-ci et d'être bien conscient de leur statut de convention.

Par exemple, le courant (dans un fil, un dipôle, etc) est représenté dans un schéma sous forme d'une flèche à laquelle peuvent être associés un nom et/ou une valeur chiffrée (intensité) : voir fig. 1.8. Contrairement à ce qu'on pourrait penser, cette flèche n'indique pas le sens de déplacement des électrons (qui sont des charges négatives), mais le sens de déplacement de charges qui seraient positives (et qui, en réalité, n'existent pas dans un métal) [2].

Ces hypothétiques charges positives (et donc le courant représenté dans un schéma) forment le **courant conventionnel**, par opposition au courant "réel" fait d'électrons s'il s'agit d'un métal. En pratique, lorsqu'on raisonne sur un schéma il n'y a néanmoins pas beaucoup de questions à se poser, car :

C'est toujours le courant conventionnel qui est représenté dans les schémas

A moins de s'intéresser à la nature des charges composant le courant (par exemple pour comprendre le fonctionnement interne du composant), il n'y a

2. Cette interprétation du courant comme étant constitué de charges positives est cohérente avec le fait qu'il y a implicitement un signe positif dans la formule 1.1 de l'intensité.

FIGURE 1.7 – Pince ampèremétrique

FIGURE 1.8 – Représentation du courant conventionnel

pas de raison de considérer le signe et/ou le sens réel des charges.

Dans la figure 1.8, la flèche signifie donc que, pour une valeur de I positive, le courant conventionnel passe de gauche à droite dans le dipôle (et donc les électrons de droite à gauche : voir fig. 1.9).

Courant conventionnel négatif

Il est tout-à-fait possible, dans un schéma, que la valeur associée à une flèche de courant (= intensité) soit négative.
Le signe *négatif* d'une valeur de courant conventionnel doit être interprété comme le fait que les charges positives hypothétiques se déplacent dans le sens *inverse* de celui de la flèche.

Comme les électrons se déplacent toujours dans le sens inverse du *courant conventionnel*, il en résulte en finale que :

- si la valeur du courant associé à une flèche est *positive* (figure 1.10

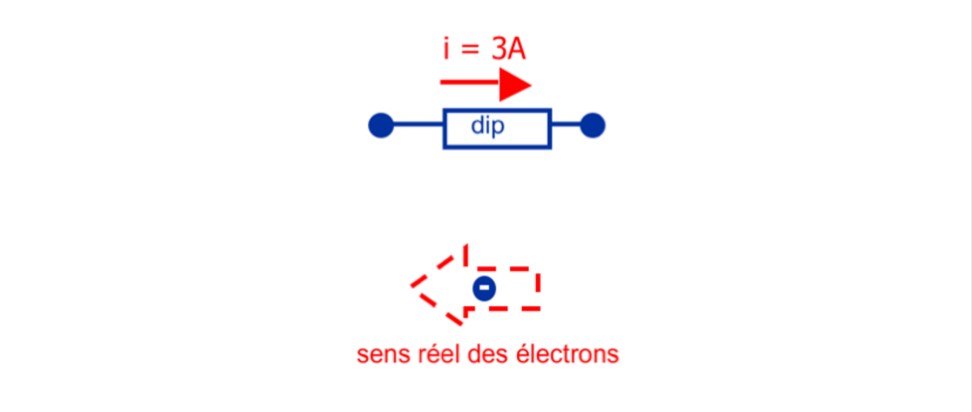

FIGURE 1.9 – La flèche de courant (au-dessus) désigne le sens de déplacement de charges positives (=courant conventionnel). Pour une intensité positive (ici 3A), les électrons vont donc en réalité dans le sens inverse de la flèche.

gauche), les charges positives se déplacent dans le sens indiqué par la flèche (et donc les électrons en sens inverse de la flèche)
- si la valeur du courant associé à une flèche est *négative* (figure 1.10 droite), les charges positives se déplacent en sens inverse de la flèche (et donc les électrons se déplacent dans le sens indiqué par la flèche)

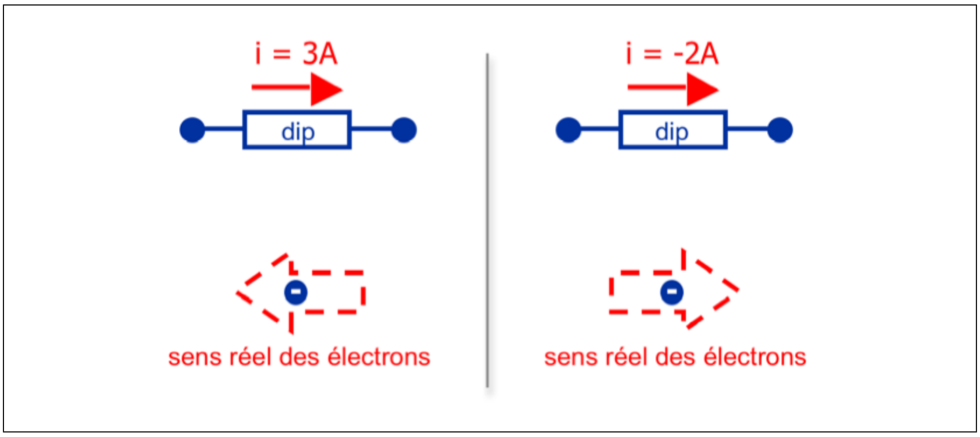

FIGURE 1.10 – La flèche de courant (au-dessus) désigne le sens de déplacement de charges positives (=courant conventionnel). Pour une intensité négative, les électrons vont donc en réalité dans le même sens que la flèche.

PRINCIPE : inverser le sens d'une flèche de courant

Travailler avec des valeurs négatives de courant n'est pas très intuitif et est source d'erreurs. La propriété suivante permet de transformer tous les courants négatifs en courants positifs :

on peut inverser le signe de l'intensité à condition d'inverser simultanément le sens de la flèche de courant correspondante

On peut vérifier sur base des conventions déjà indiquées que le sens de déplacement des électrons reste inchangé lors de cette double inversion.

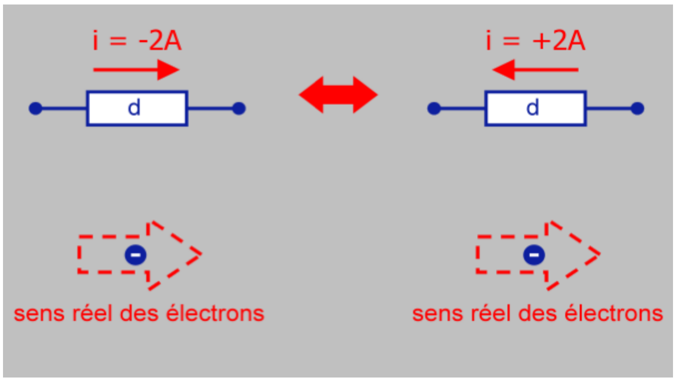

FIGURE 1.11 – Pour se débarrasser du signe "-" d'une intensité négative, il suffit d'inverser simultanément le signe de l'intensité *et* le sens de la flèche de courant qui lui est associée.

Circulation du courant en boucle fermée

Autre propriété importante relative aux courants : un courant ne peut circuler que dans une boucle fermée (à tout le moins dans ce cours). En d'autres termes, il faut toujours que le courant aille "quelque part" et en particulier revienne d'où il est parti : un "chemin de retour" doit toujours exister.

Dans certains schémas, le trajet du courant n'est pas évident. Il est toujours intéressant, lorsqu'on tente de comprendre un schéma, de se demander par où revient le courant. Tant qu'on ne le sait pas, on n'a pas complètement compris le schéma.

La formulation inverse, très utile pour gagner du temps lorsqu'on résoud un schéma, est également vraie :

Dans toute branche interrompue (circuit ouvert), le courant est nul.

Unités et ordres de grandeur

Voir section 1.5.

1.3 Tension(s)

1.3.1 La tension : un terme ambigu

Le terme "tension" est un terme ambigu car il recouvre implicitement deux concepts différents :

- le potentiel électrique
- la différence de potentiel ou ddp

Or pour comprendre certains schémas, il est crucial de distinguer ces concepts. Le fait d'utiliser le terme "tension" dans les deux cas est donc particulièrement malheureux. Avec un peu d'habitude, le contexte permettra de distinguer si le terme tension désigne un potentiel ou une différence de potentiel.

1.3.2 DDP et potentiel

Différence de potentiel

Considérons un dipôle quelconque, c'est-à-dire une paire de bornes dans un circuit : en plus du courant qui traverse le dipôle, il est également possible de mesurer une seconde grandeur électrique : la **différence de potentiel** (ou **ddp**) entre les deux bornes. Cette ddp se note classiquement U ou V et se représente par une flèche le long du dipôle (ou plus généralement entre les deux bornes concernées). La ddp se mesure en **volts**.

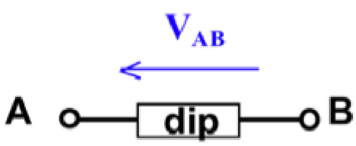

FIGURE 1.12 – Représentation de la différence de potentiel (V_{AB}) entre les nœuds A et B

Cette mesure se fait en plaçant un voltmètre entre les deux bornes (= nœuds) du dipôle :

La ddp est une grandeur concrètement mesurable sur un dipôle.

Une ddp V_{AB} se mesure au voltmètre ou au multimètre.

Potentiel électrique (première approche)

La ddp V_{AB} mesurable entre les bornes A et B d'un dipôle est donc un nombre. Celle-ci peut être vue, théoriquement parlant, comme la *différence* (au sens mathématique : *soustraction*) entre deux autres valeurs : le potentiel électrique au nœud A d'une part (que nous notons V_A) et le potentiel électrique au nœud B d'autre part (V_B).

Pour bien faire la distinction entre la ddp (V_{AB}) et les potentiels (V_A et V_B), nous prenons comme convention graphique de représenter les potentiels dans un encadré carré. Attention : cette convention est uniquement propre à ce cours.

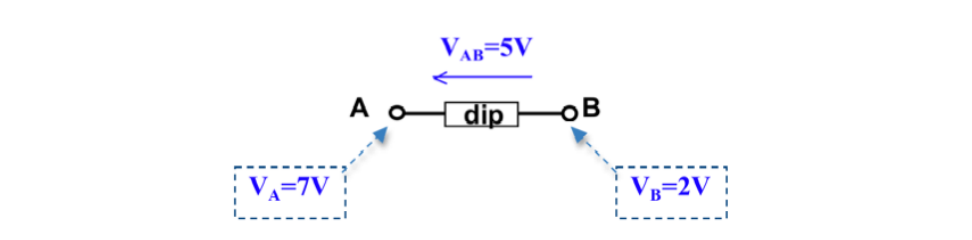

FIGURE 1.13 – Représentation des potentiels aux nœuds A et B (convention propre à ce cours)

Les deux potentiels ainsi que la ddp possèdent tous les trois les mêmes unités : ils s'expriment en volts. La différence entre les deux types de grandeurs apparaît néanmoins clairement sur la figure : une ddp se prend entre deux nœuds, alors qu'un potentiel est lié à un seul nœud.

Pour un dipôle donné, les trois valeurs (ddp entre A et B, potentiel au nœud A, potentiel au nœud B) sont bien entendu liées mais sont a priori différentes et ne doivent pas être confondues. La confusion entre ddp et potentiel est une des sources d'erreur les plus fréquemment rencontrées dans la résolution de circuits.

Pourquoi imaginer que la ddp, seule grandeur aisément mesurable, est la différence entre deux autres valeurs : les "potentiels" ? Ceci semble en première approche compliquer la situation. La raison est qu'il est parfois plus facile de raisonner sur les potentiels que sur les ddps.

Comment trouver les potentiels dont la ddp V_{AB} est la différence ? Cette question est discutée au §1.3.4. Précisons d'abord quelques conventions de représentation liées à ces notions.

1.3.3 Conventions et signes

Convention concernant le sens de la différence de potentiel

La ddp étant une soustraction, il est nécessaire de définir précisément le "sens" de cette soustraction faite entre les potentiels des deux nœuds du dipôle : nous prenons la convention que la différence de potentiel V est définie, lorsque la flèche va de B vers A, comme[3] :

3. Attention : certains ouvrages utilisent la convention inverse pour la soustraction : V_{AB} (=flèche pointant de B vers A) est défini comme $V_B - V_A$. Ceci montre bien le caractère arbitraire

$$V = V_A - V_B \tag{1.2}$$

où V_A et V_B sont les potentiels des bornes A et B.

Il découle de cette convention que pour une ddp V_{AB} positive, la borne A ("pointe" de la flèche) est à un potentiel plus élevé que la borne B ("queue" de la flèche). C'est le cas par exemple dans la fig. 1.13.

DDP négative

Comme pour un courant, il peut arriver, suite par exemple au calcul d'un schéma, que la valeur (de ddp) associée à une flèche de tension soit négative. Cette situation est à interpréter comme le fait que le potentiel du côté de la "pointe" de la flèche est moins élevé que le potentiel du côté de la "queue" de la flèche de la ddp.

Potentiel négatif

On notera qu'un potentiel lui-même peut être négatif. La notion de potentiel *plus élevé* ou *moins élevé* est à prendre au sens algébrique : V_A= - 5V est plus élevé que V_B= - 8V (et dans ce cas, la ddp V_{AB} est bien positive : $V_{AB} = V_A - V_B = +3V$).

PRINCIPE : inverser le sens d'une flèche de tension

Travailler avec des valeurs négatives de ddp est peu intuitif et source d'erreurs. Il est donc intéressant de connaître la propriété suivante :

on peut inverser le signe d'une valeur de ddp à condition d'inverser simultanément le sens de la flèche de ddp correspondante

On en voit un exemple à la figure 1.14. Cette propriété est tout-à-fait similaire à celle utilisée pour inverser les courants négatifs.

1.3.4 Interprétation des notions de potentiel et de masse

Potentiel et masse = notions théoriques

Intéressons-nous maintenant à la signification même de la notion de potentiel

Les potentiels, au contraire de la ddp, ne sont pas directement mesurables : il s'agit essentiellement de *valeurs construites théoriquement*. Elles sont utiles pour comprendre ou résoudre certains problèmes, mais elles ne sont pas directement liées à l'expérimentation.

de cette convention et implique qu'il est nécessaire de vérifier la convention utilisée par chaque auteur.

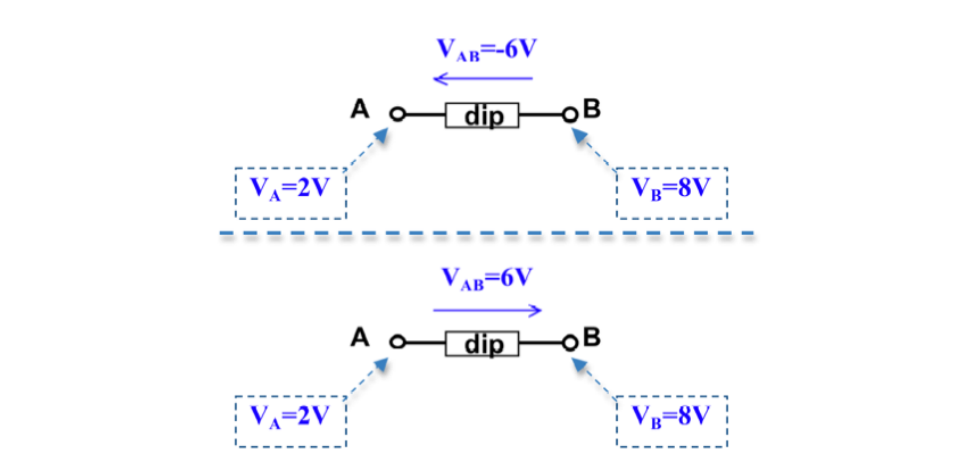

FIGURE 1.14 – Inversion d'une ddp négative (à noter : les potentiels restent inchangés)

Pour information, la définition du potentiel électrique est la suivante : *le potentiel électrique en un point vaut l'énergie à dépenser pour amener en ce point une charge électrique unitaire (1C) depuis un point où, par convention, ce potentiel vaut 0V.*

Cette définition a du sens au sein de la théorie de l'électromagnétisme, mais elle est peu pratiquable [4]. Dans le cadre de ce cours, nous retiendrons surtout de cette définition que parler de potentiels suppose que l'on ait défini un nœud particulier appelé "**masse**" :

la masse est le nœud dont le potentiel, par convention, est nul : $V_{masse} = 0V$

Le choix de la masse est bien une convention, c'est-à-dire un choix arbitraire de l'utilisateur.

Cette masse au potentiel $0V$ est le nœud qui va servir de référence pour tous les autres nœuds d'un schéma. La présence de cette référence commune à tous les nœuds va permettre en pratique de comprendre plus aisément le fonctionnement du schéma.

La masse se représente généralement par le symbole représenté fig. 1.15.

Choix de la masse et "potentiel défini à une constante près"

La définition du potentiel donnée ci-dessus indique que le nœud de potentiel nul (= la masse), donc le nœud par rapport auquel sont calculés tous les autres potentiels, est choisi *par convention.*

4. elle revient à dire que pour connaître le potentiel d'un point, il faut y amener une charge de 1C depuis par exemple l'infini (où le potentiel vaut 0V), et mesurer l'énergie qu'on a dépensée pour ce faire. La valeur d'énergie dépensée est égale au potentiel en volts. Peu pratique…

FIGURE 1.15 – Symbole de la masse

Cela signifie-t-il que n'importe quel nœud peut être la masse ? Oui : on dit que "*le choix de la masse est arbitraire*". Autrement dit : c'est bien à l'utilisateur de choisir quel nœud vaut $0V$, et il peut en changer s'il le souhaite [5].

Le fait que le choix de la masse est arbitraire peut paraître contradictoire avec le fait que cette masse est la référence commune à tous les nœuds du circuit. C'est néanmoins logique si on se rappelle que les potentiels ne sont pas des grandeurs directement mesurables, mais des valeurs construites théoriquement. Les potentiels sont des valeurs relatives, ce qui signifie que la valeur numérique d'un potentiel n'a en soi pas de sens physique : elle n'a de signification que par comparaison avec le potentiel d'un autre nœud. On dit que le potentiel est "*défini à une constante près*".

En supposant qu'on connaisse toutes les ddps dans un schéma (pour les avoir par exemple mesurées), il est impossible de calculer les potentiels des nœuds si on ne fixe pas la valeur du potentiel d'un premier nœud. Une fois cette valeur fixée, on peut calculer la valeur des autres potentiels (puisqu'on connaît toutes les ddps). Mais ceci montre bien que le choix initial est arbitraire.

Ceci revient encore à dire que si on additionne ou retranche à tous les nœuds d'un circuit une même valeur de potentiel, on ne change rien au fonctionnement du montage (et notamment aux courants et ddps mesurables sur celui-ci). Ceci est logique : si on additionne une valeur V_1 quelconque à deux potentiels V_A et V_B, la différence V_{AB} (ddp) n'est pas modifiée.

Ajouter ou retrancher une même valeur de potentiel à tous les nœuds revient précisément à changer de masse, et est donc cohérent avec le fait que le choix de la masse est arbitraire.

Présence/absence de masse

Faut-il toujours définir une masse ? Non.

Les différentes situations auxquelles on peut être confronté sont typiquement les suivantes :

- Lorsqu'on résoud un circuit, si on ne s'intéresse qu'aux ddps, il n'est pas nécessaire de définir (c'est-à-dire choisir et représenter) une masse.

5. cette opération, qui s'apparente à un simple changement de variables, est néanmoins rare et plutôt déconseillée quand on résoud un circuit, sauf si on est certain de la maîtriser.

- Par contre si on s'intéresse aux potentiels, il sera nécessaire de choisir et représenter explicitement une masse.
- Par ailleurs, de nombreux montages, dans leur principe de fonctionnement, sont basés sur l'utilisation d'un nœud particulier jouant un rôle "central" de référence pour tout le montage. On choisira naturellement ce nœud comme étant la masse et il sera représenté comme tel.
- Enfin au laboratoire, lorsqu'il s'agira de connecter plusieurs appareils ensemble (ce qui inclut aussi le simple fait de mesurer une tension !), il sera crucial de manipuler correctement les masses des différents appareils : on prendra alors certainement soin de les définir et les représenter. Dans le cas contraire, on risque de provoquer des court-circuits.

Globalement, on pourra donc retenir le principe suivant :

Si l'on ne s'intéresse qu'aux ddps, **il n'est pas nécessaire de définir une masse**

Dans tous les autres cas (en ce compris au laboratoire en présence d'un montage réel), il sera très probablement nécessaire ou avantageux de le faire.

Quelle "tension" dans la loi d'un dipôle ?

La plupart des dipôles sont chacun régis par une loi qui lie le courant et la tension relatifs à ce dipôle (voir chap. 2). C'est par exemple le cas de la loi d'Ohm $V = RI$ pour une résistance.

Dans une telle loi, quelle tension représente V ? Une ddp ou un potentiel ? On retiendra que :

Dans la loi d'un composant, **la tension évoquée est toujours la ddp sur le dipôle** **(et non le potentiel sur l'une de ses bornes)**

1.3.5 Potentiel représenté comme une ddp

Cas particulier : ddp par rapport à la masse = potentiel

Nous avons insisté sur le fait que dans le cas général, trois valeurs de tension peuvent être définies sur un dipôle :

- une ddp
- et deux potentiels

Si ces trois valeurs sont a priori différentes, il existe néanmoins un cas particulier ou deux de ces valeurs sont identiques : lorsque le nœud de référence de la ddp (= nœud de la "queue" de la flèche de ddp) est la masse. Dans ce cas, la ddp V_{AB} possède la même valeur numérique que le potentiel du nœud A (V_A) vers lequel pointe la flèche de tension.

En d'autres termes : si $V_B = 0$, $V_{AB} = V_A$.

**la ddp entre un nœud A quelconque et la masse
est numériquement égale au potentiel de ce nœud A**

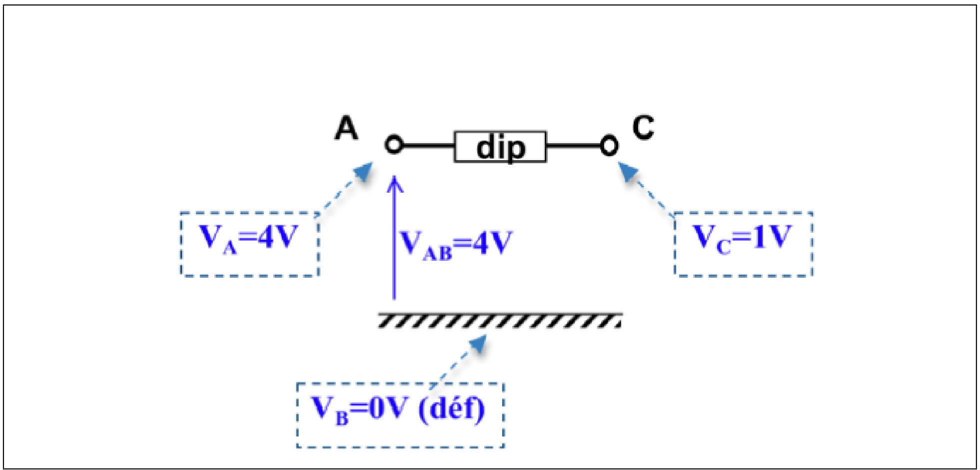

FIGURE 1.16 – Cas particulier d'une ddp relative à la masse : $V_{AB} = V_A$

Représentation du potentiel sous forme de ddp

Dans la pratique, le potentiel d'un nœud ne sera jamais représenté comme à la figure 1.13 ou à la figure 1.14. Nous avons utilisé jusqu'ici cette notation particulière pour bien faire comprendre la différence entre ddp et potentiel, mais ce n'est pas la pratique usuelle.

Dans la pratique, on représentera le potentiel d'un nœud sous forme... d'une ddp par rapport à la masse (ceci est permis si on se réfère au cas particulier illustré à la fig. 1.16). On ne trouvera donc dans les schémas que des ddps, comme par exemple dans la figure ci-dessous, qui représente la même situation que la figure 1.13 .

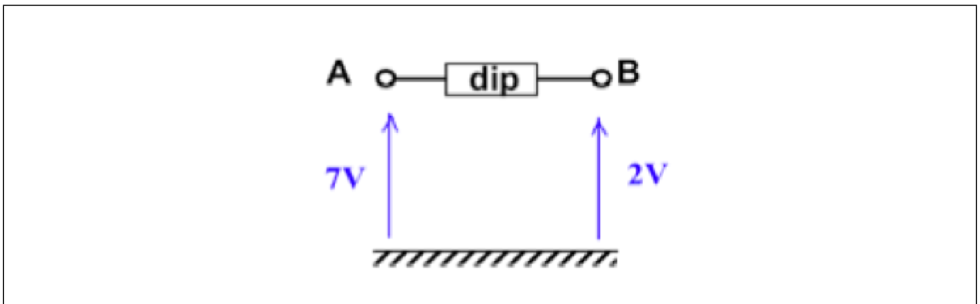

FIGURE 1.17 – Représentation des potentiels aux nœuds A et B (convention propre à ce cours)

Dans celles-ci, les ddps représentées sont identiques aux potentiels des nœuds concernés (puisque ces ddps sont prises par rapport à la masse), et au besoin on déduira de celles-ci la valeur de la ddp sur le dipôle, à savoir $V_{AB} = 5V$.

On rappellera néanmoins que la principale information, dans un tel schéma, est précisément que la ddp sur le dipôle vaut 5V, puisque les valeurs 7V et 2V sont relatives (= dépendent du choix de la masse) et non directement mesurables.

On arrive donc à une situation un peu paradoxale où l'on représente des grandeurs relatives à un choix arbitraire (les potentiels aux nœuds, représentés chacun sous forme d'une ddp par rapport à la masse) et où l'on ne représente pas les ddps sur les dipôles, qui sont pourtant elles les grandeurs directement mesurables et qui ne dépendent pas du choix de la masse.

On peut regretter que la notation usuelle entretient la confusion entre ddp et potentiel, mais c'est un fait. Ceci peut néanmoins s'expliquer par le fait que dans la majorité des montages réels, on définira effectivement un nœud "physique" du montage comme étant la masse, nœud par rapport auquel on effectuera toutes les autres mesures. La masse, bien que arbitrairement définie, prendra alors une existence très concrète.

A partir de ce moment, il sera bien entendu essentiel de maîtriser au laboratoire cette notion de masse (c'est-à-dire de comprendre très clairement quel est le ou les nœuds qui servent de référence aux mesures et aux montages), sans quoi les mesures risquent d'être faussées voire le montage détruit.

1.3.6 Tension différentielle

Tension différentielle

Dans un montage comportant une masse, on considérera ou mesurera le plus souvent des *potentiels*, c'est-à-dire des ddps dont la borne de référence est la masse.

Il arrivera néanmoins que même en présence d'une masse, on soit amené à considérer ou mesurer une ddp dont aucun des noeuds n'est à la masse. On devra en particulier faire attention à la manière de mesurer une telle ddp pour ne pas perturber le montage. C'est un des moments où il sera essentiel de bien distinguer ddp et potentiel tels que nous les avons définis dans ce chapitre.

Pour insister sur le fait qu'une telle ddp ne peut être assimilée à un potentiel relatif à la masse du montage, on appellera cette ddp **tension différentielle**. Ce concept de tension différentielle, auquel répond le concept de tension de mode commun sera approfondi ultérieurement. Il est néanmoins déjà utile de noter la définition suivante :

Une tension différentielle est une ddp entre deux bornes dont aucune n'est (a priori) la masse

(Le "a priori" figurant dans la définition ci-dessus signifie que, même si dans certains cas on peut mettre une des bornes à la masse, le montage n'a pas été prévu en ce sens.)

Entrée/sortie différentielle

On appelle **entrée différentielle** (d'un circuit) une paire de bornes destinée à recevoir un signal d'entrée sous forme d'une tension différentielle.

On appelle **sortie différentielle** (d'un circuit) une paire de bornes destinée à délivrer un signal de sortie sous forme d'une tension différentielle.

1.3.7 Force électromotrice

Pour un dipôle de type source de tension idéale, la ddp sera souvent appelée **force électromotrice** ou **f.e.m.** ou **fem**. La force électromotrice est donc simplement un cas particulier de ddp : la ddp d'une source de tension idéale [6]. Par opposition par exemple à une "simple" ddp sur une résistance, une fem est générée par l'un ou l'autre phénomène physique, par exemple :

- fem induite dans un enroulement de machine électrique (loi de Lenz, voir §2.3.2)
- fem d'origine électrochimique aux bornes d'une pile
- fem aux bornes d'un alternateur
- etc

1.3.8 Terre = protection

Terre >< masse

On confond souvent les notions de masse et de terre. Elles ont cependant des définitions tout-à-fait différentes.

La notion de masse a déjà été discutée précédemment : la masse est le noeud choisi conventionnellement comme référence (0V) du potentiel électrique. Il s'agit avant tout d'une notion théorique.

La terre est un concept différent et beaucoup plus concret : la **terre** d'un montage est un conducteur (ou un ensemble de conducteurs) mis au potentiel électrique du sol, dans un but de protection des personnes et des équipements.

La notion de terre est relative à la sécurité des personnes et équipements.

La terre et la masse possèdent des symboles différents (voir fig. 1.18).

De la même manière qu'on peut parfois confondre les termes de potentiel et de ddp par abus de langage, on confond souvent les termes de masse et de terre car dans de nombreuses circonstances cette distinction n'est pas cruciale. Il vous revient de connaître la distinction entre ces deux notions et d'être capable de juger quand une distinction explicite de ces notions est nécessaire ou non.

On notera que le terme **référence** est utilisé comme terme générique pour désigner les notions de terre et de masse.

6. par abus de langage, on utilisera même parfois le terme "fem" pour la ddp d'une source de tension non idéale

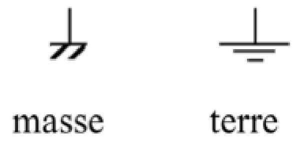

FIGURE 1.18 – Symboles de la masse et de la terre (mettre aussi le triangle)

FIGURE 1.19 – piquet de terre dans une pompe à essence

Principe de base d'une prise de terre

Concrètement, la "mise à la terre" (c'est-à-dire la mise au potentiel du sol) s'effectue en reliant les conducteurs concernés à un piquet planté suffisamment profondément dans le sol, non loin de l'endroit du montage. C'est notamment le cas :

- de la troisième borne visible dans de nombreuses prises des installations domestiques ou industrielles
- en principe du châssis/boîtier de tout équipement électrique, si ce boîtier est conducteur

Les conducteurs de terre sont facilement repérables par une convention particulière : ces fils (et eux seuls [7]) possèdent la double couleur "jaune+vert".

7. selon le RGIE (Règlement général des installations électriques), les fils constituant le réseau électrique d'une maison doivent respecter certaines conventions de couleur. Dans les maisons

Le rôle de la terre est (notamment) de protéger l'utilisateur contre l'électrocution en cas de défaut d'un appareil électrique. Supposons en effet qu'un appareil électrique soit défectueux, de telle manière qu'un fil interne à l'appareil et portant une tension élevée (par exemple 220V) touche son châssis métallique. Si l'utilisateur touche ce châssis, il subira une ddp entre d'une part un potentiel de 220V (alternatif) et d'autre part le potentiel du sol sur lequel il se trouve (figure 1.21). Un courant électrique circulera donc à travers l'utilisateur, courant qui pourra éventuellement être mortel [8].

Pour éviter un tel risque d'électrocution, toute partie métallique d'un appareil qui pourrait être touchée de l'extérieur doit être mise à la terre. L'idée étant que le conducteur de terre offre, en cas de défaut, un chemin de moindre résistance que le corps de l'utilisateur (figure 1.22). Par ailleurs, un différentiel (présent de manière obligatoire dans tout tableau électrique) vérifie en permanence que la somme des courants entrants et sortants de l'installation est "nulle" : dans le cas contraire, le courant "manquant" constitue une "fuite" qui pourrait précisément être en train de tuer un utilisateur. Concrètement, toute installation domestique doit posséder :

- un différentiel général qui coupe la fourniture de courant s'il détecte une fuite de plus de 300mA
- un différentiel spécifique (dix fois plus sensible) pour les pièces d'eau - cuisine et salle de bains- qui coupe la fourniture de courant s'il détecte une fuite de plus de 30mA

Cas particulier : masse = terre

A priori, la masse et la terre remplissent des fonctions tout-à-fait différentes et ne sont pas a priori liées.

Pour les montages qui sont mis à la terre, cette "terre" représentera simplement un des nœuds du montage, porté par définition au potentiel électrique du sol à cet endroit. Mais comme on l'a vu, il n'est même pas forcément nécessaire de connaître ce potentiel pour résoudre le montage ou faire fonctionner l'équipement.

Si l'on veut choisir un nœud de masse, il est bien entendu possible de prendre le nœud de terre comme nœud de masse. La terre portera alors par convention le potentiel $0V$ (en tant que masse). Le nœud correspondant remplira donc les deux fonctions.

anciennes, il est courant que les conventions actuelles (qui n'existaient pas à l'époque) ne soient pas respectées. Dans ce cas, le propriétaire n'est pas obligé de recâbler l'installation SAUF pour les fils de terre qui doivent impérativement (et eux seuls) être de couleur "jaune/vert". Ceci pour des raisons évidentes de sécurité de toute personne qui travaillerait sur l'installation.

8. La gravité de l'électrocution dépend principalement de l'intensité du courant ainsi que du parcours du trajet dans le corps : le courant peut devenir mortel à partir d'environ 30mA ! L'intensité dépend elle-même de la résistance de l'utilisateur. C'est la raison pour laquelle les consignes de mise à la terre sont particulièrement strictes dans les salles de bains et les cuisines où l'utilisateur, en contact avec de l'eau (milieu conducteur), peut présenter une résistance très faible.

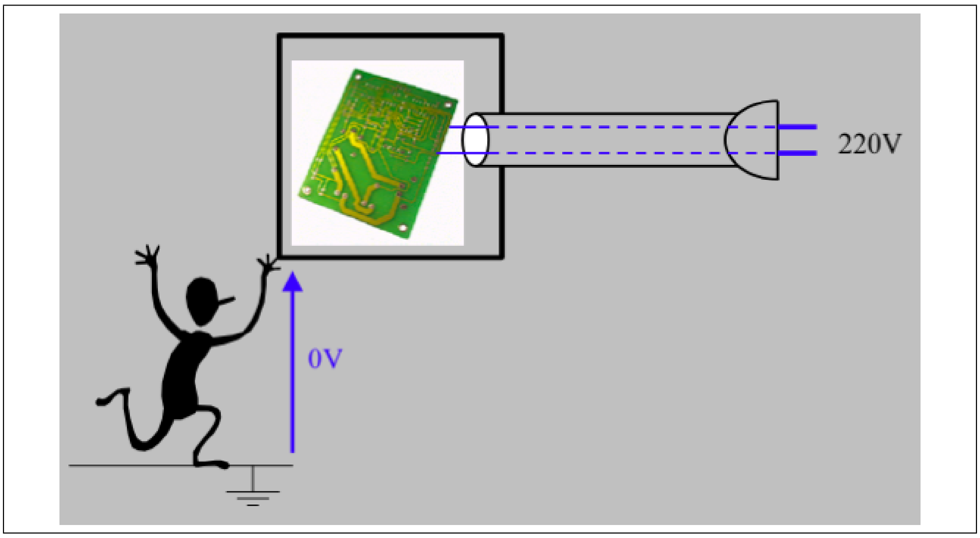

FIGURE 1.20 – Cas d'un appareil non mis à la terre et sans défaut : c'est l'utilisateur qui impose son potentiel au châssis lorsqu'il le touche (pas d'électrocution).

Lorsqu'une terre est clairement identifiée, le choix le plus courant consistera à lui affecter la fonction de masse (0V). La figure ci-dessous montre néanmoins que ce n'est pas toujours le cas puisque l'autocollant visible sur cet autoradio mentionne la présence d'une "terre négative" (negative ground).

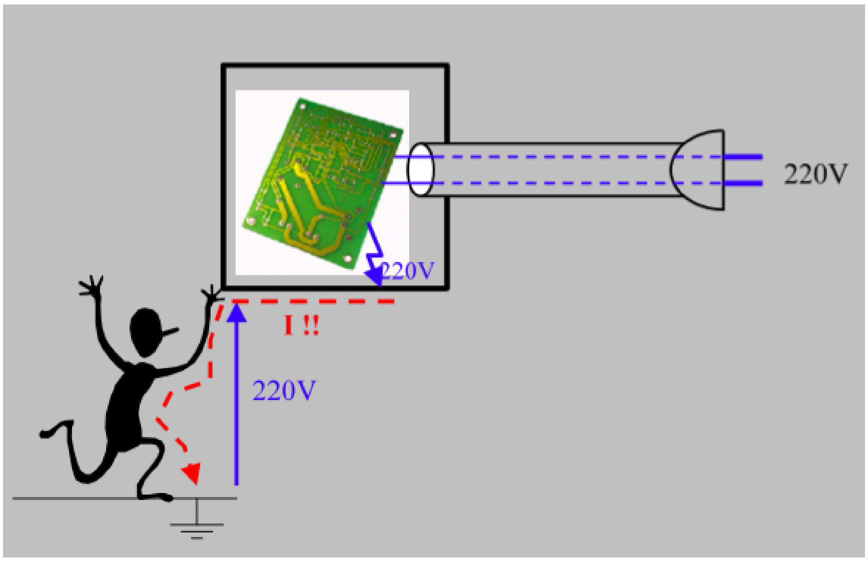

FIGURE 1.21 – Cas d'un appareil non mis à la terre et présentant un défaut : l'utilisateur voit une différence de potentiel de 220V (électrocution).

1.4 Puissance, composants actifs et composants passifs

1.4.1 Composants actifs et passifs : définition intuitive

En appliquant une ddp à une résistance pour y faire circuler un courant, on lui communique typiquement de l'énergie.

Un dipôle qui, comme une résistance, est uniquement capable de "consommer" de l'énergie (en fait, de la dissiper par effet Joule pour la résistance) est dit **passif**.

A l'inverse, la source de tension qui impose la ddp aux bornes de la résistance injecte, elle, de l'énergie dans le montage : c'est un dipôle **actif**.

1.4.2 Conventions récepteur et générateur

Convention récepteur

Revenons à la résistance. Compte tenu des conventions de signe que nous avons prises précédemment, on peut faire le raisonnement suivant (fig. 1.25) :

- si l'on suppose la tension V positive, la borne A porte un potentiel "plus positif" (plus élevé) que la borne B ;
- les électrons, parce qu'ils portent une charge négative, sont donc attirés par la borne A et repoussés par la borne B. Dans la résistance, ils circulent donc de B vers A (pour autant que le circuit soit fermé).
- le courant conventionnel, qui est l'inverse du courant d'électrons, circule donc de A vers B dans la résistance.

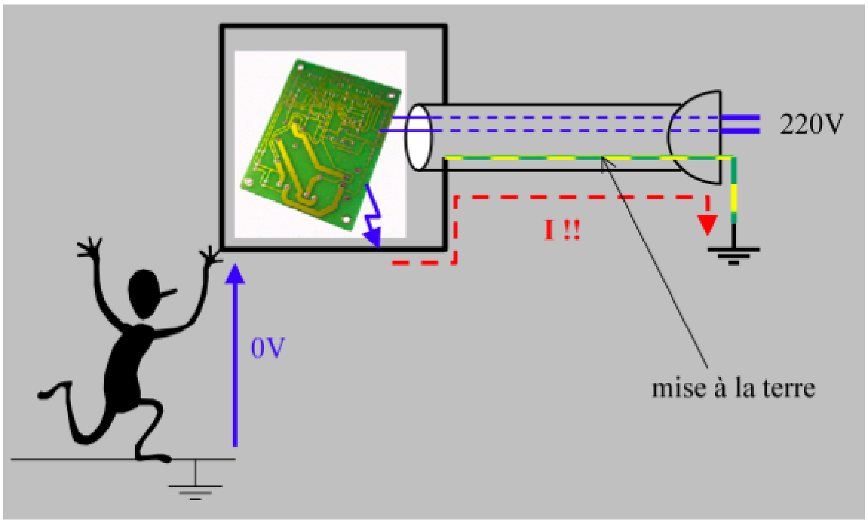

FIGURE 1.22 – Cas d'un appareil mis à la terre et présentant un défaut : l'utilisateur voit une différence de potentiel nulle (pas d'électrocution).

FIGURE 1.23 – Autoradio

On en conclut que dans une résistance, et plus généralement dans tout dipôle passif, les flèches de courant et de tension sont de sens opposés : c'est la **convention récepteur**. Elle signifie simplement que lorsqu'on suppose qu'un dipôle est passif, il est logique de tracer des flèches de tension et de courant opposées, dans le but d'obtenir une valeur de puissance *consommée* positive.

Convention générateur

Considérons maintenant le circuit complet, formé d'une résistance et d'une source de tension (fig. 1.26). Il est inévitable que dans la source les flèches de tension et de courant soient dans le même sens. En effet, la tension est orientée de la même manière sur la source et la résistance (puisque la flèche de tension pointe vers le noeud le plus positif, qui est le même pour les deux composants) alors que le courant doit lui parcourir une boucle.

FIGURE 1.24 – Détail de l'autocollant visible sur l'autoradio de la figure précédente : la mention d'une terre "négative" ("negative ground") montre bien que la terre n'est pas toujours à 0V

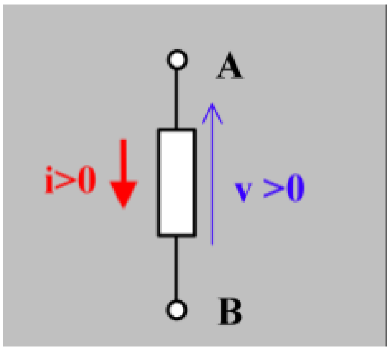

FIGURE 1.25 – convention "récepteur"

En d'autres termes, le courant, qui circule du potentiel le plus élevé vers le potentiel le plus faible dans un élément passif, doit forcément faire l'inverse (circuler du potentiel le plus faible vers le potentiel le plus élevé) dans la source (composant actif), sans quoi il ne pourrait pas circuler selon une boucle fermée.

Ceci est cohérent avec le fait que c'est la source qui va fournir de l'énergie au circuit, précisément en imposant une ddp ou un courant. Ceci peut être interprété comme le fait que le rôle de la source est de "relever" le potentiel (qui subit des chutes dans les éléments passifs du circuit), tout comme le rôle d'une pompe est de relever la valeur de la pression dans un circuit hydraulique.

Il est donc logique, pour les composants actifs, d'utiliser la **convention générateur** (fig. 1.27) dans laquelle les flèches de courant et de tension sont dans le même sens.

1.4.3 Formule de la puissance

La **puissance électrique**, c'est-à-dire l'énergie fournie ou reçue par unité de temps, est le produit de la ddp par l'intensité du courant électrique. Elle s'exprime en watts.

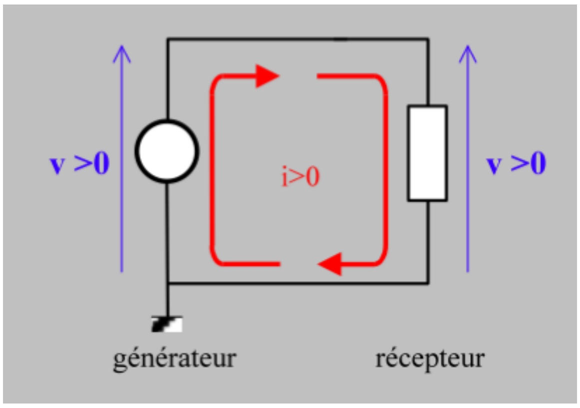

FIGURE 1.26 – signes de la tension et du courant dans un circuit complet

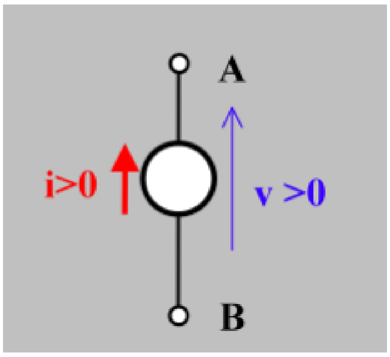

FIGURE 1.27 – convention "générateur"

A un instant t donné, la puissance fournie ou reçue par un dipôle vaut :

$$p(t) = v(t)i(t) \tag{1.3}$$

Lorsque les grandeurs V et I sont continues, on peut évidemment écrire cette formule :

$$P = VI \tag{1.4}$$

Attention néanmoins :

Lorsque les grandeurs électriques varient dans le temps (et notamment sont sinusoïdales), la formule 1.4 n'est a priori plus valide. Au contraire, la formule 1.3 reste utilisable en toutes circonstances.

C'est précisément pour que la valeur $p(t)$ soit positive qu'il est logique d'utiliser :

- la convention récepteur pour les dipôles charge
- la convention générateur pour les dipôles source

(Attention il ne s'agit néanmoins en aucun cas d'une garantie : en fonction du circuit, il pourra apparaître, même en utilisant ces conventions, des moments où la puissance est négative, c'est-à-dire où le rôle (passif/actif) du dipôle concerné dans le circuit s'inverse.)

1.5 Unités et ordres de grandeur

- Un courant I s'exprime en ampères [**A**]. Les valeurs courantes en électronique vont de *10µA à 100mA*.
- Une tension V s'exprime en volts [**V**]. Les valeurs courantes vont de *100µV à 100V*.
- Une charge électrique Q s'exprime en coulombs [**C**]. Un électron porte une charge élémentaire négative qui vaut environ $-1,6.10^{-19}$ C.
- Une puissance P s'exprime en watts [**W**]. Les valeurs courantes vont de *10µW à 10W*.

Chapitre 2

Dipôles électriques idéaux

Tout montage est un assemblage de composants. Dans ce chapitre, nous passons en revue les principaux composants *électriques* utilisés pour composer des montages. Ces composants sont en grande majorité des dipôles :

- la section 2.3 considérera les dipôles jouant le rôle de charge : résistance, inductance, capacité ;
- la section 2.4 considérera les dipôles jouant le rôle de source : source de tension idéale et source de courant idéale ;
- la section 2.5 considérera deux dipôles particuliers : le court-circuit et le circuit ouvert ;
- la section 2.7 évoquera quelques quadripôles, notamment les sources commandées et le transformateur idéal.

Au-delà de ce simple "catalogue" de composants et des liens qui peuvent exister entre eux, ce chapitre contient quatre sections supplémentaires qui sont essentielles en termes de compréhension :

- la section 2.1 clarifiera brièvement les "outils" via lesquels on peut décrire (ou caractériser) un composant ;
- la section 2.2 discutera la nature profonde des composants ainsi décrits, pour finir par conclure que ces composants... n'existent pas (!) ;
- la section 2.6 attirera l'attention sur quelques combinaisons impossibles de ces dipôles dans un circuit ;
- la section 2.8 clarifiera la différence entre composants linéaires et non linéaires, une distinction essentielle en électronique.

2.1 Comportement externe : loi et caractéristique d'un dipôle

2.1.1 Etat électrique d'un dipôle

Sur un dipôle donné, on peut mesurer à un instant donné deux valeurs électriques I et V :

- le courant I se mesure en mettant un ampèremètre en série avec le dipôle,
- la ddp V se mesure en mettant un voltmètre en parallèle sur le dipôle.

L'**état électrique** d'un dipôle est le *couple* (I,V) de valeurs électriques mesurables sur ce dipôle à un moment t donné. L'état électrique peut varier en fonction du temps.

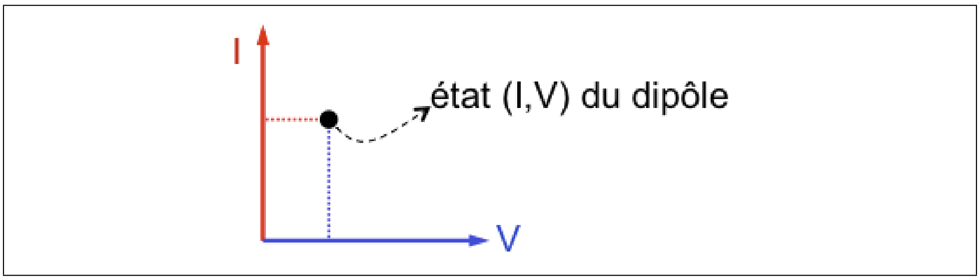

FIGURE 2.1 – état électrique d'un dipôle dans le plan (I,V)

2.1.2 Comportement électrique du dipôle

A tout instant, les valeurs I et V sur un dipôle ne sont pas quelconques. En fonction du dipôle concerné, différents **comportements électriques**, c'est-à-dire variations respectives de I et V, peuvent être observés. Parmi les plus simples :

- V et I varient de manière *proportionnelle* (cas de la résistance)
- V reste *constant* même si I varie (cas de la source de tension idéale)
- I reste *constant* même si V varie (cas de la source de courant idéale)

De manière générale, le dipôle impose une contrainte sur l'état électrique, c'est-à-dire réduit d'*un degré de liberté* les valeurs possibles du couple (I,V) [1].

La suite du chapitre sera précisément consacrée à détailler les comportements possibles d'un certain nombre de dipôles dits "idéaux".

2.1.3 Loi du dipôle

La **loi** (du dipôle) est simplement la formule exprimant mathématiquement le comportement électrique du dipôle, c'est-à-dire la contrainte existant sur le

1. qui sinon pourrait être n'importe quel point du plan (V,I), c'est-à-dire possséderait deux degrés de liberté

couple (I,V). Il peut s'agir en particulier d'une relation *liant* I et V.

Exemples :

- la loi la plus célèbre est la **loi d'Ohm** $V = RI$ s'appliquant aux résistances : elle impose que V et I varient proportionnellement l'un par rapport à l'autre
- une source de tension idéale répond à la loi $V = E$, où E est une constante (ce qui sous-entend que I varie indépendamment de V)
- une source de courant idéale répond à la loi $I = J$, où J est une constante (ce qui sous-entend que V varie indépendamment de I)

2.1.4 Caractéristique

Caractéristique d'un dipôle

La **caractéristique** est la représentation graphique du comportement électrique du dipôle. Sauf mention contraire, la caractéristique d'un dipôle est tracée dans un plan (I,V) [2].

A titre d'exemples, dans ce plan (I,V) :

- la caractéristique d'une résistance est une *droite de pente* $1/R$ passant par l'origine du plan (fig. 2.4)
- la caractéristique d'une source de tension de valeur E est une *droite verticale d'abscisse E*
- la caractéristique d'une source de courant de valeur J est une *droite horizontale d'ordonnée J*

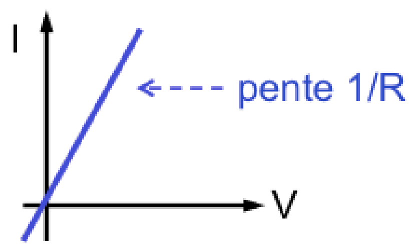

FIGURE 2.2 – caractéristique d'une résistance dans le plan (I,V)

La caractéristique n'apporte aucune information supplémentaire par rapport à la loi : ces deux formulations sont équivalentes, la loi étant simplement l'équation de la caractéristique.

On notera encore que :

- l'état électrique mesurable à un instant t donné sur le dipôle correspond à un *point* sur la caractéristique
- inversement, la caractéristique est le lieu (au sens mathématique) des états électriques, c'est-à-dire que la caractéristique regroupe tous les

2. (I,V) signifiant que I est en ordonnée et V en abscisse. Une représentation (V,I) est bien entendu également possible mais plus rare en électronique.

états possibles du dipôle : pour un dipôle donné, on ne trouvera jamais des valeurs de I et V qui ne correspondent pas à un point de la caractéristique.

Enfin il est important de comprendre que la caractéristique décrit uniquement le comportement *externe* du composant : I et V sont en effet des grandeurs mesurables sur le composant, sans nécessité de se référer à son "fonctionnement interne". En d'autres termes, la caractéristique n'*explique* rien : elle décrit simplement les valeurs de I et V admissibles aux bornes du composant.

Caractéristique : une notion plus générale

La notion de caractéristique est en fait beaucoup plus large que la définition donnée ci-dessus. De manière générale, une caractéristique est la représentation graphique du lien entre deux grandeurs relatives à un "composant", pas forcément électrique. La notion de caractéristique s'applique également :

- à d'autres composants électroniques (quadripôles, transistors, etc)
- dans d'autres disciplines, comme par exemple en mécanique (Figure 2.3)

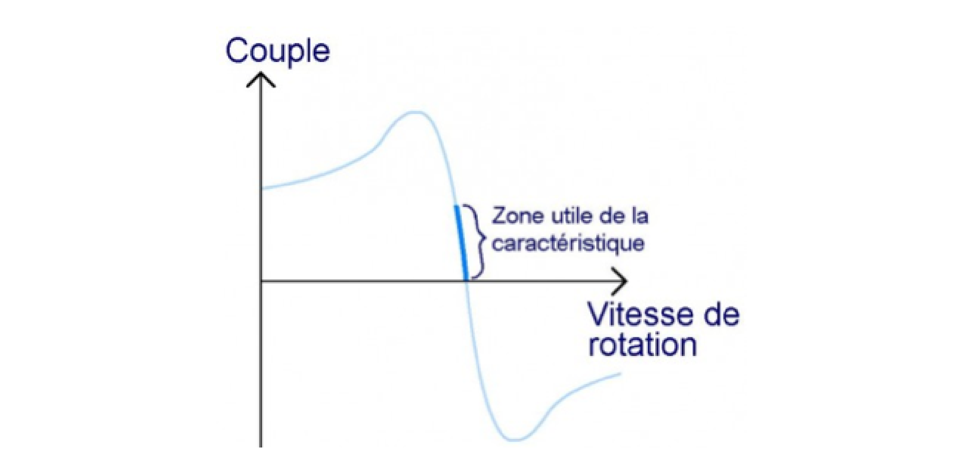

FIGURE 2.3 – exemple de caractéristique d'un moteur électrique asynchrone : la caractéristique décrit le lien entre *couple* et *vitesse de rotation*

Circuit extérieur

La notion de caractéristique n'a de sens que si on suppose que le dipôle considéré est connecté ou va être connecté à un **circuit extérieur** :

> **On suppose de fait, quand on parle de caractéristique, qu'il existe un *circuit extérieur*, c'est-à-dire un ensemble d'autres composants auxquels est connecté le dipôle considéré.**

La caractéristique va précisément permettre de calculer les propriétés du circuit complet constitué du circuit extérieur et du dipôle considéré, et notamment les tensions et courants.

En particulier, même si aucun autre composant n'est en apparence connecté au dipôle auquel on s'intéresse, on peut supposer, lorsqu'on examine sa caractéristique, que celui-ci délivre ou absorbe du courant.

2.2 Dipôles réels >< dipôles idéaux

La section précédente a clarifié le vocabulaire relatif aux "outils" permettant de décrire le comportement électrique d'un dipôle : il s'agit pour l'essentiel de la loi et de la caractéristique qui décrivent toutes deux le lien existant entre V et I pour un dipôle considéré. Pour rappel, ces deux outils sont synonymes : ils expriment sous deux formes complémentaires (*analytique* et *graphique*) le comportement du dipôle. Mais pour un dipôle donné, quel est ce comportement ? On peut distinguer deux cas.

- Si l'on dispose physiquement d'un composant, on peut imaginer de lui imposer des valeurs de V ou I au moyen d'une source adéquate et de mesurer la valeur de l'autre grandeur (I ou V). En portant ces couples de valeurs en graphique, on obtiendra la caractéristique de ce dipôle. Et on pourra également, si celle-ci n'est pas trop complexe, établir une équation qui reproduit de manière plus ou moins approximative ce graphique : on aura alors obtenu la loi du dipôle [3]
- A l'inverse, on peut imaginer de *définir* un dipôle par sa loi, c'est-à-dire de poser une équation portant sur V et/ou I et d'interpréter celle-ci comme décrivant un dipôle. Mais il faut prendre conscience qu'on définit alors un dipôle fictif… qui n'est rien d'autre qu'un objet mathématique idéal. La question est alors de savoir s'il existe un dipôle réel qui correspondrait à une telle loi.

Force est de constater que les composants qui figurent dans les schémas appartiennent à la *seconde catégorie* : comme on pourra s'en convaincre dans la suite du chapitre, les composants classiquement utilisés répondent à des lois simples… voire réellement élémentaires. Il ne s'agit pas d'un hasard : la raison de cette simplicité est que ces dipôles ont été *définis* par ces lois, qui n'étaient précisément utiles que parce qu'elles étaient simples.

Ceci nous amène à conclure que les dipôles que nous utilisons couramment dans les schémas sont "idéaux" : ils appartiennent -au sens propre- au monde des "idées". De ce fait ils sont parfaits, et même trop parfaits pour être réels : le comportement d'un composant réel est *toujours bien plus complexe*. Néanmoins dans bon nombre de situations, les dipôles idéaux suffiront à décrire de manière suffisamment approchée cette réalité complexe. Pour autant, ceci nous permet quand même de formuler le principe suivant :

Les dipôles idéaux n'existent pas

Cette utilisation d'un objet simple représentant dans certaines limites une réalité beaucoup plus complexe n'est rien d'autre que le principe de base de la

3. De nombreux composants électroniques, parce qu'ils possèdent un comportement complexes, sont uniquement décrits, dans leur notice d'utilisation, par des caractéristiques c'est-à-dire par des graphiques. Ceci ne contredit pas la discussion ci-dessus.

démarche scientifique elle-même : *la science consiste en grande partie à identifier des modèles formalisés qui représentent le monde réel complexe dont nous faisons partie.*

Dans cette démarche, l'ingénieur occupe une position-clé puisqu'il est le spécialiste des "sciences appliquées", c'est-à-dire celui qui non seulement est capable de maîtriser les modèles et les langages des modèles (mathématiques, informatique, etc), c'est-à-dire la "théorie", mais également d'utiliser ces modèles avec discernement pour créer efficacement des dispositifs techniques dans le monde réel : ponts, voitures, équipements électroniques ou médicaux, etc.

C'est là que se situe tout l'art de l'ingénieur : raisonner rigoureusement sur des objets fictifs (qui représentent le monde réel dans des limites qu'il maîtrise)... pour agir sur le monde réel.

Pour revenir aux dipôles idéaux, il ne faudra pas perdre de vue qu'en les utilisant, on manipule des outils mathématiques ne représentant la réalité que dans certaines limites. Il faudra donc en permanence rester vigilant à la validité des résultats obtenus et ne pas hésiter à les remettre en cause au besoin.

La suite du chapitre est donc à comprendre comme un passage en revue de la "bibliothèque de composants fictifs" qui est à notre disposition pour décrire la réalité. Une bibliothèque très efficace... pour peu qu'on l'utilise correctement.

2.3 Charges idéales : trois effets physiques

Le long cheminement scientifique qui a conduit à la théorie de l'électromagnétisme a abouti à distinguer *trois* effets différents liant potentiellement le courant et la tension dans un dipôle passif : l'effet résistif, l'effet capacitif et l'effet inductif.

Dans les dispositifs réels (ne fût-ce que dans un bout de fil) les trois effets sont plus ou moins présents suivant les circonstances : dimensions du fil, matériau utilisé, fréquence des signaux, etc. Nous présentons ici les trois effets au niveau théorique, ainsi que les dipôles idéaux qui les représentent.

2.3.1 Résistance

Effet résistif (loi de la résistance) : loi d'Ohm

L'**effet résistif** se caractérise par le fait que le courant varie proportionnellement à la différence de potentiel. La formulation mathématique de cette propriété est la loi d'Ohm :

$$V = R.I \tag{2.1}$$

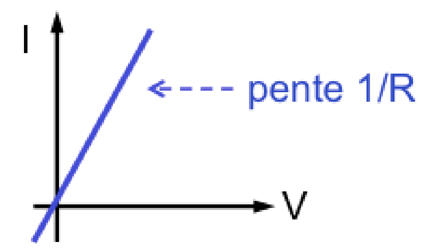

FIGURE 2.4 – caractéristique d'une résistance dans le plan (I,V)

Cette loi est valable à tout instant donné. Pour insister sur cet aspect et éviter de confondre avec des valeurs continues (ce qui sera important dans la suite), nous réécrivons explicitement cette loi d'Ohm en valeurs instantanées (c'est-à-dire à un instant t) :

$$v(t) = R.i(t) \tag{2.2}$$

La **résistance** d'un dipôle n'est donc rien d'autre que le facteur de proportionnalité R existant entre la différence de potentiel et le courant existant à un même moment sur ce dipôle. Ce facteur s'exprime en ohms (symbole Ω).

Son inverse, la **conductance**, est notée G et s'exprime en siemens (symbole S) :

$$i(t) = G.v(t) \tag{2.3}$$

avec

$$G = \frac{1}{R} \tag{2.4}$$

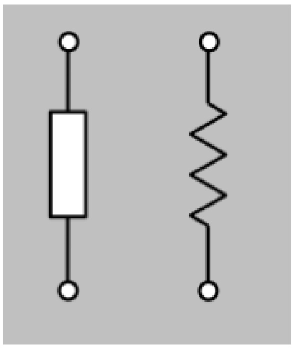

FIGURE 2.5 – symboles de la résistance

Aspect énergétique de la résistance : effet Joule

Le passage d'un courant dans une résistance s'accompagne d'un dégagement de chaleur : ce phénomène est appelé **effet Joule**. A un instant donné t, la puissance dissipée par effet Joule aux bornes d'une résistance de valeur R vaut :

$$p(t) = v(t).i(t) = Ri^2(t) = \frac{v^2(t)}{R} \tag{2.5}$$

Résistance et... résistance

En français, il existe une ambiguïté : le terme *résistance* désigne en effet deux concepts différents :

- un *objet* (dipôle réel ou théorique) ayant un comportement électrique de type résistif
- la *valeur* de la constante de proportionnalité R caractérisant cet effet pour cet objet

La preuve que ces concepts sont différents peut être trouvée en anglais, où le second concept (valeur) s'appelle *resistance* comme en français, mais où le premier concept (objet) s'appelle *resistor*. Ce double sens du mot *résistance* vaut la peine d'être signalé car nous verrons que pour les deux autres effets, il existe effectivement des termes différents... même en français.

Résistivité

Pour une même différence de potentiel, certains matériaux laissent passer une intensité de courant plus grande que d'autres.

La **résistivité** du matériau est la propriété qui caractérise cette opposition plus ou moins grande au passage d'un courant électrique, *indépendamment des dimensions du conducteur*. La résistivité est notée ρ et s'exprime en $\Omega.m$. On utilise également son inverse, la **conductivité** (notée σ) dont l'unité est $(\Omega.m)^{-1}$

La résistance est liée à la résistivité de la manière suivante (pour un conducteur de longueur l et de section constante S) :

$$R = \rho \frac{l}{S} \tag{2.6}$$

2.3.2 Inductance

Effet inductif et inductance

Un autre effet peut se manifester lorsqu'on applique une ddp ou un courant à un dipôle : l'**effet inductif**[4]. Par définition, cet effet lie les grandeurs I et V de la manière suivante :

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \tag{2.7}$$

Dans cette équation, le facteur L s'appelle l'**inductance** (plus exactement **self-inductance**) et s'exprime en Henri [H].

Un dipôle idéal répondant à la loi ci-dessus sera représenté en utilisant un des symboles de la figure 2.6.

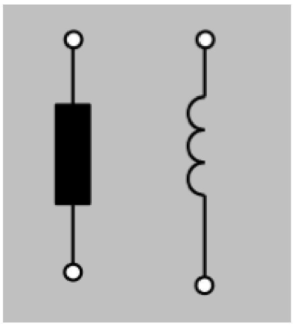

FIGURE 2.6 – symboles d'une inductance

Bobine ou "self"

Un dipôle réel présentant un comportement majoritairement inductif sera appelé **bobine** ou encore **self**. On l'appelle aussi couramment "inductance" ou "self-inductance" par abus de langage. Néanmoins un tel dipôle réel ne peut pas présenter un comportement purement inductif (le conducteur dont il est fait présente par exemple forcément une certaine résistance).

4. On décrit ici uniquement le phénomène "d'inductance propre" (ou self-inductance). Un effet inductif peut également se manifester *entre* deux conducteurs : on parle alors d'inductance mutuelle (principe des transformateurs). Voir section XXX

Interprétation (1) : premières conclusions mathématiques

Bien que mathématiquement simple[5], la loi de l'effet inductif n'est pas forcément facile à interpréter physiquement.

Compte tenu de la dérivée présente dans la loi, on peut d'abord remarquer que contrairement à une résistance, où l'existence d'un courant implique celle d'une ddp (et inversément), dans une inductance c'est la *variation du courant* qui implique l'existence d'une ddp (et inversément). Au facteur L près, la ddp est ici la dérivée du courant. Ceci correspond à un comportement tout-à-fait différent de celui de la résistance, comportement que nous essaierons de clarifier dans la suite de cette section.

Une conséquence particulière de cette loi est qu'on ne peut pas représenter la loi de l'inductance dans un plan (I, V) puisque le *temps* intervient comme troisième variable. Une inductance ne possède donc pas de caractéristique dans le plan (I, V).

On retiendra encore utilement que pour une inductance :

- si la ddp est *constante*, le courant croît *linéairement* (et réciproquement)
- si le courant est *constant*, la ddp est *nulle* (et réciproquement)

Ces trois constatations, qui découlent directement de la loi du dipôle, sont résumées ci-dessous :

pour une inductance :
I **non constant** ⇔ V **non nul**
I **constant** ⇔ V **nul**
V **constant** ⇔ I **croît linéairement**

Lois "court terme" et "long terme"

La loi initiale de l'inductance nous permet encore de formuler deux principes supplémentaires.

En premier lieu, on constate que dans une inductance le courant ne peut pas varier instantanément (c'est-à-dire en un temps strictement nul). S'il pouvait varier instantanément, la ddp serait infinie, ce qu'on va estimer impossible. Comme cette constatation est relative à un phénomène à court terme (une hypothétique variation instantanée), nous l'appelons **loi court terme** ou **loi haute fréquence** de l'inductance.

loi court terme (ou HF) de l'inductance :
dans une inductance, le courant ne peut pas varier instantanément

5. les grandeurs I et V sont liées par une dérivée, opérateur mathématique encore simple, mais surtout on verra plus bas que suivant un changement de variable il s'agit fondamentalement d'une simple multiplication comme dans la loi d'Ohm

En second lieu, on constate qu'en moyenne ou après un temps infini[6], la ddp doit forcément être nulle. En effet, si la ddp n'était pas nulle mais constamment positive, le courant croîtrait indéfiniment pour atteindre une valeur infinie, ce qui n'est pas envisageable non plus. Comme cette constatation est relative à un phénomène à long terme, nous l'appelons **loi long terme** ou **loi basse fréquence** de l'inductance.

loi long terme (ou BF) de l'inductance : **après un temps très long (ou en moyenne),** **la ddp sur l'inductance est forcément nulle**

Ces deux principes nous seront très utiles au moment de raisonner sur des schémas comportant des inductances.

Interprétation (2) : l'inductance comme phénomène électromagnétique

Pour mieux comprendre comment se comporte une inductance, nous devons revenir à la théorie de l'électromagnétisme. Dans celle-ci, l'effet inductif est un phénomène plus large (s'appliquant aussi *entre* composants), qui fait appel aux éléments suivants :

- la présence d'un courant (variable ou continu) dans un conducteur j implique l'existence, autour de ce conducteur, d'un champ magnétique H_j. On peut considérer que ce champ magnétique "occupe l'espace" autour du conducteur j selon une disposition spatiale particulière[7]
- le **flux magnétique** ϕ est la "quantité" de champ magnétique traversant une surface donnée S : connaissant un champ magnétique H, nous pouvons en calculer le flux ϕ à travers une surface quelconque en utilisant une intégrale de... flux sur cette surface (voir cours d'électromagnétisme)
- enfin si une boucle conductrice k embrasse via sa surface S_k un flux magnétique (donc un champ magnétique) *qui varie dans le temps*, il apparaît dans cette boucle k une force électromotrice[8] e_k dont la valeur est précisément égale à la variation du flux embrassé par cette boucle. Ce dernier principe n'est autre que la **loi de Lenz** :

$$e(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt} \tag{2.9}$$

6. en pratique : après un temps beaucoup plus long que toutes les autres constantes de temps du circuit

7. cette disposition spatiale liant le champ magnétique H et la densité de courant J est précisément décrite par l'opérateur rotationnel dans l'une des quatre équations de Maxwell :

$$rot(H) = J \tag{2.8}$$

8. c'est-à-dire la ddp d'une source

La ddp e(t) apparaissant dans la loi de Lenz s'appelle précisément la **force électromotrice *induite*.**

Si nous revenons à nos inductances et nos bobines, nous pouvons maintenant les interpréter de la manière suivante : en supposant qu'un conducteur initial j porte un courant $i(t)$ variable dans le temps (courant qui génère donc un champ magnétique et donc un flux eux aussi variables dans le temps), l'**inductance** apparaît de manière générale comme le facteur *géométrique* L liant ce courant $i(t)$ au flux embrassé par une boucle conductrice k qui se trouverait à proximité :

$$\phi(t) = Li(t) \tag{2.10}$$

En combinant les deux dernières équations, la fem induite apparaissant dans la boucle conductrice peut alors s'écrire :

$$e(t) = -L\frac{di(t)}{dt} \tag{2.11}$$

Deux situations peuvent alors être distinguées :

- le conducteur initial et la boucle conductrice sont deux conducteurs *différents*. On parle alors d'induction mutuelle : le courant circulant dans le conducteur initial j crée une fem induite dans la boucle conductrice k. Le facteur L_{jk} intervenant dans la loi qui décrit le phénomène est appelé **inductance mutuelle** ou **mutuelle** et se note souvent M :

$$e_k(t) = -L_{jk}\frac{di_j(t)}{dt} = -M\frac{di_j(t)}{dt} \tag{2.12}$$

- le conducteur initial et la boucle conductrice sont *un seul et même conducteur*. On parle alors d'auto-induction : le courant circulant dans le conducteur initial j crée une fem induite *dans ce même conducteur* j. Le facteur L_{jj} intervenant dans la loi qui décrit le phénomène est appelé **inductance propre** et se note souvent L :

$$e_j(t) = -L_{jj}\frac{di_j(t)}{dt} = -L\frac{di_j(t)}{dt} \tag{2.13}$$

L'introduction du concept de flux permet de formuler une théorie (c'est-à-dire une explication) cohérente et unique pour expliquer le phénomène d'induction propre autant que celui d'induction mutuelle, tous deux observables expérimentalement.

Lien entre la loi de l'effet inductif et la loi de Lenz
Si l'on se limite à ce second cas, on retrouve *au signe près* la loi de l'effet inductif déjà donnée précédemment :

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{2.14}$$

Ces deux équations décrivent bien exactement le même phénomène électromagnétique : l'effet d'auto-induction sur un dipôle. La différence de signe vient simplement du fait que :

- dans la loi de Lenz, le dipôle est considéré comme un dipôle source (actif) et on utilise donc une convention générateur
- dans la loi de l'effet inductif, le dipôle est considéré comme un dipôle charge (passif) et on utilise donc une convention récepteur

Si l'on compare les deux conventions, où les sens des ddps sont opposées, on peut identifier :

$$v(t) = -e(t) \tag{2.15}$$

Les deux équations sont donc bien équivalentes, mais sont simplement exprimées dans des notations différentes.

Interprétation (3) : en pratique

Si l'on considère une bobine, c'est-à-dire un dipôle réel qui présente majoritairement un effet auto-inductif, cette bobine répondra effectivement dans certaines limites de précision et de gamme de variation des grandeurs concernées à la loi

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{2.16}$$

Concrètement et compte tenu de tout ce qui a été dit avant, cela signifie que :

- lorsque le courant $i(t)$ dans une bobine varie, une fem $e(t)$ est induite dans cette même bobine
- cette fem est telle qu'elle s'oppose à la variation initiale du courant $i(t)$ (signe négatif dans la loi de Lenz), c'est-à-dire qu'elle a tendance à empêcher cette variation. Cette fem porte d'ailleurs aussi le nom de **force *contre*-électromotrice**.

En termes de comportement externe, on peut donc comprendre la notion d'inductance de la manière suivante : lorsqu'on essaie de faire varier le courant dans une inductance ou une bobine, celle-ci développe une fem qui contre cette variation. L'inductance oppose donc une certaine *inertie* à la variation du courant qui la traverse.

A titre de conséquence immédiate de ce comportement, on retiendra en particulier qu'ouvrir une branche de circuit dans lequel se trouve une inductance est a priori problématique : la coupure brutale (= discontinuité forcée) du courant provoquera une ddp de valeur élevée, qui se traduira typiquement par un arc électrique, pouvant par exemple provoquer un incendie.

Caractéristique d'une inductance

Nous avons indiqué que le dipôle inductance ne possède pas de caractéristique dans le plan (I, V) à cause de la présence d'une dérivée dans cette loi.

On peut néanmoins observer que la loi de l'inductance telle que formulée ci-dessous :

$$\phi(t) = Li(t) \tag{2.17}$$

est similaire dans sa forme à une loi d'Ohm (à condition de substituer le flux à la ddp) :

$$v(t) = Ri(t) \tag{2.18}$$

On peut donc en conclure que dans un plan (I, ϕ), la caractéristique d'une inductance est identique à celle d'une résistance dans un plan (I, V).

2.3.3 Capacité

Effet capacitif et capacité

Un troisième effet, encore différent, peut se manifester sur un dipôle : l'**effet capacitif**. Par définition, cet effet lie les grandeurs I et V de la manière suivante :

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{2.19}$$

Dans cette équation, le facteur C s'appelle la **capacité** et s'exprime en farad [F].

Formulation intégrale
De manière tout-à-fait équivalente, la loi ci-dessus peut également être formulée de la manière suivante :

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)d\xi + v(t_0) \tag{2.20}$$

Celle-ci a l'avantage de formuler la ddp en fonction du courant (comme la loi d'Ohm et la loi de Lenz), mais l'inconvénient de faire apparaître une intégrale. Dans cette formulation :

- ξ est une variable d'intégration "interne" à l'intégrale et variant de t_0 à t,
- $v(t_0)$ est la ddp existant sur le dipôle à l'instant t_0 : cette ddp n'est en effet pas forcément nulle et doit être prise en compte dans le cas général.

Condensateur

Un dipôle réel présentant un comportement majoritairement capacitif sera appelé **condensateur**. On l'appelle aussi couramment "capacité" par abus de langage. (Néanmoins un tel dipôle réel ne peut pas, dans le principe, présenter un comportement purement capacitif).

Le symbole le plus général pour représenter un condensateur ou une capacité est celui de la figure 2.7.

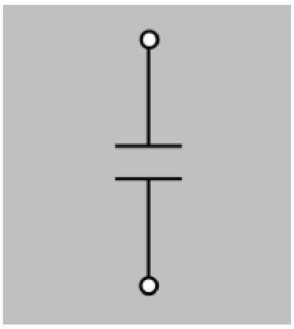

FIGURE 2.7 – symboles d'un condensateur

Interprétation (1) : premières conclusions mathématiques

Bien que mathématiquement simple [9], la loi ci-dessus n'est pas forcément facile à interpréter physiquement.

Compte tenu de la dérivée présente dans la loi, on peut d'abord remarquer que contrairement à une résistance, où l'existence d'un courant implique celle d'une ddp (et inversément), pour une capacité c'est la *variation de la ddp* qui implique l'existence d'un courant (et inversément). Au facteur C près, le courant est la dérivée de la ddp. Ceci correspond à un comportement tout-à-fait différent de celui de la résistance, comportement que nous essaierons de clarifier dans la suite de cette section.

Une conséquence particulière de cette loi est qu'on ne peut pas représenter la loi de la capacité dans un plan (I, V) puisque le *temps* intervient comme troisième variable. Une capacité ne possède donc pas de caractéristique dans le plan (I, V).

On retiendra encore utilement que pour une capacité :

- si le courant est *constant*, la ddp croît *linéairement* (et réciproquement)
- si la ddp est *constante*, le courant est *nul* (et réciproquement)

Ces trois constatations, qui découlent directement de la loi du dipôle, sont résumées ci-dessous :

pour une capacité :
V **non constant** ⇔ I **non nul**
V **constant** ⇔ I **nul**
I **constant** ⇔ V **croît linéairement**

Lois "court terme" et "long terme"

La loi initiale de la capacité nous permet encore de formuler deux principes supplémentaires.
En premier lieu, on constate que dans une capacité la ddp ne peut pas varier instantanément (c'est-à-dire en un temps strictement nul). Si elle pouvait varier instantanément, le courant serait infini, ce que nous considérons comme impossible. Comme cette constatation est relative à un phénomène à court terme (une hypothétique variation instantanée), nous l'appelons **loi court terme** ou **loi haute fréquence** de la capacité.

loi court terme (ou HF) de la capacité :
la ddp sur une capacité ne peut pas varier instantanément

En second lieu, on constate que en moyenne ou après un temps infini [10], le courant doit forcément être nul. En effet, si le courant n'était pas nul mais

9. les grandeurs I et V sont liées par une dérivée, opérateur mathématique encore simple, mais surtout on verra plus bas que suivant un changement de variable il s'agit fondamentalement d'une simple multiplication comme dans la loi d'Ohm

10. en pratique : après un temps beaucoup plus long que toutes les autres constantes de temps du circuit

constamment positif (par exemple), la ddp croîtrait indéfiniment pour atteindre une valeur infinie, ce qui n'est pas envisageable non plus. Comme cette constatation est relative à un phénomène à long terme, nous l'appelons **loi long terme** ou loi basse fréquence de la capacité.

loi long terme (ou BF) de la capacité : après un temps très long (ou en moyenne), le courant dans une capacité est forcément nul

Ces deux principes nous seront très utiles au moment de raisonner sur des schémas comportant des capacités.

Interprétation (2) : la capacité comme phénomène électrique

L'interprétation physique d'une capacité est plus simple que celle d'une inductance. En revenant à la loi de base de la capacité

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{2.21}$$

on voit que d'après celle-ci le courant est proportionnel à la *variation de la ddp*. Or on sait par ailleurs que le courant est le "débit" de charge électrique dans le dipôle (voir §1.2), c'est-à-dire que :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \tag{2.22}$$

A une constante d'intégration près, on peut donc écrire :

$$q(t) = Cv(t) \tag{2.23}$$

On trouve ainsi une loi de base plus simple (la dérivée a disparu), liant cette fois la charge électrique contenue dans la capacité (et exprimée en Coulomb) à la ddp. Cette loi signifie que la ddp et la charge électrique sont deux grandeurs directement proportionnelles, et la capacité C apparaît comme le facteur de proportionnalité entre ces deux grandeurs.

A noter : la charge et la ddp peuvent être négatives.

En revenant toujours à la loi initiale (liant I et V) de l'effet capacitif, on peut encore proposer l'interprétation suivante :

- lorsque la ddp varie, le dipôle est le siège d'un courant ;
- ce courant, en tant que mouvement de charges, consiste précisément à ajouter ou retirer une quantité de charge électrique dans la capacité en un certain laps de temps ;
- la ddp étant proportionnelle à la charge électrique, il est logique qu'un courant (donc une variation de charge) corresponde à une variation de la ddp

Le lien peut encore être fait avec la formulation intégrale de la loi de l'effet capacitif, qui n'exprime rien d'autre que le fait que pour faire varier la ddp, il faut intégrer dans le temps le débit de charge électrique :

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)d\xi + v(t_0) \tag{2.24}$$

Interprétation (3) : en pratique

Si l'on considère un condensateur, c'est-à-dire un dipôle réel qui présente majoritairement un effet capacitif, ce condensateur répondra effectivement dans certaines limites de précision et de gamme de variation des grandeurs concernées à la loi

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{2.25}$$

En termes de comportement externe, on peut comprendre la notion de capacité de la manière suivante : pour faire varier la ddp sur une capacité, il faut y injecter ou en retirer des charges, c'est-à-dire en faire entrer ou sortir un courant. Ceci ne peut pas être fait instantanément. Une capacité oppose donc par définition une certaine *inertie* à une variation de ddp à ses bornes.

A titre de conséquence immédiate de ce comportement, on retiendra en particulier qu'appliquer une variation brutale de tension à une capacité (par exemple en lui appliquant directement une source de tension) est a priori problématique : cette variation brutale de la ddp impliquerait la circulation d'un courant élevé, au point d'être éventuellement destructif pour l'équipement.

Caractéristique d'une capacité

Nous avons indiqué que le dipôle capacité ne possède pas de caractéristique dans le plan (I, V) à cause de la présence d'une dérivée dans cette loi. On peut néanmoins observer que la loi de la capacité telle que formulée ci-dessous :

$$v(t) = \frac{1}{C}q(t) \tag{2.26}$$

est similaire dans sa forme à une loi d'Ohm (à condition de substituer la charge électrique au courant) :

$$v(t) = Ri(t) \tag{2.27}$$

On peut donc en conclure que dans un plan (Q, V), la caractéristique d'une capacité est similaire à celle d'une résistance dans un plan (I, V).

2.3.4 Dualité et autres similitudes entre les dipôles L, C et R

Dualité électrique

Il n'aura pas échappé au lecteur que l'inductance et la capacité ont des comportements très similaires. Il ne s'agit pas uniquement d'une similarité : concrètement, les lois de l'effet inductif et de l'effet capacitif sont rigoureusement identiques, pour autant qu'on échange les *rôles* de la ddp et du courant (et bien entendu ceux des facteurs L et C).

Deux composants qui possèdent, dans les grandeurs I et V, le même comportement à condition précisément d'échanger ces deux grandeurs I et V sont dits **duals** l'un de l'autre.

C'est le cas de la self-inductance et de la capacité. Nous en rencontrerons d'autres exemples dans les pages qui suivent.

Correspondance entre les trois lois

On remarquera également qu'il est possible, pour chacun des trois dipôles définissant l'un des effets idéaux envisagés ici, d'obtenir une loi simplement proportionnelle, de la forme :

$$y(t) = Fx(t) \tag{2.28}$$

- la résistance est le facteur de proportionnalité apparaissant entre la ddp et le courant ;
- l'inductance est le facteur de proportionnalité apparaissant entre le flux magnétique et le courant ;
- la capacité est le facteur de proportionnalité apparaissant entre la charge électrique et la ddp ;

Dans chaque cas, l'effet consiste donc à constater une variation proportionnelle entre deux grandeurs électriques (ou magnétique dans le cas du flux), qui peut donner lieu au tracé d'une caractéristique dans le plan formé des deux grandeurs concernées.

2.3.5 Aspects énergétiques de L et C : composants réactifs

Rappel : composants passifs et actifs

L'aspect énergétique de la résistance a déjà été discuté (§1.4.3) : une résistance soumise à un instant t à des valeurs électriques $i(t)$ et $v(t)$ dissipe sous forme de chaleur (effet Joule) une puissance instantanée :

$$p(t) = v(t)i(t) \tag{2.29}$$

La résistance, parce qu'elle absorbe toujours de la puissance du point de vue du circuit, est appelée un composant passif.

Inversément, des dipôles injectant de la puissance dans le circuit, comme le font typiquement en principe des sources de tension ou de courant, seront dits actifs.

L et C : composants réactifs

En termes énergétiques, les dipôles L et C ne correspondent à aucun des deux comportements ci-dessus. Plus exactement : ils correspondent aux deux !

Les dipôles L et C vont chacun absorber ou délivrer de la puissance en fonction du moment considéré. En effet, grâce à la présence du *temps* dans leur loi fondamentale, ils ont la possibilité d'emmagasiner de l'énergie à un moment donné et de la restituer plus tard (ce qu'une résistance est totalement incapable de faire).

La capacité emmagasine de l'énergie sous forme de champ électrique (ou sous forme de charge électrique, ce qui est synonyme). L'inductance emmagasine de l'énergie sous forme de champ magnétique. L'impossibilité de faire varier ces champs, répartis dans l'espace, de manière instantanée explique "l'inertie" présentée par ces composants relativement aux grandeurs électriques "externes" V et I.

Energie accumulée
Sans entrer dans les détails, on retiendra que :

- à un instant t donné, l'énergie accumulée (sous forme magnétique) par une inductance parcourue par un courant i vaut :

$$E = \frac{1}{2}Li^2 \tag{2.30}$$

- à un instant t donné, l'énergie accumulée (sous forme électrique) dans une capacité soumise à une ddp v vaut :

$$E = \frac{1}{2}Cv^2 \tag{2.31}$$

Changement de convention
Vu leur caractère réactif, quelle convention utiliser pour les dipôles capacité et inductance ? On utilise par défaut la convention récepteur (flèches de tension et de courant opposées) pour ces dipôles. Mais il faudra néanmoins se souvenir que ces dipôles peuvent délivrer de l'énergie. Lorsqu'on raisonne sur un schéma, il sera donc tout-à-fait normal et logique pour un dipôle L ou C d'être amené à changer de convention, c'est-à-dire à inverser la flèche de ddp (ou la flèche de courant) lorsque le dipôle passe d'un régime à l'autre : consommateur ou producteur d'énergie. Alternativement, on pourra aussi garder une convention unique, mais il sera alors logique d'obtenir à certains moments des valeurs négatives d'une des deux grandeurs électrique (correspondant à une puissance reçue ou fournie *négative*).

2.3.6 Unités et ordres de grandeur des charges idéales

- Une résistance R s'exprime en ohms [Ω]. Les valeurs courantes en électronique vont de *10Ω à 10MΩ*.
- Une conductance G s'exprime en Siemens [S] ou [Ω^{-1}] (unité parfois aussi appelé "mho").

- Une capacité C s'exprime en farads [F]. Les valeurs courantes vont de *10pF à 1mF*.
- Une inductance L s'exprime en henris [H]. Les valeurs courantes vont de *10nH à 100mH*.

On retiendra en particulier que les valeurs normales d'inductance ou de capacité sont *très inférieures à l'unité*.

2.4 Sources idéales

Les trois composants présentés précédemment sont classiquement interprétés comme des charges (même si l'inductance et la capacité peuvent restituer de l'énergie précédemment emmagasinée). Pour compléter notre arsenal de dipôles fondamentaux, il faut maintenant s'intéresser aux composants actifs, c'est-à-dire à ceux qui fournissent de l'énergie. Ceux-ci sont au nombre de deux :

- la source de tension idéale, qui est généralement bien connue,
- la source de courant idéale, qui est généralement beaucoup moins connue mais qui est pourtant fondamentale en électronique puisque les transistors peuvent notamment être vus comme des sources de courant.

2.4.1 Source de tension idéale

Loi fondamentale et fem
Par définition, une **source de tension idéale** impose une valeur de ddp entre ses deux bornes.

La loi fondamentale d'une source de tension idéale est donc de la forme :

$$V = E \tag{2.32}$$

où :

- V est la ddp mesurable aux bornes de la source (vue de l'extérieur)
- E est la valeur de ddp que cette source impose.

Si la valeur de ddp imposée par la source est variable dans le temps, on écrira plutôt :

$$v(t) = e(t) \tag{2.33}$$

La valeur E (ou $e(t)$) est appelée **force électromotrice** ou fem. La **fem** est donc la ddp imposée par une source de tension idéale.

On utilisera typiquement le terme fem (plutôt que ddp) pour désigner la tension générée par un dispositif ou un phénomène générateur de tension : piles, dynamo, force électromotrice induite dans la loi de Lenz, etc.

Symbole
Plusieurs symboles sont utilisés pour représenter une source de tension idéale (voir Fig. 2.8).

Caractéristique
Conformément à la loi mathématique ci-dessus, la caractéristique d'une source de tension idéale dans un plan (I, V) est une droite verticale d'abscisse E. Une telle droite traduit le fait que quel que soit le courant parcourant la source, la ddp à ses bornes vaudra toujours E.

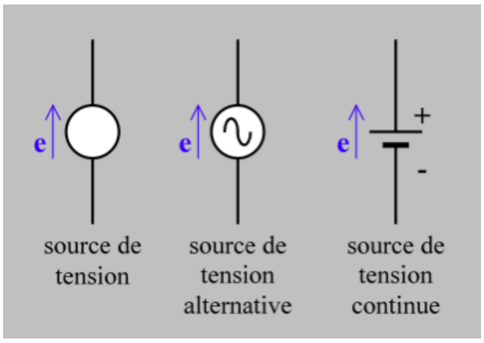

FIGURE 2.8 – symboles d'une source de tension idéale

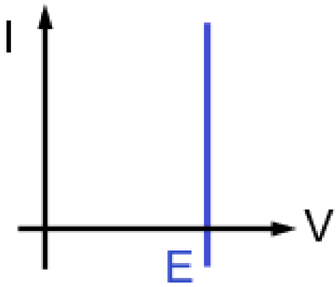

FIGURE 2.9 – caractéristique d'une source de tension idéale

Il faut bien comprendre que dans une telle source, la ddp est par définition imposée strictement, *quel que soit le courant nécessaire à travers la source pour cela*. Ceci appelle quelques remarques :

- la source impose la ddp au circuit extérieur mais ne met aucune contrainte sur le courant
- à l'opposé, c'est le circuit extérieur (auquel est imposée la ddp de la source) qui, en fonction de sa résistance (ou plus généralement de son impédance) plus ou moins grande déterminera la valeur du courant le traversant (et traversant aussi la source). En conséquence ce courant peut être très élevé, ou au contraire négatif[11] : tout dépend des éléments présents dans le circuit extérieur.
- un tel dipôle source de tension est purement théorique : il s'agit d'un objet mathématique qui a une capacité infinie de délivrer un courant de valeur quelconque. A contrario, toute source réelle ne peut pas dépasser une certaine limite de courant. L'utilisation sans discernement des sources de tension idéales peut donc mener à des résultats aberrants.
- dans la caractéristique, la droite verticale représente le fait que la source

11. auquel cas la source adopte un comportement de dipôle passif : elle absorbe de l'énergie pour pouvoir imposer sa fem

impose la ddp mais ne met aucune contrainte sur le courant. Cette caractéristique n'est toutefois que le lieu mathématique des états électriques possibles. Une fois associée à un circuit extérieur possédant lui-même une caractéristique, un état électrique précis, et donc un point sur la caractéristique et une valeur de courant précise, seront définis.

2.4.2 Source de courant idéale

Loi fondamentale
Par définition, une **source de courant idéale** impose la valeur du courant qui la traverse.

La loi fondamentale d'une source de courant idéale est donc de la forme :

$$I = J \tag{2.34}$$

où :

- I est le courant mesurable sur ce dipôle source (vu de l'extérieur)
- J est la valeur de courant que cette source impose.

Si la valeur de courant imposée par la source est variable dans le temps, on écrira plutôt :

$$i(t) = j(t) \tag{2.35}$$

Symbole
Le symbole utilisé pour représenter une source de courant idéale est montré ci-dessous (voir Fig. 2.8).

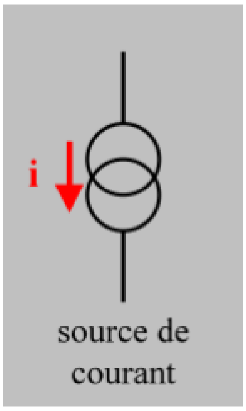

FIGURE 2.10 – symbole d'une source de courant

Caractéristique
Conformément à la loi mathématique ci-dessus, la caractéristique d'une source de courant idéale dans un plan (I, V) est une droite horizontale d'ordonnée J.

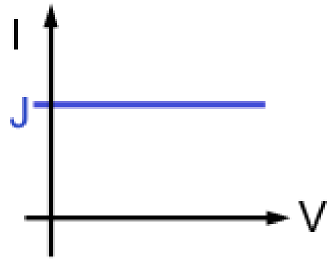

FIGURE 2.11 – caractéristique d'une source de courant idéale

Une telle droite traduit le fait que quelle que soit la ddp aux bornes de la source, le courant la traversant vaudra toujours J.

Il faut bien comprendre que dans une telle source, le courant est par définition imposé strictement, *quelle que soit la ddp nécessaire aux bornes de la source pour cela.* Ceci appelle quelques remarques :

- la source impose le courant au circuit extérieur mais ne met aucune contrainte sur la ddp
- à l'opposé, c'est le circuit extérieur (auquel est imposée le courant de la source) qui, en fonction de sa résistance (ou plus généralement de son impédance) plus ou moins grande déterminera la valeur de ddp à ses bornes (et aux bornes de la source). En conséquence cette ddp peut être très élevée, ou au contraire négative [12] : tout dépend des éléments présents dans le circuit extérieur.
- un tel dipôle source de courant est purement théorique : il s'agit d'un objet mathématique qui a une capacité infinie de supporter une ddp de valeur quelconque. A contrario, toute source réelle ne peut pas dépasser une certaine limite de ddp. L'utilisation sans discernement des sources de courant idéales peut donc mener à des résultats aberrants.
- dans la caractéristique, la droite horizontale représente le fait que la source impose le courant mais ne met aucune contrainte sur la ddp. Cette caractéristique n'est toutefois que le lieu mathématique des états électriques possibles. Une fois associée à un circuit extérieur possédant lui-même une caractéristique, un état électrique précis et donc un point sur la caractéristique et une valeur de ddp précise, seront définis.

2.4.3 Dualité

La notion de dualité électrique a déjà été introduite lors de la présentation conjointe de l'inductance et de la capacité (§2.3.4) : deux composants qui pos-

12. auquel cas la source adopte un comportement de dipôle passif : elle absorbe de l'énergie pour pouvoir imposer son courant

sèdent, dans les grandeurs I et V, le même comportement lorsqu'on échange les rôles de I et V sont dits **duals** l'un de l'autre.

La source de tension idéale et la source de courant idéale présentent une telle relation : ces deux composants sont donc duals l'un de l'autre.

2.5 Court-circuit et circuit ouvert

En plus des dipôles déjà présentés, il existe encore deux dipôles idéaux un peu particuliers car représentant des situations "extrêmes" : le court-circuit et le circuit ouvert.

Ces deux notions sont bien à prendre ici comme des concepts scientifiques faisant partie intégrante d'une théorie de l'électricité. Le lien à faire avec des concepts particuliers du langage courant (en particulier le terme de "court-circuit" en langage courant) sera discuté brièvement.

2.5.1 Court-circuit

Définition électrique : loi et caractéristique

Un **court-circuit** est par définition un dipôle imposant à ses bornes une ddp nulle, quel que soit le courant qui le traverse. En d'autres termes, il est défini par l'équation :

$$V = 0 \tag{2.36}$$

Sa caractéristique est donc une droite verticale (ddp constante) d'abscisse 0, c'est-à-dire une droite qui se confond avec l'axe vertical du plan (I, V).

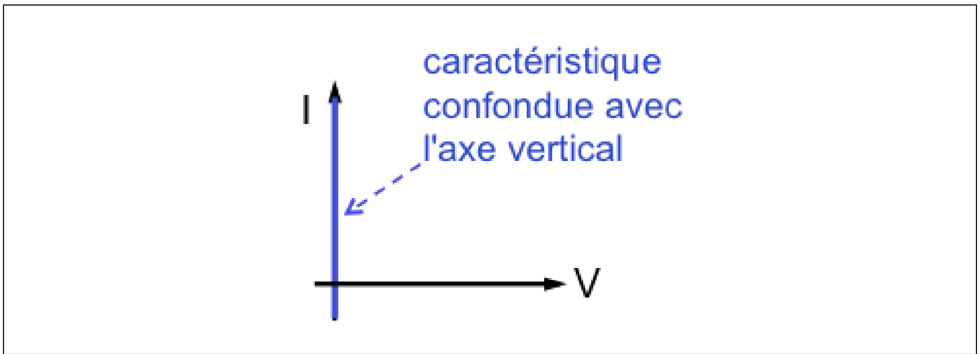

FIGURE 2.12 – caractéristique court-circuit

Court-circuit = noeud
Le court-circuit consiste donc à mettre deux noeuds au même potentiel. Un noeud étant par ailleurs une équipotentielle, on peut donc dire que le rôle du court-circuit est de "fondre" deux noeuds en un seul, ou de créer un noeud associant deux bornes. Le court-circuit est en fait en lui-même *un seul* noeud (ce qui ne l'empêche pas de posséder deux bornes).

Court-circuit comme cas particulier de source et de charge

On pourra vérifier facilement au vu de ce qui a été dit auparavant que le court-circuit apparaît comme un double cas particulier :

- un court-circuit est un cas particulier de source de tension idéale : sa loi et sa caractéristique sont identiques à celles d'une source de tension idéale de fem E *nulle*
- un court-circuit est aussi un cas particulier de résistance : sa loi et sa caractéristique sont identiques à celles d'une résistance de valeur *nulle*

Court-circuit = courant non nul !

Il est crucial de noter que le courant traversant un court-circuit est a priori *non nul*. Il peut même être très élevé. On pense souvent à tort que, puisque la ddp est nulle, le courant l'est également. C'est une erreur !

Le courant traversant un court-circuit est a priori non nul

Symbole et interprétation

Compte tenu de ce qui a été dit ci-dessus, le symbole d'un court-circuit est donc celui d'un simple fil. Nous y associons dans la figure ci-dessous l'idée que le courant dans ce fil est a priori non nul.

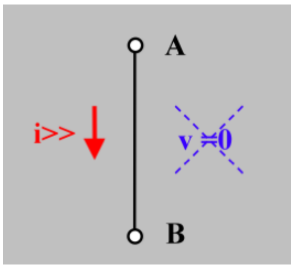

FIGURE 2.13 – Court-circuit (équivaut à une résistance nulle)

Court-circuit en langage courant
Le terme de "court-circuit" existe aussi en langage courant et évoque en général une situation problématique. Quel est le lien avec le dipôle idéal ci-dessus ?

Comme on l'a vu, un court-circuit -au sens dipôle idéal- peut être réalisé tout-à-fait *volontairement*. En particulier, chaque fois qu'on connecte deux composants au moyen d'un fil, on réalise un court-circuit, au sens électrique du terme. Dans un tel court-circuit circule a priori du courant.

Un court-circuit -toujours au sens électrique du terme- peut également être réalisé *involontairement*. Il n'en remplit pas moins son rôle dans ce cas : mise au même potentiel de deux bornes différentes du montage et circulation d'un courant -éventuellement important- entre celles-ci. C'est cette situation de *mise en connexion involontaire* de deux parties du montage -qui peut typiquement provoquer la perturbation ou la destruction du montage, ou encore un incendie suite à l'échauffement (effet Joule) provoqué par le passage d'un courant important- qui est évoquée lorsqu'on parle de "court-circuit" en langage courant. Dans cette dernière situation, la connexion involontaire a en général une résistance faible mais non nulle, mais celle-ci ne suffit pas pour empêcher les conséquences négatives déjà citées.

2.5.2 Circuit ouvert

Définition électrique : loi et caractéristique

Un **circuit ouvert** est par définition un dipôle traversé par un courant nul, quelle que soit la ddp à ses bornes. En d'autres termes, il est défini par l'équation :

$$I = 0 \tag{2.37}$$

Sa caractéristique est donc une droite horizontale (courant constant) d'ordonnée 0, c'est-à-dire une droite qui se confond avec l'axe horizontal du plan (I, V).

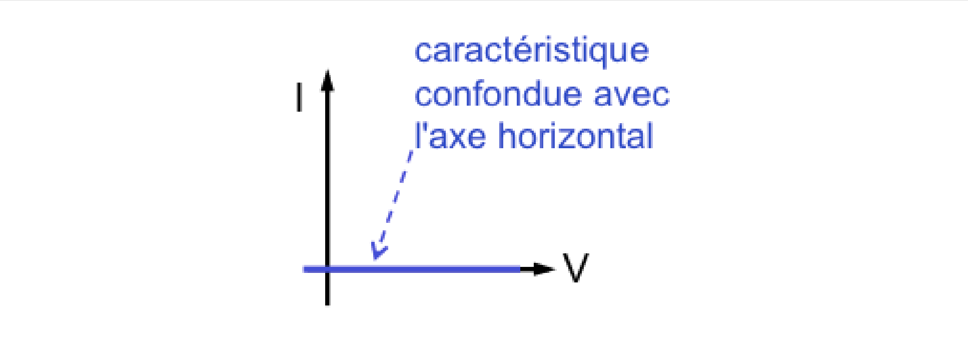

FIGURE 2.14 – caractéristique d'un circuit ouvert

Circuit ouvert comme cas particulier de source et de charge

On pourra vérifier facilement au vu de ce qui a été dit auparavant que le circuit ouvert apparaît comme un double cas particulier :

- un circuit ouvert est un cas particulier de source de courant idéale : sa loi et sa caractéristique sont identiques à celles d'une source de courant idéale de valeur *J nulle*
- un circuit ouvert est aussi un cas particulier de résistance : sa loi et sa caractéristique sont identiques à celles d'une résistance de valeur *infinie*

Circuit ouvert = ddp non nulle !

Il est crucial de noter que, conformément à cette équation et cette caractéristique, la ddp aux bornes d'un circuit ouvert est a priori *non nulle*. Elle peut même être très élevée. On pense souvent à tort que, puisque le courant est nul, la tension l'est également. C'est une erreur !

La ddp aux bornes d'un circuit ouvert est a priori non nulle

Symbole et interprétation

Compte tenu de ce qui a été dit, le symbole d'un circuit ouvert est celui d'une simple absence de connexion. Nous lui associons dans la figure 2.15 le rappel que la ddp est a priori non nulle.

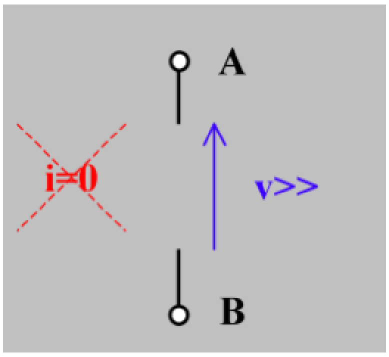

FIGURE 2.15 – circuit ouvert (équivaut à une résistance infinie)

Le circuit ouvert correspond au cas d'un circuit interrompu (volontairement ou involontairement), et donc dans lequel aucun courant ne peut circuler.

2.5.3 Remarques

Dualité

La notion de dualité électrique a déjà été introduite lors de la présentation conjointe de l'inductance et de la capacité : deux composants qui possèdent, dans les grandeurs I et V, le même comportement lorsqu'on échange les rôles de I et V sont dits **duals** l'un de l'autre.

Le court-circuit et le circuit ouvert présentent une telle relation : ces deux composants sont donc duals l'un de l'autre.

Interrupteur

Un **interrupteur** peut être défini comme un dispositif capable de passer, sur base d'un ordre adéquat, d'un comportement de circuit ouvert (interrupteur ouvert empêchant le passage du courant : résistance infinie) à un comportement de court-circuit (interrupteur fermé laissant passer le courant : résistance nulle).

Un transistor, en tant que composant de base de toute l'électronique numérique et notamment de l'informatique, peut notamment être vu comme un interrupteur commandé électriquement.

Lien avec l'équivalent de Thévenin (impédance de sortie)

Le court-circuit et le circuit ouvert ont été présentés comme cas particuliers de résistances. L'équivalent de Thévenin (voir §4.2.2) est un concept permettant de caractériser des sources *non idéales*. Lorsqu'on l'utilise, il est utile de savoir qu'on peut considérer que la résistance de sortie d'une source idéale est la valeur de résistance dont cette source idéale est le cas particulier, c'est-à-dire que :

- une source de tension idéale possède une résistance de sortie *nulle* (valeur de résistance d'un court-circuit)
- une source de courant idéale possède une résistance de sortie *infinie* (valeur de résistance d'un circuit ouvert)

Lien avec le théorème de superposition

Ces propriétés sont encore utilisées dans le théorème de superposition (voir §3.7.2), où les sources idéales doivent être *annulées*. Cette "annulation" se fait précisément :

- en remplaçant une source de tension idéale par un court-circuit (résistance *nulle*)
- en remplaçant une source de courant idéale par un circuit ouvert (résistance *infinie*)

Ceci est également pleinement cohérent avec le fait que

- un court-circuit est une source de tension idéale de valeur *nulle*
- un circuit ouvert est une source de courant idéale de valeur *nulle*

Aspect énergétique

Pour chacun de ces dipôles, une des deux grandeurs électriques est par définition nulle. La puissance étant le produit du courant et de la tension, cela signifie que le court-circuit et le circuit ouvert n'absorbent ou ne produisent aucune puissance. Il n'y a donc pas lieu de les classer comme dipôle actif ou passif (on a d'ailleurs vu qu'ils peuvent être assimilés comme cas particuliers aussi bien à des sources qu'à des charges).

2.6 Combinaisons impossibles

Compte tenu des définitions données précédemment, toutes les combinaisons de dipôles pour former des circuits ne sont pas admissibles. Sur un simple plan théorique, la présence de telles combinaisons dans un circuit rend celui-ci impossible à résoudre. [13]

Sources de tensions idéales en parallèle

Il n'est pas possible d'admettre dans un circuit deux sources de tension idéales (de valeur différente) en parallèle : chaque source étant par définition un dipôle qui impose la ddp à ses bornes, la mise en parallèle de deux sources de tension idéales revient à imposer deux valeurs différentes à une même ddp, c'est-à-dire correspond au système impossible suivant :

$$\begin{aligned} V &= E_1 \\ V &= E_2 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Un court-circuit étant un cas particulier de source de tension idéale (de loi $V = 0$), la conclusion ci-dessus est également applicable au cas d'une source de tension idéale en parallèle avec un court-circuit.

En termes de caractéristiques, les cas ci-dessus correspondent à deux droites verticales d'abscisses différentes. L'absence d'intersection de ces caractéristiques correspond à l'absence de solution du système d'équations.

Sources de courant idéales en série

Il n'est pas possible d'admettre dans un circuit deux sources de courant idéales (de valeur différente) en série : chaque source étant par définition un dipôle qui impose le courant qui le traverse, la mise en série de deux sources de courant idéales revient à imposer deux valeurs différentes à un même courant de branche, c'est-à-dire correspond au système impossible suivant :

$$\begin{aligned} I &= J_1 \\ I &= J_2 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Un circuit ouvert étant un cas particulier de source de courant idéale (de loi $I = 0$), la conclusion ci-dessus est également applicable au cas d'une source de courant idéale en série avec un circuit ouvert.

En termes de caractéristiques, les cas ci-dessus correspondent à deux droites horizontales d'ordonnées différentes. L'absence d'intersection de ces caractéristiques correspond à l'absence de solution du système d'équations.

13. On ne perdra pas de vue néanmoins que dans un tel cas, c'est peut-être la nature idéale des dipôles qu'il revient de mettre en cause et non le circuit lui-même.

Généralisation

De manière générale, tout circuit formé de deux "moitiés" dont les caractéristiques n'admettent pas d'intersection commune correspond à un système d'équations n'admettant pas de solution et est donc impossible.

2.7 Quelques quadripôles idéaux

2.7.1 Sources commandées

Une **source commandée** est une source qui délivre une tension ou un courant dépendant d'une autre grandeur électrique ailleurs dans le montage.

Source de tension commandée en tension

Par exemple, une **source de tension commandée en tension** est une source de tension qui délivre une fem E dépendant d'une tension U présente ailleurs dans le circuit. La dépendance entre ces deux grandeurs s'exprime via une équation du type :

$$E = f(U) \tag{2.40}$$

Le lien le plus classique est un lien de proportionnalité :

$$E = G.U \tag{2.41}$$

où G est un facteur sans dimension appelé **gain** (en tension).

Rigoureusement parlant, une telle source commandée est un quadripôle dont la tension d'entrée est U et la tension de sortie E (figure 2.16).

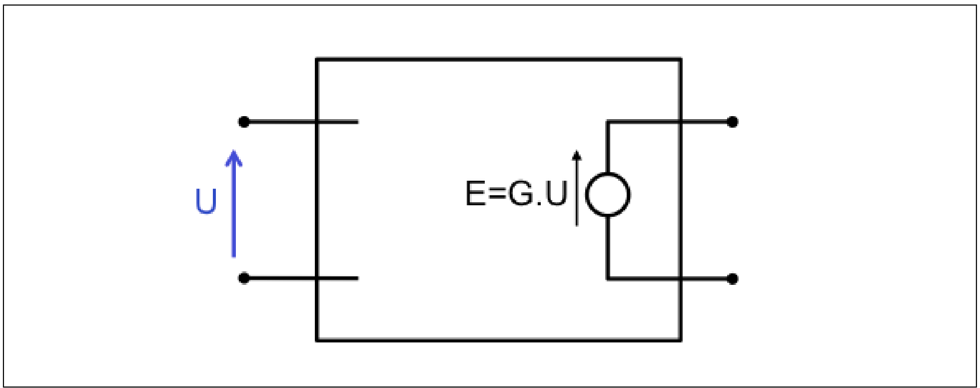

FIGURE 2.16 – source de tension commandée en tension, vue comme un quadripôle

Le lien entre U et E étant purement mathématique (on ne s'intéresse pas ici à la manière dont est physiquement réalisé ce lien, mais à la source commandée comme objet théorique), on représente néanmoins souvent une source commandée sous forme d'un dipôle, en faisant explicitement apparaître l'équation liant les deux grandeurs (figure 2.17).

Autres sources commandées

Il existe logiquement trois autres types de sources commandées.

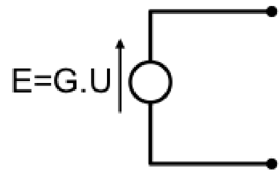

FIGURE 2.17 – source de tension commandée en tension, vue comme un dipôle

Une **source de courant commandée en courant** est une source de courant délivrant un courant I dépendant d'un courant J présent ailleurs dans le circuit :

$$I = f(J) \tag{2.42}$$

Dans le cas d'une relation proportionnelle, le facteur liant I et J est appelé **gain** (en courant). Ce facteur est sans unité.

Une **source de tension commandée en courant** est une source de tension délivrant une fem E dépendant d'un courant J présent ailleurs dans le circuit :

$$E = f(J) \tag{2.43}$$

Dans le cas d'une relation proportionnelle, le facteur liant E et J est appelé **transimpédance** [14] et s'exprime en Ω.

Une **source de courant commandée en tension** est une source de courant délivrant un courant I dépendant d'une tension U présente ailleurs dans le circuit :

$$I = f(U) \tag{2.44}$$

Dans le cas d'une relation proportionnelle, le facteur liant I et U est appelé **transadmittance** et s'exprime en Ω^{-1}.

2.7.2 Transformateur idéal

Un transformateur est un composant permettant de modifier les amplitudes de courant et de tension d'un signal alternatif. Concrètement, un transformateur est typiquement obtenu en couplant autour d'un noyau magnétique deux bobines qui possèdent respectivement des nombres de spires N_1 et N_2 . Dans sa version idéale, un tel transformateur impose un rapport des tensions d'entrée et de sortie V_1 et V_2 dans le rapport du nombre de spires, autrement dit :

$$\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \frac{N_2}{N_1} \tag{2.45}$$

14. Pourquoi "transimpédance" ? Parce que cette grandeur est le rapport entre la tension délivrée par la source commandée et le courant commandant cette source. Elle a donc les dimensions d'une résistance ou d'une impédance ($V/A = \Omega$). On y ajoute le préfixe "trans" pour indiquer qu'il s'agit d'un rapport entre une grandeur de sortie et une grandeur d'entrée (et non de deux grandeurs présentes sur le même dipôle). L'explication est analogue pour la "transadmittance".

ou encore :

$$v_2(t) = (\frac{N_2}{N_1})v_1(t) \tag{2.46}$$

Un tel transformateur ne modifie pas la puissance du signal

$$p_1(t) = p_2(t) \tag{2.47}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$v_1(t)i_1(t) = v_2(t)i_2(t) \tag{2.48}$$

de telle sorte que les courants sont dans un rapport :

$$i_2(t) = (\frac{N_1}{N_2})i_1(t) \tag{2.49}$$

Pour reproduire le comportement d'un transformateur réel, il est typiquement nécessaire d'ajouter au transformateur idéal défini par les équations ci-dessus des impédances traduisant diverses imperfections.

2.8 Linéarité et non-linéarité des composants

Le caractère linéaire ou non d'un composant/circuit est en électronique une propriété essentielle. En effet, le fait qu'un circuit soit linéaire permet de lui appliquer un ensemble de théorèmes qui peuvent grandement faciliter son analyse et/ou sa résolution. Par ailleurs les circuits linéaires et les circuits non-linéaires imposent des types de traitement tout-à-fait différents aux signaux qu'on leur applique. Il est donc important de connaître les critères définissant la linéarité.

2.8.1 Circuit linéaire

Pour qu'un circuit soit linéaire, la condition est simple :

Un circuit est linéaire si tous ses composants sont linéaires

2.8.2 Dipôles linéaires

Ici encore, la définition d'un composant linéaire est simple, à tout le moins pour un dipôle :

Un dipôle est linéaire si sa caractéristique est une droite

Cette définition étant posée, il est intéressant d'analyser la linéarité des dipôles idéaux déjà définis.

Charges

Pour rappel, nous avons défini les dipôles "charge" par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} v_R(t) &= R i_R(t) \\ v_L(t) &= L\frac{di_L(t)}{dt} \\ i_C(t) &= C\frac{dv_C(t)}{dt} \end{aligned} \tag{2.50}$$

Il en résulte que dans le plan (I,V), la caractéristique d'une résistance est une droite de pente $-\frac{1}{R}$.

Quant aux dipôles L et C, s'ils ne possèdent pas de caractéristique dans le plan (I,V), nous avons indiqué qu'on pouvait leur faire correspondre les équations suivantes dans des plans alternatifs :

$$\begin{aligned} \phi(t) &= Li(t) \\ q(t) &= Cv(t) \end{aligned} \tag{2.51}$$

d'où il découle que :

- le dipôle L possède une caractéristique qui est une droite de pente L dans le plan (ϕ, I)
- le dipôle C possède une caractéristique qui est une droite de pente C dans le plan (Q, V)

Tous ces dipôles de base sont donc linéaires, ce qui tient au fait que la "valeur" du dipôle (R, L ou C) est précisément, par définition, un facteur de proportionnalité intervenant dans sa loi fondamentale.

Sources

Un même raisonnement peut être tenu pour les sources. Les sources de tension et de courant idéales ont pour équations :

$$\begin{aligned} V &= E \\ I &= J \end{aligned} \tag{2.52}$$

Ces équations correspondent à des droites horizontales ou verticales et les dipôles source déjà envisagés (en ce compris le court-circuit et le circuit ouvert) sont donc linéaires.

Critère alternatif

On remarquera néanmoins que le caractère linéaire des dipôles envisagés tient au fait que leur "valeur" (R, L, C, E, J) est une *constante*. Si cette valeur n'était pas constante, *au sens qu'elle dépendrait de V et/ou de I (selon le cas)*, la caractéristique ne serait plus une droite et le dipôle ne serait plus linéaire.

Cette constatation nous permet de formuler un critère alternatif pour les dipôles idéaux déjà envisagés :

Un dipôle idéal est linéaire si sa valeur (R, L, C, E ou J) est une constante

2.8.3 Dipôles non-linéaires

Peut-on envisager que des résistances, inductances, capacités ne soient pas linéaires ? Tout-à-fait. De tels composants existent en théorie et également dans la réalité : pour ne donner qu'un exemple, une **self saturable** est typiquement une inductance non-linéaire.

Une résistance non-linéaire correspond mathématiquement à une équation du type :

$$v(t) = R(i)\,i(t) \tag{2.53}$$

ou, plus logiquement puisqu'on représente de préférence la caractéristique dans un plan (I, V) :

$$i(t) = \frac{1}{R(v)}\,v(t) \tag{2.54}$$

où la dépendance de R en v ou en i est notée explicitement pour insister sur le fait que cette valeur n'est pas constante.

Similairement, une inductance non-linéaire correspond mathématiquement à une équation du type :

$$v(t) = L(i)\frac{di(t)}{dt} \tag{2.55}$$

et une capacité non-linéaire correspond mathématiquement à une équation du type :

$$i(t) = C(v)\frac{dv(t)}{dt} \tag{2.56}$$

Au niveau du symbole du composant, l'aspect non-linéaire se marque par l'ajout d'une flèche oblique (évoquant le fait que la valeur du composant change en fonction du courant et/ou de la tension qu'il subit).

2.8.4 Quadripôles

Un quadripôle possédant plusieurs caractéristiques, il peut en principe être linéaire selon certaines et non-linéaire selon d'autres. Sauf information contraire, on partira du principe que si une des caractéristiques est non-linéaire, le composant est non-linéaire.

2.8.5 Théorèmes applicables

Un premier principe à retenir est qu'un circuit linéaire ne modifie pas la fréquence des signaux qui lui sont appliqués (au contraire d'un circuit non linéaire). En d'autres termes, si l'on injecte une sinusoïde d'une certaine fréquence dans un circuit linéaire, tous les signaux dans ce circuit seront des sinusoïdes à cette même fréquence.

Un second théorème applicable, lorsqu'un circuit est linéaire, est le théorème de superposition. Dans un circuit comportant plusieurs sources, celui-ci permet de considérer isolément l'influence de chaque source, ce qui facilite souvent les calculs. Un exemple de l'utilisation du théorème de superposition pour résoudre un circuit est donnée au §3.7.2.

Ces propriétés seront abondamment utilisées pour étudier l'influence des capacités et inductances dans les circuits. Tout un formalisme mathématique spécifique a en effet été développé -l'analyse complexe- pour étudier les circuits linéaires en régime sinusoïdal (voir dernière section de ce vade-mecum).

2.8.6 Linéarisation

Lorsqu'un circuit ou un composant n'est pas linéaire, il arrive souvent qu'on cherche une parade pour lui appliquer les théorèmes des circuits linéaires, vu leur intérêt. Diverses solutions sont possibles.

Caractéristique linéaire par morceaux

Certains composants possèdent une caractéristique qui, si elle n'est pas linéaire à strictement parler, est néanmoins composée de plusieurs segments linéaires. C'est le cas notamment de l'ampli opérationnel.

Dans un tel cas, pour autant que les grandeurs électriques restent sur un même segment (ou *tant qu'*elles restent sur un même segment), on peut faire l'approximation que le composant est linéaire. Le résultat obtenu est alors conditionné à l'hypothèse de rester sur le segment considéré.

Composants et circuits non-linéaires

Lorsque la caractéristique du composant ou du circuit est réellement non-linéaire au sens de "courbe", on peut faire une approximation à petits signaux, c'est-à-dire considérer que tant que les variations du signal sont petites, la caractéristique non-linéaire peut être assimilée à sa tangente (qui est par définition, linéaire).

La gamme de variation admissible pour les signaux dépend du cas précis considéré : le critère est simplement que l'erreur entre la caractéristique réelle et sa tangente doit rester faible au regard du problème considéré.

Cette technique est couramment utilisée avec les transistors.

Chapitre 3

Résoudre un circuit

Ce chapitre expose comment répondre à un problème très concret : résoudre un circuit électrique ou électronique, c'est-à-dire calculer -sans se tromper- tout ou partie des tensions et courants dans ce circuit.
Si tout le monde est capable de se lancer dans la résolution d'un circuit électrique en écrivant quelques équations, ceci ne suffit malheureusement pas pour arriver à une solution correcte en un temps raisonnable : loin de là ! La principale difficulté est de savoir où on en est et ce qu'il faut faire, c'est-à-dire d'avoir une stratégie de résolution claire, consciente, adéquate et suffisamment sûre pour éviter les erreurs.

La première partie du chapitre vise à donner une procédure de base répondant à cet objectif dans les cas simples :

- la section 3.1 rappelle le vocabulaire directement lié à la résolution des circuits ;
- la section 3.2 présente une procédure canonique en 6 étapes et l'illustre sur un exemple. Cette méthode permet déjà de résoudre la majorité des circuits en évitant les principaux pièges ;
- la section 3.3 s'attarde sur un circuit particulier souvent présent dans le reste du cours : le diviseur résistif. Ce circuit est résolu en détail, ce qui permet d'illustrer plus en profondeur diverses notions.

La suite du chapitre est consacrée à l'explication de diverses méthodes complémentaires utilisables en fonction des circonstances et permettant d'accélérer la procédure de base. Le lecteur peut ainsi se constituer une véritable "boîte à outils" comprenant :

- les équivalences série et parallèle (section 3.4)
- l'utilisation des théorèmes de Thévenin et Norton pour résoudre un circuit (section 3.5)
- la résolution par intersection de caractéristiques (section 3.6)
- le théorème de superposition (section 3.7)

Pour autant qu'elle soit bien maîtrisée, l'association de la procédure de base avec ces différents outils permettra de développer une stratégie de résolution efficace spécifique à chaque circuit.

3.1 Vocabulaire lié aux circuits

3.1.1 Rappels

Rappelons d'abord quelques notions vues à la section 1.

Circuit, noeuds et potentiels

Un **circuit** électrique est un assemblage de composants reliés entre eux par des connexions.

Dans un circuit, un **nœud** est une connexion entre deux composants ou davantage.

Chaque nœud possède un **potentiel** (défini par rapport à la masse).

Un nœud n'est pas forcément ponctuel : il s'étend à l'ensemble des conducteurs connectant les composants concernés (pour autant que ceux-ci soient équipotentiels).

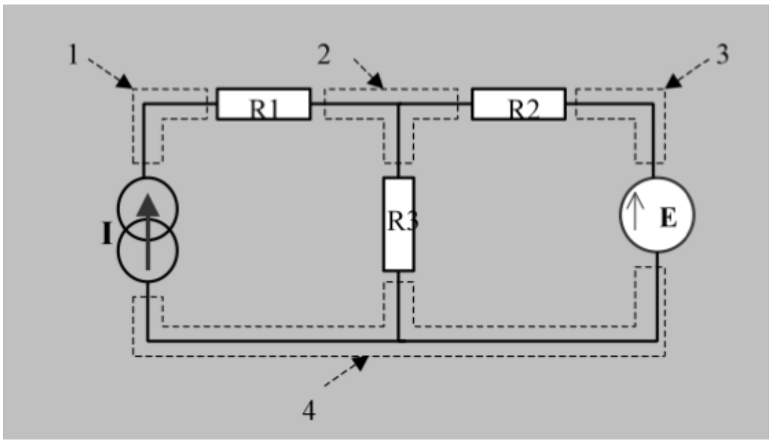

FIGURE 3.1 – Le circuit ci-dessus possède 4 nœuds (lignes interrompues)

Masse

La **masse** est le nœud particulier dont le potentiel est fixé, par décision de l'utilisateur, à la valeur 0V.

Si l'on s'intéresse uniquement aux **ddps**, il n'est pas nécessaire de fixer une masse. Il est par contre nécessaire d'en choisir une :

- si l'on s'intéresse aux potentiels
- souvent : lorsqu'on réalise une mesure au laboratoire

Dans le circuit de la figure 3.1, chacun des quatre nœuds pourrait donc être choisi comme masse.

DDP

Entre deux nœuds quelconques, il existe une **ddp** (différence de potentiel) mesurable au voltmètre.

En cas de changement de masse, les ddps ne sont pas modifiées (au contraire des potentiels).

3.1.2 Connexions série et parallèle

Deux dipôles sont connectés en **série** si et seulement si ils sont *parcourus par le même courant.*

Deux dipôles sont connectés en **parallèle** si et seulement si ils sont *soumis à la même ddp.*

Comment reconnaître une connexion série ou parallèle :

- deux dipôles en série sont typiquement connectés par un conducteur unique (qui n'est connecté à aucun autre composant) : une connexion série implique la présence d'un "nœud entre deux dipôles". C'est le cas du nœud 1 (connectant R1 et I en série) et du nœud 3 (connectant R2 et E en série) dans la figure 3.1.
- deux dipôles en parallèle ont à leurs extrémités les mêmes nœuds en commun (voir "branche" ci-dessous pour un exemple)

3.1.3 Branche

Une **branche** est l'ensemble des composants connectés en série, entre deux nœuds connectant plus de deux composants.

Le circuit ci-dessous comporte 3 branches :

- une branche formée de I et R1
- une branche formée de E et R2
- une branche formée de R3

Par ailleurs, ces trois branches sont connectées en parallèle[1] puisqu'elles partagent à leurs extrémités les nœuds 2 et 4, et voient donc toutes les trois la même ddp.

N.B. : Une branche -qu'elle soit formée d'un seul ou de plusieurs dipôles- forme elle-même un dipôle puisqu'elle possède deux bornes : ses deux noeuds extrêmes.

3.1.4 Maille

Dans un circuit, une **maille** est une boucle fermée (comprenant un certain nombre de composants).

Le circuit ci-dessus comporte 3 mailles :

1. Il s'agit d'un cas particulier lié à ce circuit. Il est cité ici pour illustrer la notion de mise en parallèle.

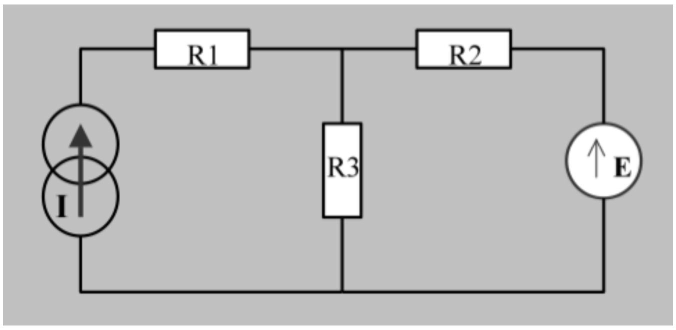

FIGURE 3.2 – un circuit simple à résoudre

- une maille formée de I, R1 et R3
- une maille formée de R3, R2 et E
- une maille formée de I, R1, R2 et E

Les composants formant une maille ne sont pas forcément en série ! Dans le circuit ci-dessus, les dipôles I, R1 et R3 forment une maille mais ne sont pas en série. En effet, puisque le nœud 2 (notamment) connecte trois composants, les courants dans R1 et dans R3 sont a priori différents.

3.1.5 Lois de Kirchhoff

Les lois de Kirchhoff font partie de la théorie générale de l'électricité. Elles sont liées de manière indissociable aux concepts de courant et de tension et interviennent donc directement dans la résolution des circuits.

Loi des noeuds

D'après la **loi des nœuds**, la somme[2] des courants entrant dans un nœud est nulle. Concrètement, cela signifie qu'à tout instant, toute quantité de courant "entrant" dans un nœud (par une des connexions formant ce nœud) doit forcément sortir par une ou plusieurs autres connexions.

Loi des mailles

D'après la **loi des mailles**, la somme[3] des ddps obtenue en parcourant complètement une maille est nulle.

L'utilisation concrète de ces deux lois sera illustrée dans la procédure ci-dessous.

2. Il s'agit de la somme algébrique, c'est-à-dire que ces courants peuvent être négatifs (un courant "entrant" négatif étant bien entendu un courant "sortant" positif)
3. également une somme algébrique.

3.2 Procédure canonique en 6 étapes

3.2.1 Avertissement

La méthode présentée ci-dessous permet de résoudre de manière systématique un circuit, c'est-à-dire de calculer les courants et les tensions présents partout dans ce circuit (pour autant que celui-ci soit bien formulé).

Cette méthode utilise les **courants de branche**, une formulation dans laquelle chaque branche du circuit est parcourue par un courant.

Par opposition, il est également possible de formuler le problème en **courants de maille**, méthode dans laquelle chaque maille est parcourue par un courant.

La méthode des courants de branche a l'avantage de considérer des courants qui sont réellement mesurables, raison pour laquelle elle est préférée dans le cadre de ce cours. Les deux méthodes mènent néanmoins au même résultat final, et donc sont équivalentes (passer d'une méthode à l'autre revient à un changement de variables entre les deux ensembles de courants).

De manière plus générale, nous proposons ici une méthode de base pour les étudiants qui n'en disposent pas ou sont incertains sur la méthode à utiliser. Toute autre méthode consciente, correcte et efficace pour résoudre un circuit est également valable.

Nous insistons très fortement sur l'intérêt d'apprendre à maîtriser cette procédure si vous ne disposez pas déjà d'un moyen sûr de résoudre les circuits. Dans celle-ci, chaque étape joue un rôle spécifique. Il est donc crucial d'appliquer chacune des étapes, sans en omettre aucune. L'utilisation de cette procédure permet alors d'éviter de très nombreux écueils.

3.2.2 Vue d'ensemble

Voici les six étapes de base que nous proposons d'appliquer pour résoudre un circuit par la méthode des courants de branche :

1. tracer une flèche de courant dans chaque branche du circuit
2. indiquer sur chaque élément la flèche de tension (ddp) correspondante
3. exprimer les équations qui lient les tensions (loi des mailles)
4. exprimer les équations qui lient les courants (loi des noeuds)
5. exprimer les lois des composants
6. résoudre le système d'équations

Pour résoudre un circuit, il suffit donc de retenir l'ordre de succession des étapes ci-dessus et de savoir quoi faire exactement à chaque étape, ce que nous détaillons maintenant sur l'exemple de la figure 3.2.

3.2.3 Etape 1 : tracer une flèche de courant dans chaque branche du circuit

Cette étape consiste à définir correctement les courants qui vont servir à calculer le circuit.

En pratique, il suffit de définir un courant par branche (d'où le nom de la méthode) et de lui donner un nom et un sens arbitraires. Il faut pour cela être capable de distinguer correctement les différentes branches du circuit (voir §3.1.3).

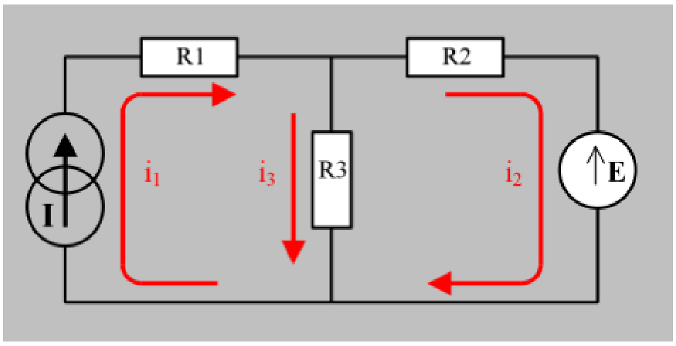

FIGURE 3.3 – la première étape consiste à définir les courants

Le sens des flèches de courant est totalement arbitraire. A ce stade, on suppose implicitement que tous les courants sont positifs, mais cela ne nous engage à rien. On a néanmoins plus de chances que cette supposition soit juste si on respecte la "convention générateur" pour les sources qui seraient éventuellement présentes dans la branche (ce que nous avons fait ici pour la source I mais pas pour la source E), mais ce n'est pas indispensable.

Il est important de donner un nom précis et différent à chaque courant, sinon on risque de confondre ces différents courants ensuite.

C'est en négligeant cette étape initiale qu'un très grand nombre d'étudiants compromettent déjà la résolution correcte des circuits lors des examens.

3.2.4 Etape 2 : tracer les flèches de tension sur chaque composant

Cette étape consiste à définir correctement une ddp sur chaque composant.

La seule chose crucialement importante ici, c'est de rester cohérent avec les courants que nous avons établis dans l'étape précédente. Heureusement, cela peut se faire de manière totalement automatique :

- pour les composants passifs (ainsi que réactifs), utiliser la convention récepteur : tracer une flèche de tension dans le sens opposé à celui de la flèche de courant.
- pour les composants actifs (sources), utiliser la convention générateur : tracer une flèche de tension dans le même sens que celui de la flèche

de courant.

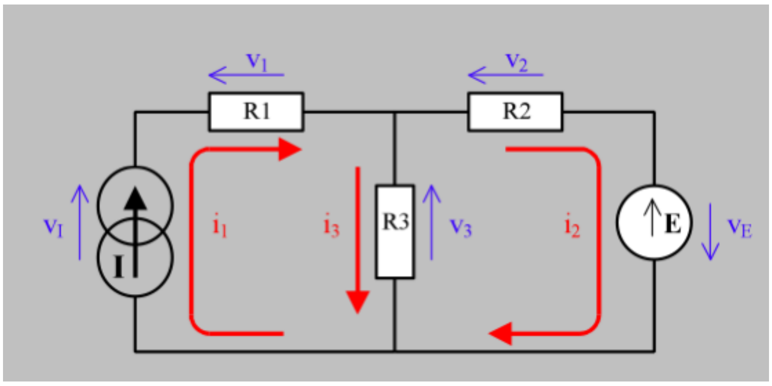

FIGURE 3.4 – dans la deuxième étape, on définit les ddps

Pour mener cette tâche à bien, il faut savoir distinguer un composant actif d'un composant passif et connaître les conventions "récepteur" et "générateur" (voir §1.4.2).

L'intérêt de cette étape est multiple :

- maximiser les chances d'obtenir une majorité de valeurs positives, plus intuitives à manipuler
- distinguer les différentes ddps pour éviter de les confondre dans la suite (comme pour les courants à l'étape 1)
- mais surtout : éviter de devoir tenir compte des signes lorsqu'on écrira les lois des composants à l'étape 5. Si l'on ne réalisait pas correctement l'étape 2, il faudrait en effet pour chaque composant se demander quel signe mettre dans sa loi, et pour une résistance par exemple vérifier s'il faut écrire V=RI ou V=-RI. L'étape 2 permet de ne pas devoir se poser de questions à ce sujet et minimise donc très fortement le risque d'erreur de signe.

Les étapes 1 et 2 servent donc à "préparer le terrain" pour écrire correctement les équations du circuit. Il est donc crucial de ne pas les omettre.

Toutes les grandeurs électriques ayant été définies correctement, il faut maintenant exprimer les relations qui existent entre ces grandeurs. C'est le rôle des trois étapes qui suivent.

3.2.5 Etape 3 : exprimer les équations qui lient les tensions (loi des mailles)

Cette étape consiste à exprimer mathématiquement la loi des mailles, qui dit que la somme algébrique[4] des tensions tout au long d'une maille est nulle.

Concrètement, il suffit pour chaque maille[5] de :

4. c'est-à-dire compte tenu des signes + et -.
5. On peut se contenter d'écrire ces équations pour les mailles indépendantes du circuit (deux

- choisir un sens arbitraire selon lequel on va parcourir la maille ainsi qu'un nœud de départ ;
- partant du nœud de départ, pour chaque composant rencontré : additionner la différence de potentiel sur le composant (celle qui a été définie à la deuxième étape) si celle-ci est dans le sens de parcours choisi ; la soustraire si elle est dans le sens opposé ;
- lorsqu'on est revenu au nœud de départ : égaler la somme ainsi obtenue à zéro.

Pour notre exemple, et en considérant le sens horlogique pour parcourir les deux mailles, on obtient :

$$\begin{aligned} v_I - v_1 - v_3 &= 0 \\ v_3 - v_2 + v_E &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.2.6 Etape 4 : exprimer les équations qui lient les courants (loi des nœuds)

Cette étape consiste à exprimer mathématiquement la loi des noeuds, qui dit que que la somme algébrique des courants entrant dans un nœud est nulle.

Cette loi ne doit être exprimée que pour les nœuds connectant plus de deux composants : si deux composants seulement sont connectés, un seul courant a déjà été défini à l'étape 1. Le bilan du noeud connectant les deux composants est donc automatiquement satisfait.

Il est possible que des nœuds différents donnent des équations équivalentes. C'est notamment le cas dans notre exemple où les deux nœuds connectant chacun trois composants donnent la même équation :

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \tag{3.2}$$

3.2.7 Etape 5 : exprimer les lois des composants

Cette étape consiste à écrire, pour chaque composant, les lois qui lient entre elles les grandeurs électriques qui lui sont liées. Les dipôles ne possèdent chacun qu'une seule loi. Des composants plus complexes peuvent posséder plusieurs lois.

Pour les résistances et les sources, voici comment faire :

- pour une résistance, on écrira sa loi d'Ohm : la différence de potentiel est égale au courant multiplié par la valeur de la résistance. Il n'y a pas lieu de se soucier du signe si l'on a réalisé l'étape 2 (où courant et tension ont été définis de manière cohérente) ;
- pour une source de tension : remplacer la ddp définie à l'étape 2 par la force électromotrice de la source (signe "+" si la ddp et la fem sont de sens identiques, signe "-" pour des sens opposés) ;

mailles dans ce cas-ci). L'écriture de la loi des mailles pour les autres mailles (dépendantes) introduit simplement des équations redondantes avec les précédentes.

- pour une source de courant : remplacer le courant défini à l'étape 1 par le courant imposé par la source (signe "+" si les courants sont de sens identiques, signe "-" pour des sens opposés).

Pour le circuit considéré, voici ce que cela donne :

- compte tenu des noms choisis aux étapes 1 et 2, les lois des résistances sont triviales à écrire [6] :

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 i_1 \\ v_2 &= R_2 i_2 \\ v_3 &= R_3 i_3 \end{aligned} \tag{3.3}$$

- pour la source de tension, il faut utiliser un signe négatif puisque la ddp et la fem sont de sens opposés [7] :

$$v_E = -E \tag{3.4}$$

- pour la source de courant, il faut utiliser un signe positif puisque les deux courants sont dans le même sens [8] :

$$i_1 = +I \tag{3.5}$$

On voit que cette étape est très simple : il faut juste faire attention aux signes des sources. Attention : même si les équations des sources paraissent triviales, elles apportent une information importante et constituent en soi des équations sans lesquelles on ne peut résoudre le circuit.

3.2.8 Etape 6 : résoudre le système obtenu

Pour trouver l'ensemble des courants et des tensions existant dans le circuit, il faut maintenant considérer les équations suivantes :

- le système obtenu par la loi des mailles (étape 3),
- le système obtenu par la loi des nœuds (étape 4),
- les lois des composants (étape 5).

Pour le circuit considéré, le système complet à résoudre est donc le suivant (cfr supra) :

$$\begin{aligned} v_I - v_1 - v_3 &= 0 \\ v_3 - v_2 + v_E &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \tag{3.7}$$

6. il est conseillé de ne surtout pas réfléchir à ce stade : c'est l'intérêt de cette procédure
7. on voit ici que si on avait défini la ddp dans le sens de la fem, on aurait eu un signe positif
8. d'où l'intérêt de choisir i1 dans le même sens que I à l'étape 1

$$
\begin{aligned}
v_1 &= R_1 i_1 \\
v_2 &= R_2 i_2 \\
v_3 &= R_3 i_3 \\
v_E &= -E \\
i_1 &= +I
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

On peut vérifier qu'il s'agit bien d'un système de 8 équations à 8 inconnues (v_I, v_1, v_2, v_3, v_E, i_1, i_2, i_3). Il est donc complet. Y figurent également les valeurs correspondant aux "données" du problème : E, I, R_1, R_2, et R_3.

On peut ensuite résoudre cet ensemble d'équations selon les diverses techniques habituelles en algèbre. On peut soit rechercher systématiquement toutes les tensions et tous les courants, soit se concentrer sur des tensions et courants particuliers si on ne cherche que certaines valeurs.

En pratique, une première étape peut être d'injecter les lois des composants dans les équations de noeuds et de maille[9], ce qui réduit ici le système à :

$$
\begin{aligned}
v_I - R_1 i_1 - R_3 i_3 &= 0 \\
R_3 i_3 - R_2 i_2 - E &= 0 \\
+I - i_2 - i_3 &= 0
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

On peut par exemple ensuite se concentrer sur le calcul des courants. Dans ce cas-ci, on connaît déjà i_1. On trouve aisément :

$$
\begin{aligned}
i_2 &= \frac{R_3 I - E}{R_2 + R_3} \\
i_3 &= \frac{R_2 I + E}{R_2 + R_3}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Une fois les courants connus, il sera facile de calculer les tensions en utilisant les lois d'Ohm (et si nécessaire les lois des noeuds et des mailles). On obtient ici :

$$
\begin{aligned}
v_1 &= R_1 i_1 = R_1 I \\
v_2 &= R_2 i_2 = R_2 \frac{R_3 I - E}{R_2 + R_3} \\
v_3 &= R_3 i_3 = R_3 \frac{R_2 I + E}{R_2 + R_3} \\
v_I &= R_1 i_1 + R_3 i_3 = v_1 + v_3 = R_1 I + R_3 \frac{R_2 I + E}{R_2 + R_3}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Si l'on désire uniquement connaître un nombre limité de tensions et de courants (sur un seul composant par exemple), on peut bien sûr s'arrêter dès qu'on dispose de ces résultats, sans résoudre forcément tout le système.

9. cette opération peut éventuellement être faite mentalement aux étapes 3 et 4, mais attention à ne pas faire d'erreur en voulant gagner du temps

3.2.9 Valeurs numériques

Exemple

Lorsqu'on dispose de valeurs numériques, on peut substituer ces valeurs aux grandeurs analytiques à l'une ou l'autre étape du calcul. Prenons par exemple les données suivantes :

$$I = 100mA$$
$$E = 20V$$
$$R_1 = 100\Omega$$
$$R_2 = R_3 = 50\Omega$$

Introduites dans notre solution analytique finale, nous obtenons :

$$i_2 = -150mA$$
$$i_3 = 250mA$$

$$v_1 = 10V$$
$$v_2 = -7.5V$$
$$v_3 = -12.5V$$
$$v_I = 22.5V$$

Inversion des signes négatifs

Certaines valeurs de courant ou de tension sont négatives. Que cela signifie-t-il ? Simplement que le courant ou la tension ont le sens opposé à celui que nous avons supposé au début de la procédure. Ceci ne demande aucune opération supplémentaire. Néanmoins pour plus de confort et pour limiter les risques d'erreur dans des calculs ultérieurs, on peut si on le désire inverser les flèches correspondantes en même temps qu'on change le signe du courant ou de la tension concernés (ici pour i_2 et v_2). On obtient donc finalement la solution représentée à la figure 3.5 :

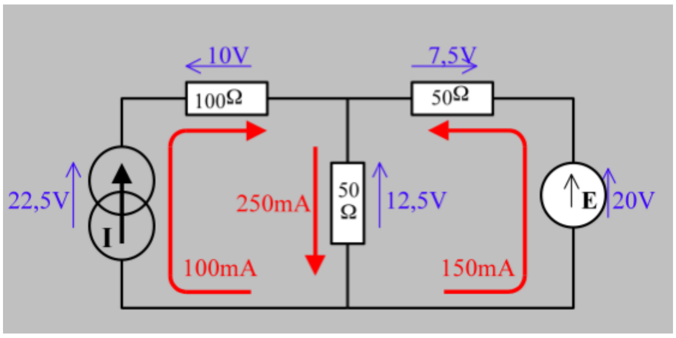

FIGURE 3.5 – exemple de solution numérique

Vérification par la loi des noeuds et des mailles

Une fois toutes les valeurs numériques obtenues, un recoupement utile pour vérifier qu'on n'a pas fait d'erreur de calcul consiste à revérifier les lois des noeuds et des mailles avec ces valeurs numériques :

- pour chaque maille : obtient-on bien 0 lorsqu'on additionne algébriquement toutes les tensions de la maille ?
- pour chaque noeud : obtient-on bien 0 lorsqu'on additionne algébriquement tous les courants du noeud ?

On peut vérifier sur la figure ci-dessus que c'est bien le cas. Si ce n'est pas le cas, c'est qu'il y a par contre une erreur…

3.2.10 Expression des mailles cachées

Alimentations et masses

Avant d'appliquer la procédure précédente pour résoudre un circuit, il faut s'assurer qu'on considère le "bon" circuit. On a en effet l'habitude, en particulier pour les alimentations (au sens large, c'est-à-dire aussi pour les masses), de faire des raccourcis de notation. Prenons l'exemple suivant :

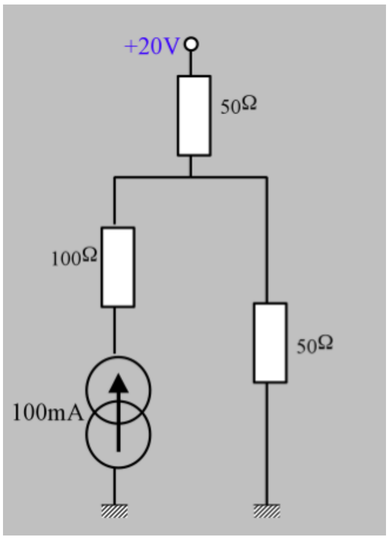

FIGURE 3.6 – notation allégée utilisée pour les alimentations (à comparer à la figure 3.2)

Dans cette représentation, toutes les mailles ont disparu ! Il s'agit pourtant du même circuit que précédemment. On peut donc être désarçonné au moment d'utiliser la méthode… Pour retomber sur le circuit complet, il faut savoir :

- qu'un noeud isolé (non connecté) à côté duquel figure une valeur de tension représente en fait une source de tension (de cette valeur) entre ce noeud et la masse ;

- que les différentes masses sont implicitement connectées ensemble.

En tenant compte de ces propriétés, on retrouve le schéma suivant, qui est bien équivalent au schéma initial et peut cette fois être résolu sans difficulté :

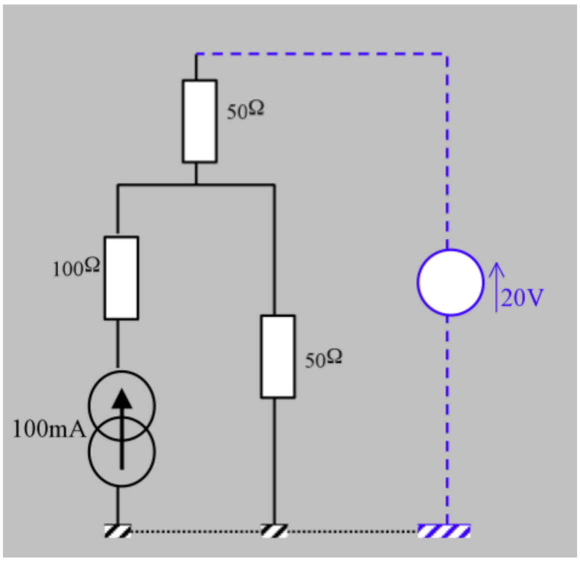

FIGURE 3.7 – ce qui se cache derrière la notation allégée de la figure précédente

Composants possédant une entrée et/ou une sortie

💣 Cette remarque concernant la "mise en forme" préalable du circuit s'applique aussi à certains composants que nous verrons dans la suite du cours (ampli opérationnel, portes logiques, etc), composants qui possèdent au moins une entrée ou une sortie.

Pour résoudre un schéma comportant un de ces composants, il faut expliciter le modèle interne de ceux-ci (voir notamment les sections 4.1 et 4.3), sans quoi le schéma ne sera pas complet. Dans le cas contraire, on risque de raisonner à l'intuition sur des boucles qui n'existent pas.

3.3 Diviseur résistif

Le schéma de la figure 3.8 est appelé **diviseur résistif**. Extrêmement courant, il mérite d'être traité en détail. On cherche ici la valeur de la tension V_2 sur la résistance inférieure, considérée comme la valeur de sortie du circuit, la valeur d'entrée étant la tension E.

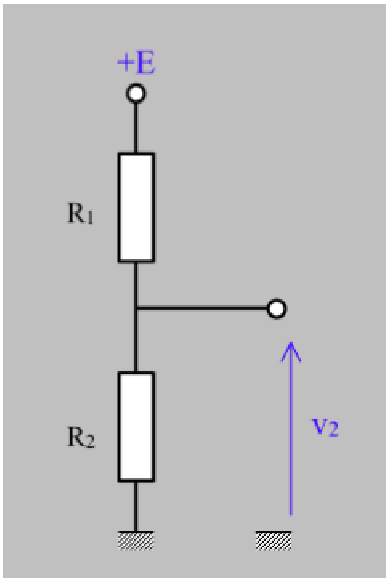

FIGURE 3.8 – schéma du diviseur résistif

3.3.1 Diviseur résistif à vide

Tout d'abord, comme indiqué au §3.2.10, il convient de faire apparaître les mailles "cachées". On obtient le circuit de la figure 3.9.

Que faire de la borne de droite ? A priori, rien n'est connecté à cette borne (le circuit est dit "à vide" ou "non chargé"), donc aucun courant ne circule via celle-ci. Nous allons calculer le circuit dans ces conditions, en appliquant la procédure de base :

- étape 1 : le circuit comprend en fait une seule branche (puisqu'aucun courant ne circule par la borne de droite), donc nous définissons un seul courant que nous orientons a priori dans le sens horlogique pour respecter la convention générateur de la source (figure 3.10) ;
- étape 2 : sur R_2, la tension v_2 est déjà conforme à la convention récepteur ; sur R_1, nous ajoutons la tension v_1 en utilisant la convention récepteur ; pour la source, nous utilisons directement la fem E, ce qui nous évitera de définir inutilement une ddp supplémentaire.
- étape 3 : la loi des mailles donne une seul équation (une seule maille) :

$$E - v_1 - v_2 = 0 \tag{3.12}$$

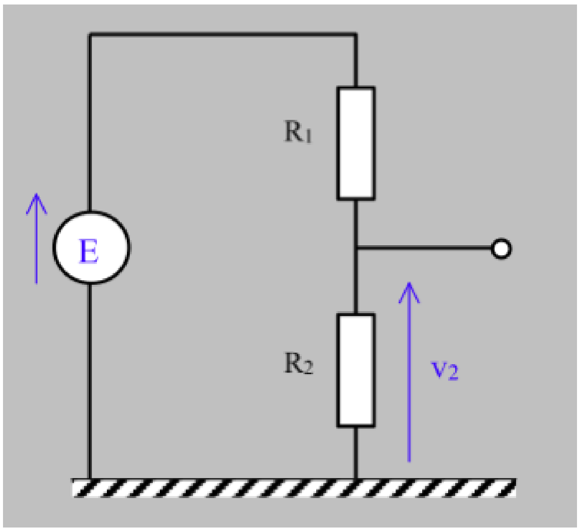

FIGURE 3.9 – schéma explicité

- étape 4 : la loi des noeuds ne donne aucune équation puisqu'il n'y a qu'un seul courant.
- étape 5 : le système complet est obtenu en ajoutant les lois des composants qui se limitent ici aux lois des résistances :

$$\begin{aligned} E - v_1 - v_2 &= 0 \\ v_1 &= R_1 i_1 \\ v_2 &= R_2 i_2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

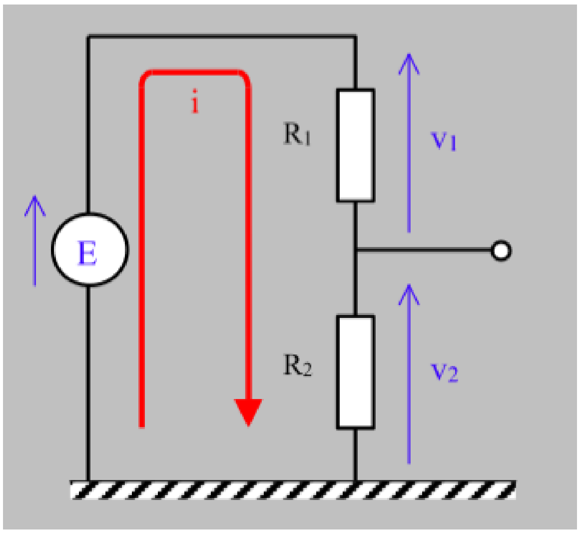

FIGURE 3.10 – courants et tensions choisis pour résoudre le circuit (étapes 1 et 2)

En injectant les lois d'Ohm dans la première équation, on obtient :

$$E - R_1 i_1 - R_2 i_2 = 0 \tag{3.14}$$

qui permet d'extraire le courant :

$$i = \frac{E}{R_1 + R_2} \tag{3.15}$$

et finalement la tension sur la résistance inférieure vaut :

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \tag{3.16}$$

Les résistances étant positives, la fraction est forcément plus petite que 1. La tension v_2 est donc inférieure à E, d'un facteur qui peut être choisi grâce aux rapport de résistances. Ce circuit permet donc de réduire la tension en fonction des valeurs de résistances, d'où le nom de "diviseur résistif".

3.3.2 Diviseur résistif chargé

Résolution classique

Dans la section précédente, le circuit était à vide. La raison d'être de ce circuit est néanmoins d'y connecter quelque chose. Cette **charge** apparaîtra typiquement du point de vue électrique sous la forme d'une résistance R_L (figure 3.11).

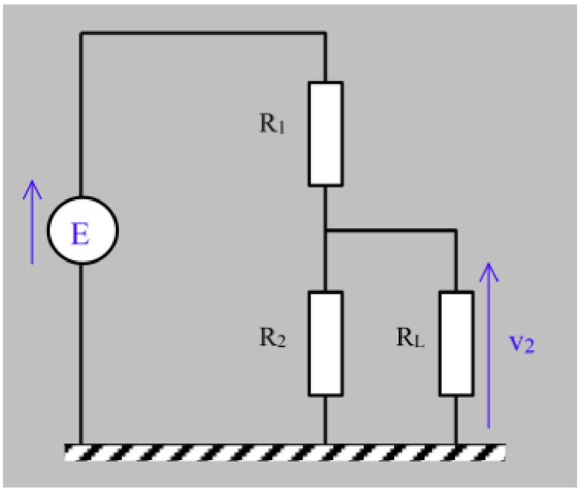

FIGURE 3.11 – diviseur résistif chargé

Il est fondamental de se rendre compte qu'en connectant une résistance à la sortie du circuit, on le modifie. Ce principe est valable pour tous les circuits qu'on charge ! En particulier ce diviseur résistif, une fois chargé, comporte maintenant une deuxième maille, et trois branches. Le raisonnement et le résultat précédent ne sont donc a priori plus du tout valables.

Le lecteur est encouragé à tenter de résoudre ce nouveau circuit par la méthode canonique. Une nouvelle résolution donne le résultat suivant :

$$v_2 = \frac{R_2 R_L}{R_1 R_2 + R_1 R_L + R_2 R_L} E \tag{3.17}$$

alors que la tension de sortie à vide était :

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \tag{3.18}$$

Résolution du circuit chargé par équivalence parallèle

Une alternative beaucoup plus rapide à la résolution complète du circuit chargé consiste à utiliser une équivalence parallèle. Les résistances R_2 et R_L sont en effet soumises à la même ddp (v_2) donc elles sont en parallèle. Ceci va nous permettre d'illustrer la technique proposée au §3.4.

Les résistance R_2 et R_L, puisqu'elles sont en parallèle, forment ensemble un dipôle. Pour peu que nous ne nous intéressions qu'aux grandeurs électriques *externes* à ce dipôle (ce qui est le cas ici : nous souhaitons calculer v_2), et non à ses grandeurs électriques *internes* (comme le courant circulant dans chacune des deux résistances), on peut remplacer ce couple de résistances par son équivalent parallèle en vue de gagner du temps.
Si on appelle R_p la résistance équivalente de ce dipôle, on sait que :

$$R_P = R_2 // R_L = \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} \tag{3.19}$$

En remplaçant R_2 et R_L par R_P, le circuit ne comporte plus qu'une maille. On obtient donc un schéma identique à celui du diviseur résistif à vide, à la différence que la tension v_2 s'applique maintenant à R_P et non à R_2. Par comparaison avec la formule du diviseur résistif à vide, on peut donc déduire que la tension v_2 vaut :

$$v_2 = \frac{R_P}{R_1 + R_P} E \tag{3.20}$$

A condition d'être un peu rôdé à cette technique, on aurait pu éviter de définir R_P et tout de suite écrire :

$$v_2 = \frac{R_2 // R_L}{R_1 + (R_2 // R_L)} E \tag{3.21}$$

On peut vérifier que ce résultat est bien équivalent à celui obtenu par le calcul complet du diviseur résistif chargé.

N.B. : une fois ce résultat connu, on peut si on le souhaite retrouver les courants dans chacune des résistances R_2 et R_L puisqu'on connaît maintenant la tension v_2.

3.4 Equivalences série et parallèle

Une fois que vous aurez bien assimilé le contenu du paragraphe précédent (vous êtes capable d'appliquer la procédure sans vous perdre en route et vous arrivez au bon résultat), vous pouvez réfléchir aux propriétés ci-dessous : elles peuvent parfois vous permettre d'accélérer les choses, mais attention : elles vous induiront irrémédiablement en erreur si vous les appliquez au mauvais moment…

3.4.1 Résistances en série

Soit un dipôle formé de deux résistances en série (figure 3.12). La ddp totale sur le dipôle vaut la somme des ddps des deux résistances (loi des mailles) :

$$V = V_1 + V_2 = R_1 I + R_2 I \tag{3.22}$$

Le courant étant le même dans les deux résistances (puisqu'elles sont en série), on peut encore écrire :

$$V = (R_1 + R_2) I \tag{3.23}$$

Si on compare ce résultat à la loi d'ohm pour une résistance seule, à savoir

$$V = RI \tag{3.24}$$

on constate que vu de l'extérieur, tout se passe comme si les deux résistances en série étaient équivalentes à une résistance unique de valeur :

$$R_{éq} = R_1 + R_2 \tag{3.25}$$

L'équivalence est la suivante : si on applique une différence de potentiel V à la résistance $R_{éq}$ ou aux deux résistances R_1 et R_2 en série, le courant absorbé par le dipôle sera le même dans le deux cas. Vu de l'extérieur du dipôle, ces deux configurations sont indistinguables. On peut donc remplacer deux résistances (ou plus) en série par une résistance unique dont la valeur est la somme des résistances.

3.4.2 Résistances en parallèle

Lorsque deux résistances sont en parallèle (figure 3.13), ce n'est plus le courant qui est identique mais la ddp auxquelles elles sont soumises. Le courant dans chacune des résistances est donné par la loi d'Ohm :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V}{R_1} \\ I_2 &= \frac{V}{R_2} \end{aligned} \tag{3.26}$$

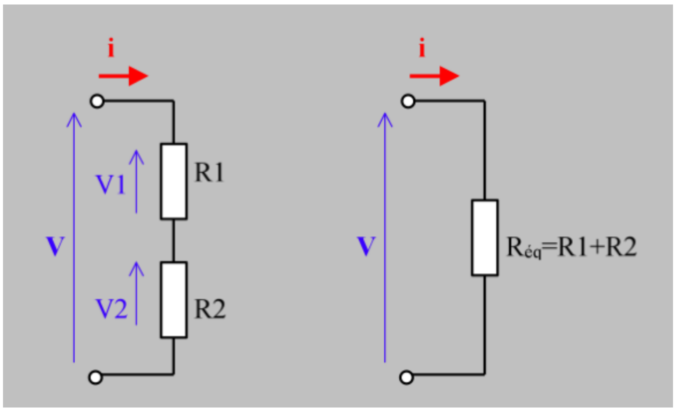

FIGURE 3.12 – résitances en série

Le courant total entrant dans le dipôle vaut la somme des courants dans les deux résistances (loi des noeuds) :

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \tag{3.27}$$

En comparant ce résultat avec la loi d'Ohm pour une résistance unique, on trouve que deux résistances en parallèle peuvent être remplacées par une résistance de valeur :

$$R_{éq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{3.28}$$

résultat qu'on peut noter :

$$R_{éq} = R_1 // R_2 \tag{3.29}$$

En particulier, deux résistances de même valeur en parallèle peuvent être remplacées par une résistance dont la valeur est la moitié d'une des deux résistances initiales.

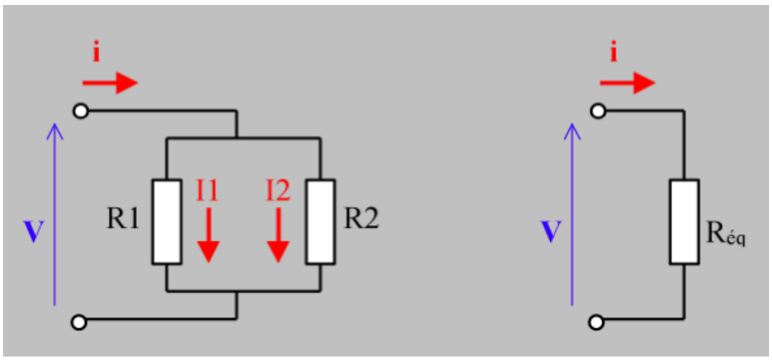

FIGURE 3.13 – résistances en parallèle

3.5 Utilisation des théorèmes de Thévenin/Norton pour résoudre un circuit

3.5.1 Principe général : simplification par équivalent de Thévenin/-Norton

Dans le §3.3.2, nous avons accéléré la résolution d'un circuit (le diviseur résistif) en le simplifiant. La simplification consistait dans ce cas à remplacer deux résistances R_2 et R_L en parallèle par une seule résistance R_P.

Ce principe de simplification peut être généralisé en utilisant l'équivalence de Thévenin (voir section 4). On obtient alors un moyen particulièrement puissant pour accélérer la résolution des circuits.

En effet, d'après le théorème de Thévenin, tout dipôle linéaire (aussi complexe soit-il) peut être remplacé par un circuit équivalent (son "équivalent de Thévenin") comportant une source de tension idéale et une résistance. Ce "remplacement" signifie que vu d'un circuit extérieur, l'équivalent de Thévenin et le circuit initial sont interchangeables : la ddp et le courant à ses bornes ne sont pas modifiés.

Le même principe est également utilisable avec l'équivalent de Norton (constitué d'une source de courant et d'une résistance).

Compte tenu de cette propriété, on peut donc dans un schéma remplacer un sous-ensemble de composants formant un dipôle linéaire [10] par l'équivalent de Thévenin ou Norton de ce sous-ensemble sans perturber le circuit extérieur (c'est-à-dire la partie du schéma qui n'est pas incluse dans le sous-ensemble). On peut ainsi très nettement simplifier le circuit initial et accélérer sa résolution.

Dans un second temps, une fois connues les grandeurs électriques aux bornes de l'équivalent de Thévenin ou Norton, on peut si nécessaire faire la substitution inverse pour calculer les tensions et courants à l'intérieur du sous-ensemble (les tensions et le courant dans le circuit extérieur ne devant pas être recalculés par le principe même de l'équivalence de Thévenin).

Le remplacement de résistances en série ou en parallèle par des résistances uniques de valeur adéquate (§3.4) apparaît en fait comme un simple cas particulier d'une simplification par équivalent de Thévenin.

3.5.2 Suppression des composants inutiles

Compte tenu des lois des dipôles idéaux, on peut s'apercevoir que dans certaines associations de composants, il existe des composants inutiles, c'est-à-dire ne jouant aucun rôle sur les valeurs des grandeurs électriques dans le schéma extérieur. Ces situations sont détaillées ci-dessous.

10. notamment n'importe quelle combinaison de résistances

Résistance en parallèle sur une source de tension

Si dans un schéma on rencontre une résistance en parallèle sur une source de tension idéale, cette résistance peut être supprimée (= remplacée par un circuit ouvert) sans modifier en rien les tensions et les courants dans le reste du circuit [11].

La raison en est la suivante : la présence de la résistance n'influence pas la ddp aux bornes de la source puisqu'une source de tension idéale, par définition, impose strictement la tension à ses bornes. La seule conséquence de la présence de cette résistance est qu'un courant supplémentaire circule localement dans la boucle formée par cette résistance et la source, mais ce courant n'influence en rien le courant dans le reste du circuit.

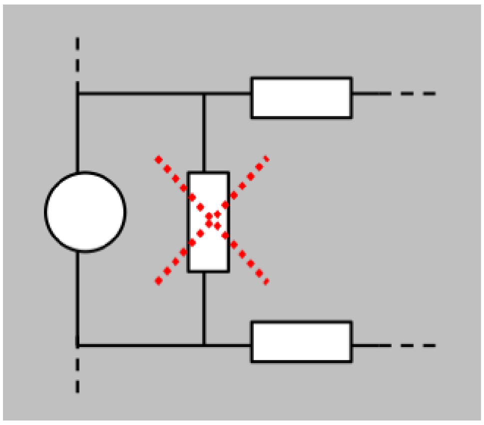

FIGURE 3.14 – une résistance en parallèle sur une source de tension peut être supprimée

Il convient de s'assurer que la résistance est strictement en parallèle sur la source de tension, c'est-à-dire qu'elles sont connectées directement borne à borne.

Résistance en série avec une source de courant

De la même manière, une résistance en série avec une source de courant idéale peut être supprimée (= remplacée par un court-circuit) sans modifier les courants et tensions dans le reste du circuit. Là aussi, il convient de s'assurer que les deux éléments concernés sont strictement en série (c'est-à-dire que le noeud qui se trouve entre la source de courant et la résistance à supprimer n'est connecté à aucun autre élément).

11. pour être exact, le courant circulant dans la source idéale -et rien que ce courant- est modifié. Mais ceci n'a pas d'impact sur le reste du circuit puisque la tension aux bornes de cette source reste identique

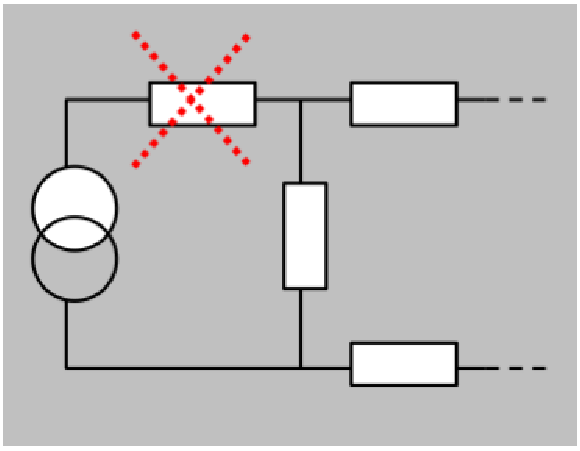

FIGURE 3.15 – une résistance en série avec une source de courant peut être remplacée par un court-circuit

Maille interrompue (circuit ouvert)

Enfin, lorsqu'on rencontre une maille contenant une interruption, c'est-à-dire un circuit ouvert, on peut supprimer tous les dipôles en série avec le circuit ouvert (pour autant qu'on ne s'intéresse pas aux valeurs de tension sur ceux-ci) puisque aucun courant ne peut circuler dans cette maille.

Il faut néanmoins réaliser que cela n'empêche pas certains composants de celle-ci d'être soumis à une différence de potentiel, en particulier :

- le circuit ouvert lui-même,
- les capacités (qui peuvent être chargées suivant l'histoire passée du circuit).

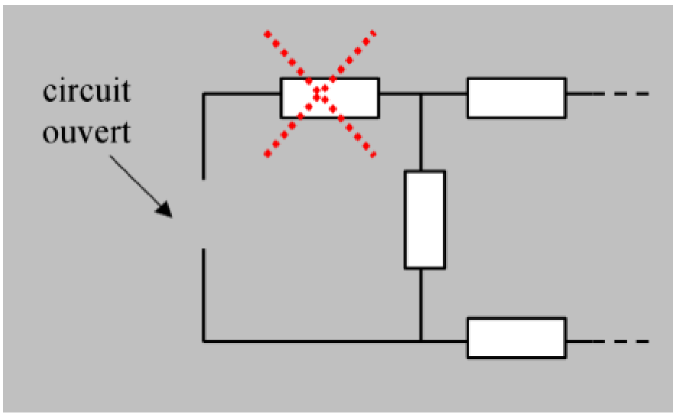

FIGURE 3.16 – suppression d'une branche interrompue

3.5.3 Remarque

On pourra également vérifier ou retrouver les propriétés ci-dessus en utilisant l'équivalent de Thévenin (§4.1.2) des branches concernées. Par exemple, l'équivalent de Thévenin d'une source de tension en parallèle avec une résistance est cette seule source de tension.

3.6 Résolution par intersection des caractéristiques

Une manière totalement différente de résoudre un circuit consiste à utiliser une résolution par intersection des caractéristiques.

Cette méthode n'est utilisable que lorsqu'on considère deux demi-circuits connectés ensemble. C'est le cas par exemple dans les figures 3.17 et 3.18, où une source et une charge sont connectées.

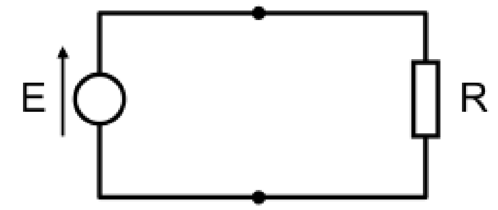

FIGURE 3.17 – circuit formé d'une source et d'une charge

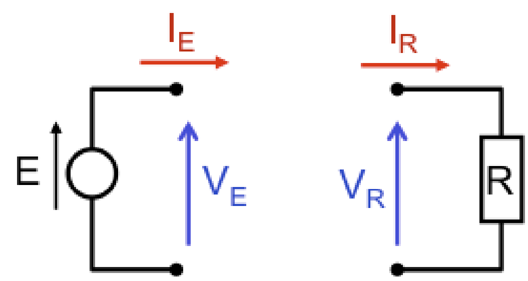

FIGURE 3.18 – le même circuit divisé en deux demi-circuits, avec les conventions adéquates

Néanmoins dans ces figures la source et la charge pourraient chacune représenter un demi-circuit beaucoup plus complexe. La méthode n'est donc pas du tout limitée au circuit ci-dessus.

On peut en fait utiliser la résolution par intersection des caractéristiques :

- soit parce qu'on considère effectivement deux demi-circuits qu'on compte connecter ensemble,
- soit parce qu'on considère un seul circuit qu'on divise par la pensée en deux demi-circuits [12].

Dans les deux cas, la méthode vise à obtenir les valeurs de la tension et du courant à l'interconnexion des deux demi-circuits.

12. et dans ce cas on peut, pour simplifier, remplacer chaque demi-circuit par son équivalent de Thévenin ou Norton

Dans la figure 3.18, on a défini les grandeurs électriques de chaque demi-circuit (ou dipôle) en respectant les conventions générateur et récepteur. Il est important comme toujours de savoir dans quel sens les grandeurs électriques sont définies : l'utilisation des caractéristiques des dipôles suppose en effet implicitement que ces conventions ont été observées. Il va de soi qu'au moment de connecter ensemble ces deux dipôles, il subsistera une seule tension et un seul courant (V_E=V_R et I_E=I_R).

Le principe de la résolution graphique est le suivant : puisque la caractéristique d'un dipôle est le lieu des états électriques possibles pour ce dipôle, la tension et le courant à l'endroit de connexion des deux demi-circuits doit appartenir à la fois à la caractéristique du demi-circuit "gauche" ET à la caractéristique du demi-circuit "droit". On en déduit donc que :

L'état électrique (tension et courant) au point de connexion des deux demi-circuits est le point d'intersection des caractéristiques de ces deux demi-circuits

.

Pour le circuit considéré, ce principe est illustré à la figure 3.19.

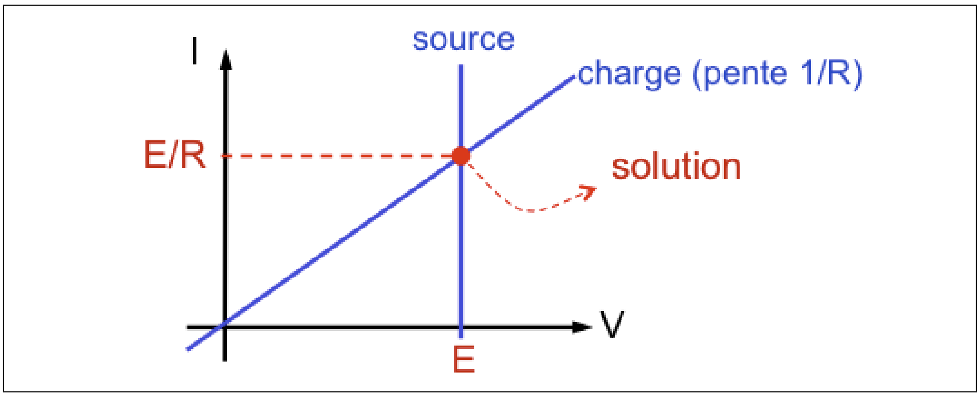

FIGURE 3.19 – résolution graphique par intersection des caractéristiques de deux demi-circuits

En fonction de la forme sous laquelle on dispose des caractéristiques de chaque demi-circuit, on trouvera l'intersection :

- soit analytiquement (si l'on dispose de la loi de chaque demi-circuit)
- soit graphiquement (si l'on dispose des caractéristiques sous forme de graphe)

Pour de nombreux composants, en particulier non linéaires, il n'est pas rare que le comportement soit effectivement décrit sous forme de graphe dans la notice du fabricant. Lorsque le comportement électrique est un peu complexe, un graphe est en effet dans de nombreuses situations plus précis qu'une formule mathématique. En électronique, on utilisera donc effectivement parfois la résolution graphique.

Le principe même de cette méthode consiste à diviser le circuit en *deux*. Il peut être très tentant, lorsqu'on considère un circuit à trois composants de tracer… trois caractéristiques. Et il est alors extrêmement probable qu'on ne trouve aucune intersection. Au contraire, même si l'on dispose des caractéristiques de chaque composant, ce qu'il faut faire c'est diviser le circuit en *deux*, quitte à calculer la caractéristique de l'un ou l'autre demi-circuit.

3.7 Théorème de superposition

Le théorème de superposition a pour intérêt de simplifier le calcul d'un circuit contenant plusieurs sources de tension et/ou de courant. Pour l'appliquer il faut néanmoins que le circuit soit linéaire [13].

3.7.1 Rappel : circuits linéaires

Un circuit est dit linéaire lorsque tous ses éléments sont linéaires, c'est-à-dire que les résistances, inductances, capacités et sources sont des constantes (c'est-à-dire ne dépendent pas de la tension ni du courant). Pour plus de détails : voir section 2.8.

3.7.2 Théorème de superposition

Le théorème de superposition s'énonce comme suit :

Dans un circuit linéaire contenant *plusieurs sources,*
on peut calculer le circuit pour chacune des sources
comme si elle était seule,
puis sommer toutes les contributions de tension et de courant ainsi obtenues pour trouver le résultat final

Comment procéder en pratique ?

Dans une première étape, il suffit *pour chacune des sources du circuit initial* de redessiner le circuit en "supprimant" toutes les autres sources puis de calculer le sous-circuit ainsi obtenu.

"Supprimer" une source signifie :

- la remplacer par un court-circuit si c'est une source de tension
- la remplacer par un circuit ouvert si c'est une source de courant

L'intérêt de la méthode vient du fait que les sous-circuits peuvent être généralement fortement simplifiés (et donc calculés très rapidement) puisqu'ils contiennent beaucoup de circuits ouverts et de court-circuits.

Dans une seconde étape lorsque tous les sous-circuits ont été résolus, il suffit de sommer, pour chaque composant, les tensions obtenues dans tous les sous-circuits pour trouver la tension dans le circuit initial (idem pour les courants).

Le fait que la contribution de chaque source peut être calculée de manière indépendante est une propriété générale des systèmes d'équations linéaires, quel que soit le domaine concerné.

3.7.3 Exemple

Reprenons l'exemple du circuit déjà calculé par la méthode de base (§3.5) : il est linéaire (tous les éléments sont constants) et comprend deux sources.

13. En particulier, la diode, que nous verrons par la suite, est un composant non linéaire. Il est donc erroné d'appliquer le théorème de superposition à des circuits comprenant des diodes.

Les figures 3.20 et 3.21 montrent les deux sous-circuits obtenus en supprimant respectivement la source de courant (remplacée par un circuit ouvert) et la source de tension (remplacée par un court-circuit) :

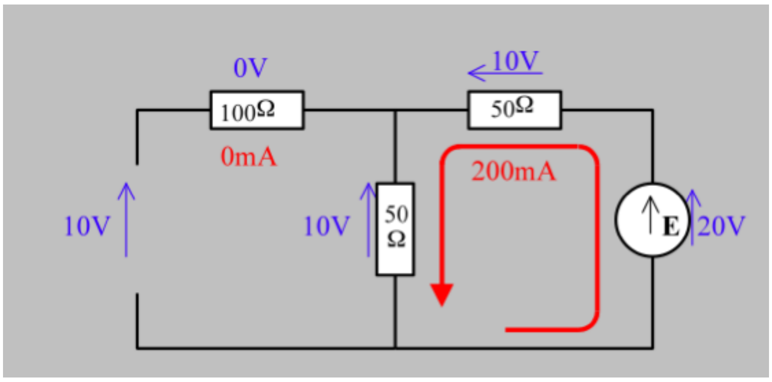

FIGURE 3.20 – sous-circuit obtenu en supprimant la source de courant

Le sous-circuit de la figure 3.20 peut être calculé de la manière suivante :

- aucun courant ne circule dans la maille de gauche (circuit ouvert), la ddp sur la résistance de 100Ω est donc nulle ;
- le courant dans la maille de droite (le seul courant du problème) vaut 20V/(50Ω+50Ω)=200mA. Chacune des résistances de 50Ω voit donc 200mAx50Ω = 10V ;
- comme la ddp sur la résistance de 100Ω est nulle, la ddp reprise par le circuit ouvert est identique à la ddp existant sur la branche centrale [14] : 10V.

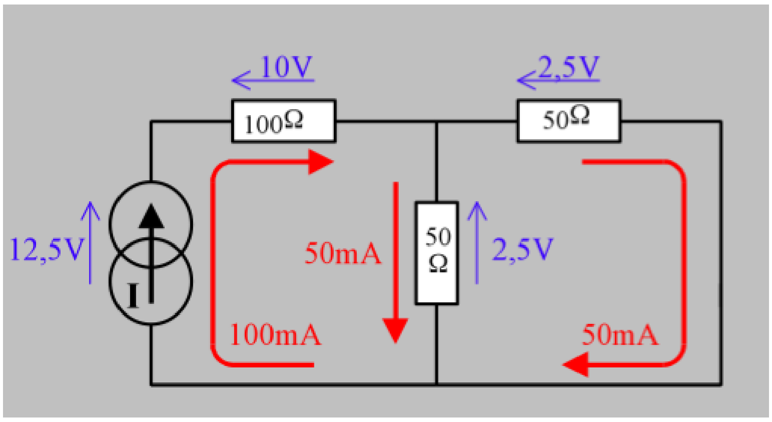

FIGURE 3.21 – sous-circuit obtenu en supprimant la source de tension

Le second sous-circuit (figure 3.21) peut être calculé de la manière suivante :

14. oublier cette étape, c'est-à-dire oublier qu'il existe une ddp sur le circuit ouvert, mènerait évidemment à un résultat final faux. On voit ici un exemple typique d'une situation où on aurait erronément tendance à penser que "tout est nul" sur un circuit ouvert.

- à droite du schéma, les deux résistances de 50Ω sont en parallèle, elles peuvent donc être remplacées par une résistance de valeur moitié (25Ω) qui est elle-même en série avec la résistance de 100Ω et la source de courant ;
- en appliquant la loi d'ohm, on trouve respectivement sur ces deux résistances des tensions de 10V (100mAx100Ω) et de 2,5V (100mA x 25 Ω) ;
- cette dernière tension de 2,5V est en fait celle qui existe sur chacune des résistances de 50Ω (puisqu'elles sont en parallèle), chacune de ces résistances de 50Ω voit donc un courant de 50mA ;
- enfin la tension vue par la source de courant peut être trouvée par la loi des mailles : 10V+2,5V = 12,5V.

On peut vérifier qu'en additionnant les tensions et courants des deux figures ci-dessus pour chaque composant (fig. 3.22), on retrouve bien les valeurs qui avaient été obtenues par la méthode canonique (fig. 3.5).

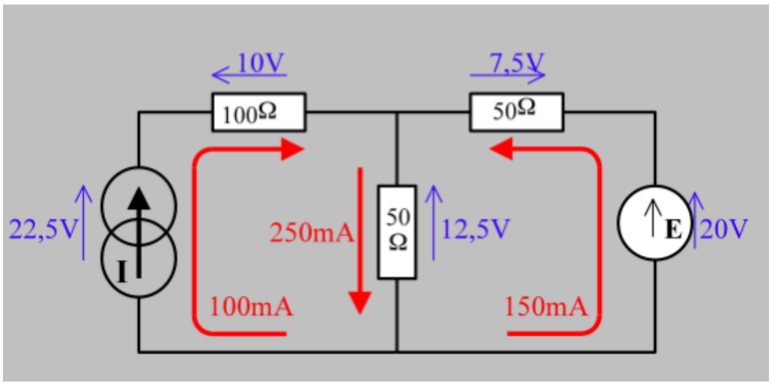

FIGURE 3.22 – résultat final

Chapitre 4

Equivalence de Thévenin et adaptation d'impédance

L'électronique est un grand jeu d'assemblage consistant à associer des composants pour créer des montages, puis ces montages pour créer des montages encore plus complexes, etc.

Or on ne peut pas connecter des composants ou des équipements n'importe comment : il convient de respecter certains critères.

Dans ce contexte, la notion d'*équivalence au sens de Thévenin* joue un rôle fondamental puisqu'elle permet de décrire très simplement le comportement électrique d'un circuit, vu du circuit extérieur (circuit auquel on le connecte), et d'ainsi dériver les critères qui permettent de prédire ce que sera le résultat de la connexion des deux circuits. En d'autres termes, la notion d'équivalent de Thévenin permet de prédire si un assemblage de deux circuits va "fonctionner"... ou non.

Accessoirement, l'équivalence au sens de Thévenin permet également de dégager quelques techniques spécifiques pour faciliter la résolution des circuits.

Ce chapitre est organisé comme suit :

- la section 4.1 définit la notion de *circuits équivalents* et introduit les théorèmes de Thévenin et Norton ;
- la section 4.2 introduit les notions d'*impédance d'entrée* et *de sortie*, qui apparaissent comme des propriétés fondamentales de tout circuit électronique ;
- la section 4.3 explique la problématique de l'*adaptation d'impédance* et dégage les critères permettant de vérifier si deux circuits peuvent être connectés ou non ;
- enfin la section 4.4 revisite la problématique de la mesure d'une tension ou d'un courant sous l'angle de l'adaptation d'impédance.

4.1 Circuits équivalents et théorèmes de Thévenin/Norton

4.1.1 Equivalence de deux circuits

Définition

C'est la notion centrale de ce chapitre :

Deux circuits sont équivalents s'ils possèdent la même caractéristique

La caractéristique traduisant le comportement aux bornes du circuit, ceci revient à dire que :

Deux circuits sont équivalents s'ils possèdent le même comportement électrique (vu du circuit extérieur)

Exemple : résistances en série et en parallèle

Le principe disant qu'on peut remplacer deux résistances en série par la somme de celles-ci est bien connu :

$$R_{serie} = R_1 + R_2 \tag{4.1}$$

Similairement, on peut remplacer deux résistances en parallèle par une résistance de valeur :

$$R_{parallele} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{4.2}$$

La raison pour laquelle on peut faire ces remplacements est qu'une résistance de valeur R_{serie} ou $R_{parallele}$ offre le même comportement, vis-à-vis du circuit extérieur, que le circuit initial (R_1 et R_2 en série ou en parallèle). Les calculs détaillés sont faits à la section 3.4.

On peut encore vérifier que chaque résistance ainsi calculée possède la même caractéristique que le circuit qu'elle remplace.

Remarques sur la notion d'équivalence

L'équivalence dont il est question ci-dessus (autant pour la définition générale que pour le cas particulier des résistances en série ou en parallèle) est une **équivalence au sens de Thévenin**.

Elle doit précisément être interprétée comme le fait que deux circuits ont le même comportement électrique externe (= vu du circuit extérieur), alors que leur schéma interne est différent.

Elle revient à dire que ces circuits sont *interchangeables*, vu du circuit extérieur : si l'on remplace un circuit par un autre circuit qui lui est équivalent au sens de Thévenin, les valeurs de courant et de tension aux bornes de ce circuit et dans le circuit extérieur resteront inchangées.

En remplaçant deux résistances en série ou en parallèle par les valeurs données ci-dessus, on fait donc, souvent sans le savoir, une équivalence au sens de Thévenin.

4.1.2 Théorème et équivalent de Thévenin

Enoncé du théorème de Thévenin

Le **théorème de Thévenin** peut s'énoncer comme suit :

Tout circuit linéaire comportant deux bornes d'accès[1] peut se modéliser sous la forme d'un dipôle formé d'une source de tension idéale E_{th} en série avec une résistance R_{th} (ou plus généralement une impédance Z_{th}).

Dans la figure 4.1, le circuit de droite est lui-même appelé **équivalent de Thévenin**.

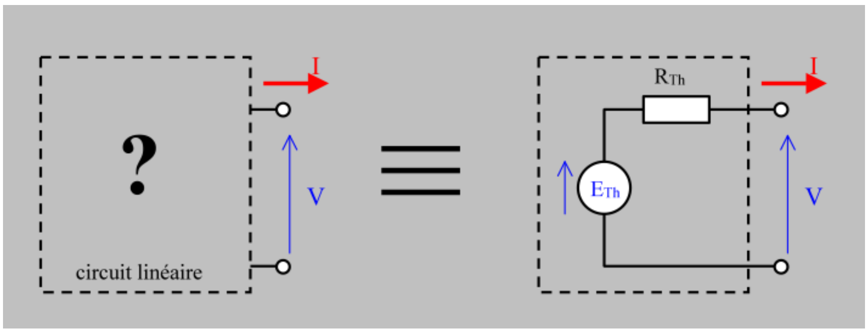

FIGURE 4.1 – illustration du théorème de Thévenin (à droite : équivalent de Thévenin)

L'équivalence est celle que nous venons de définir au §4.1.1 : le circuit initial et l'équivalent de Thévenin ont la même caractéristique dans le plan (I, V). En d'autres termes, ils ont le même comportement électrique vu de l'extérieur : pour une tension donnée V, le courant I délivré ou absorbé est identique pour les deux circuits.

A noter :

- puisque le circuit joue le rôle de source, on utilise pour celui-ci la convention générateur
- tel que dessiné à la figure 4.1, le circuit semble ouvert, mais on suppose implicitement que celui-ci va être connecté à un circuit extérieur et qu'il délivre donc un courant non nul.

1. Cette condition sur les bornes d'accès n'est pas réellement restrictive : le théorème de Thévenin s'applique en fait entre deux noeuds quelconques d'un circuit linéaire.

Justification du théorème de Thévenin

La loi des mailles permet de trouver facilement la caractéristique du dipôle formant l'équivalent de Thévenin (circuit de droite de la figure 4.1). Compte tenu du sens choisi pour le courant, on obtient :

$$V = E_{th} - R_{th} I \tag{4.3}$$

En supposant que R_{th} et E_{th} sont des constantes, il s'agit bien d'une droite dans le plan (I, V). Elle possède la caractéristique suivante :

$$I = -\frac{V}{R_{th}} + \frac{E_{th}}{R_{th}} \tag{4.4}$$

c'est-à-dire (fig. 4.2) :

- une pente $\frac{-1}{R_{th}}$
- une ordonnée à l'origine $\frac{E_{th}}{R_{th}}$

Or pour autant que le circuit initial ne soit composé que d'éléments linéaires, sa caractéristique est également une droite. Comme l'équivalent de Thévenin comprend deux paramètres à fixer (E_{th} et R_{th}), il est toujours possible, quelle que soit la complexité du circuit de départ, de trouver des valeurs de E_{th} et R_{th} qui font correspondre la caractéristique de l'équivalent de Thévenin à celle du circuit linéaire initial.

On peut en particulier utiliser les croisements de la caractéristique avec les axes pour identifier les deux circuits :

- l'intersection de la caractéristique avec l'axe des abscisses se fait à la valeur E_{th}
- l'intersection de la caractéristique avec l'axe des ordonnées se fait à la valeur $\frac{E_{th}}{R_{th}}$

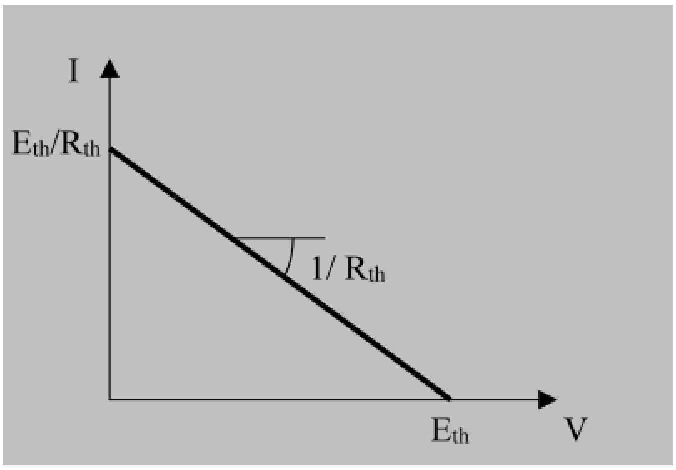

FIGURE 4.2 – caractéristique de l'équivalent de Thévenin de la figure 4.1

Interprétation

L'intérêt du théorème de Thévenin est qu'il permet de réduire un circuit complexe à un circuit beaucoup plus simple dont le comportement extérieur est identique. Cette propriété va s'avérer primordiale au moment d'examiner comment connecter ensemble différents appareils (section 4.3).

Par contre, en passant à l'équivalent de Thévenin on perd l'information concernant ce qui se passe à l'intérieur du circuit initial (mais on peut y revenir une fois connues les grandeurs électriques aux bornes de celui-ci).

Exemple : retour sur le diviseur résistif

Reprenons le schéma du diviseur résistif (§3.3), en considérant comme bornes d'accès les noeuds situés de part et d'autre de R_2.

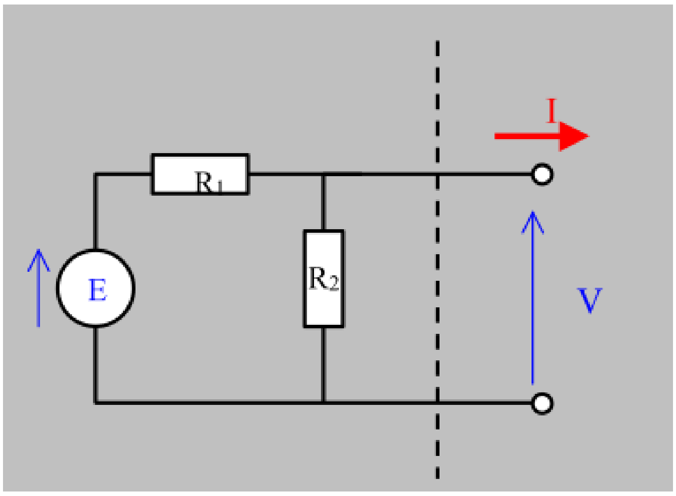

FIGURE 4.3 – diviseur résistif

Calculons sa caractéristique, en supposant que le circuit est chargé par une résistance inconnue à ce stade (courant I non nul). La figure 4.4 indique les courants et tensions considérés pour le calcul (conformément à la "procédure de base" de la section 3.2) :

En exprimant la loi des mailles et la loi des noeuds, nous obtenons les équations du circuit :

$$\begin{aligned} i_1 - I - i_2 &= 0 \\ E - R_1 i_1 - R_2 i_2 &= 0 \\ V = v_2 &= R_2 i_2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

dont on tire l'expression de la caractéristique, c'est-à-dire la relation entre V et I :

$$V = \frac{R_2}{R_1 + R_2}(E - R_1 I) \tag{4.6}$$

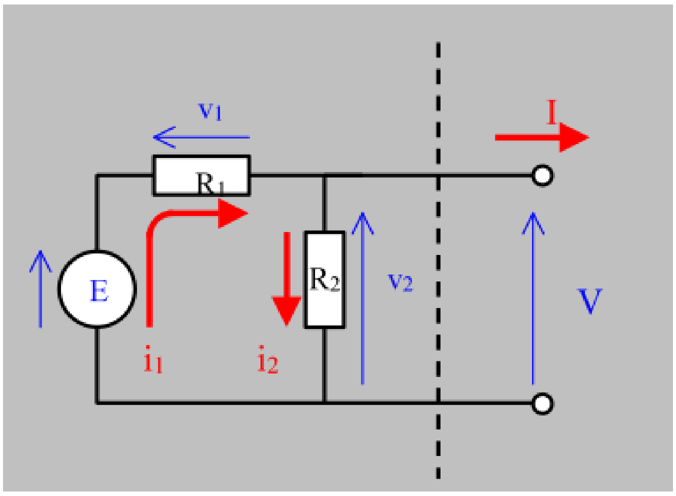

FIGURE 4.4 – diviseur résistif

par identification avec la caractéristique de l'équivalent de Thévenin donnée plus haut (éq. 4.3), on tire :

$$\begin{aligned} E_{th} &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \\ R_{th} &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 // R_2 \end{aligned} \tag{4.7}$$

L'équivalent de Thévenin de ce circuit est donc le circuit de la figure 4.5. Du point de vue du circuit extérieur, ces deux circuits sont interchangeables : remplacer l'un par l'autre n'altère pas les valeurs de I et V.

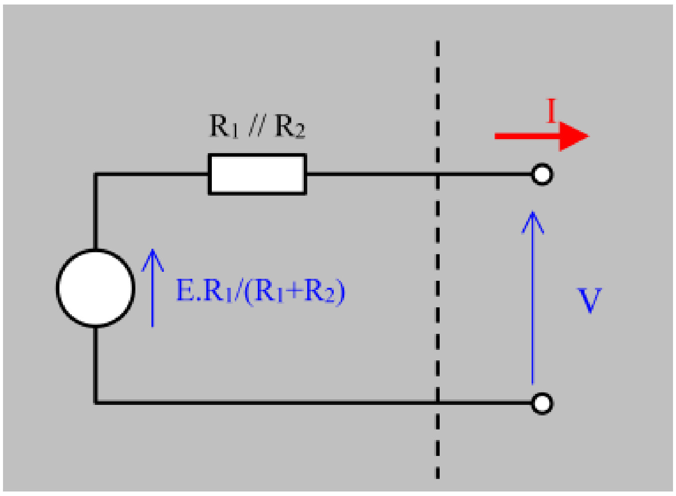

FIGURE 4.5 – équivalent de Thévenin du diviseur résistif

4.1.3 Théorème et équivalent de Norton

Enoncé du théorème de Norton

Le théorème de Norton est une variante du théorème de Thévenin, utilisant cette fois une source de courant :

Tout circuit 1-port linéaire peut se modéliser sous la forme d'un **équivalent de Norton**, c'est-à-dire d'un dipôle formé d'une source de courant J_N *en parallèle* avec une résistance R_N (ou plus généralement une impédance Z_N).

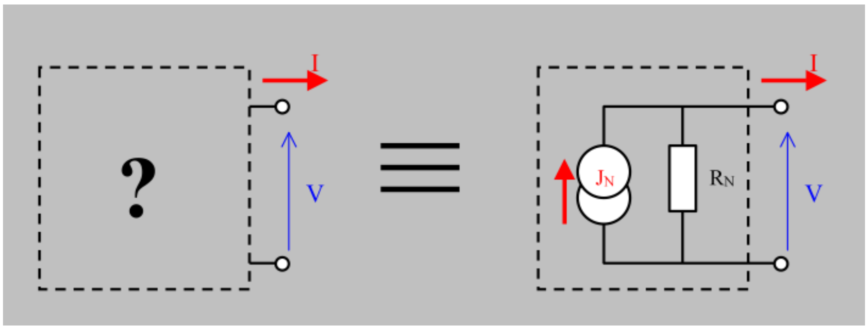

FIGURE 4.6 – illustration du théorème de Norton (à droite : équivalent de Norton)

La justification est identique à celle du théorème de Thévenin :

En supposant que R_N et J_N sont des constantes, la caractéristique de l'équivalent de Norton est bien une droite :

$$V = R_N(J_N - I) \tag{4.8}$$

Dans le plan (I, V), elle s'écrit :

$$I = -\frac{V}{R_N} + J_N \tag{4.9}$$

c'est-à-dire qu'elle possède :

- une pente $\frac{-1}{R_N}$
- une ordonnée à l'origine J_N

En choisissant judicieusement les valeurs de J_N et R_N, cette droite peut être identifiée à la caractéristique de tout circuit linéaire, aussi complexe soit il.

4.1.4 Remarque : sources idéales

Par rapport à l'équivalent de Thévenin et l'équivalent de Norton, la source de tension idéale et la source de courant idéale peuvent être considérées comme deux cas extrêmes. En effet :

Une source de tension idéale

- correspond à un équivalent de Thévenin dont la résistance R_{th} est nulle
- ne peut être identifiée à un équivalent de Norton (la caractéristique de celui-ci ne peut en effet être une droite verticale, à moins d'être confondue avec l'axe des ordonnées)

Une source de courant idéale
- correspond à un équivalent de Norton dont la résistance R_N est infinie
- ne peut être identifiée à un équivalent de Thévenin (la caractéristique de celui-ci ne peut en effet être une droite verticale, à moins d'être confondue avec l'axe des ordonnées)

Ceci explique également qu'on choisira de préférence :
- pour représenter un circuit initial qui a préférentiellement un comportement de source de tension (caractéristique proche d'une verticale) un équivalent de Thévenin,
- pour représenter un circuit initial qui a préférentiellement un comportement de source de courant (caractéristique proche d'une horizontale) un équivalent de Norton.

4.1.5 Equivalence entre équivalents de Thévenin et de Norton

Nous avons expliqué ci-dessus que :
- à tout dipôle linéaire (sauf la source de courant idéale) correspond un équivalent de Thévenin composé d'une source E_{th} et d'une résistance R_{th} possédant la même caractéristique
- à tout dipôle linéaire (sauf la source de tension idéale) correspond un équivalent de Norton composé d'une source J_N et d'une résistance R_N possédant la même caractéristique

Sauf cas des sources idéales, tout dipôle linéaire possède donc bien *deux* circuits équivalents au sens de Thévenin (son équivalent de Thévenin et son équivalent de Norton) et ceux-ci sont forcément équivalents entre eux puisque interchangeables avec le circuit initial.

Lorsqu'on connaît un des équivalents, il est aisé de trouver l'autre. Les deux équivalents sont en effet liés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} R_{th} &= R_N \\ E_{th} &= R_N J_N \end{aligned} \tag{4.10}$$

Ces relations peuvent être trouvées en identifiant les caractéristiques des deux équivalents. Elles sont faciles à retenir :
- les résistances R_{th} et R_N sont identiques
- pour passer d'une source à l'autre, il suffit d'appliquer une pseudo [2]-loi

2. ce n'est pas vraiment une loi d'Ohm puisqu'elle lie des grandeurs électriques issues de deux circuits différents

d'Ohm : la tension est le produit du courant par la résistance.

Insistons sur la première propriété :

L'équivalent de Thévenin et l'équivalent de Norton d'un même dipôle linéaire possèdent la même résistance

Cette "équivalence des équivalents", utilisée alternativement dans un sens et dans l'autre en combinaison avec les formules de mise en série et en parallèle de résistances, peut être très utile pour résoudre des schémas électriques. A ce titre, elle doit figurer dans l'arsenal des "accélérateurs" utilisables pour calculer un circuit.

Note sur le calcul de l'équivalent de Thévenin par le principe de superposition

Au §3.5, nous avons indiqué que le théorème de superposition permet de résoudre plus facilement un circuit en considérant séparément chacune des sources.

D'autre part, on peut parfois être amené à extraire l'équivalent de Thévenin d'un circuit à partir de son schéma (ce que nous venons de faire pour le diviseur résistif). Dans le cas où le circuit comprend plusieurs sources, on peut utiliser le théorème de superposition. On se retrouve alors avec un équivalent de Thévenin pour chaque source du circuit initial. Comment recombiner tous ces équivalents ? Et en particulier : comment combiner les résistances de tous ces équivalents ?

On peut démontrer que les résistances R_{th} des sous-circuits sont toutes identiques et que la valeur obtenue est encore celle de la résistance de l'équivalent de Thévenin du circuit complet : il n'y a donc pas de recombinaison à effectuer (on peut se contenter d'additionner les fem de chaque sous-circuit). Cette propriété est utile à connaître lorsqu'on est confronté en fin de calcul à cette situation un peu délicate.

4.2 Impédance d'entrée, impédance de sortie (et fem à vide)

Le terme d'impédance sera fondamentalement défini au prochain chapitre. En attendant cela, nous introduirons les concepts de ce chapitre-ci en parlant de résistance d'entrée et de résistance de sortie. Le lien avec la notion d'impédance sera brièvement fait au §4.2.6.

4.2.1 Equivalent de Thévenin d'un dipôle charge : résistance d'entrée

Considérons un appareil supposé recevoir une tension via une paire de bornes d'entrée. Cet appareil peut être vu comme un dipôle charge.

S'il est linéaire, il lui correspond un circuit équivalent de Thévenin possédant le même comportement électrique. Puisqu'il s'agit d'une charge, on peut même supposer qu'il ne délivrera pas lui-même une tension sur ses bornes. On peut donc a priori réduire son équivalent de Thévenin à la seule résistance R_{th}, que nous renotons R_{in} dans ce cas particulier.

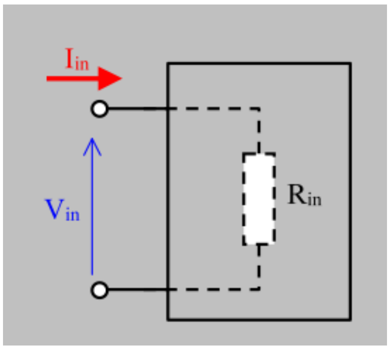

FIGURE 4.7 – Modélisation de l'entrée d'un appareil par son équivalent de Thévenin (résistance d'entrée)

La **résistance d'entrée** R_{in} d'un dipôle charge linéaire est la valeur de la résistance équivalente (au sens de Thévenin) à ce dipôle.

En d'autres termes, la résistance d'entrée d'un dipôle est :

- la valeur de la résistance de l'équivalent de Thévenin du dipôle
- l'inverse de la pente de la caractéristique de ce circuit
- la résistance par laquelle on peut remplacer ce circuit sans modifier le fonctionnement du circuit extérieur

(toutes ces définitions étant équivalentes entre elles).

La résistance d'entrée est avant tout un *chiffre* caractérisant le comportement externe du dipôle (ce chiffre ayant les dimensions d'une résistance)

On retiendra encore que :

💣 La résistance d'entrée N'EST PAS (sauf exception rare) *la résistance qui se trouve à l'entrée du circuit.*

Interprétation

La résistance d'entrée permet en fait de décrire très simplement le lien existant entre la tension et le courant à l'entrée du dipôle : par exemple si un dipôle possède une résistance d'entrée de 500Ω, cela signifie simplement que si on lui applique une tension de 10V, le courant qu'il consommera vaudra :

$$I = \frac{10V}{500\Omega} = 20mA \tag{4.11}$$

Cela NE signifie PAS qu'il comprend une résistance de 500Ω.

Quelques valeurs usuelles

Dans un certain nombre de cas, les valeurs de résistance d'entrée sont standardisées. Voici quelques exemples de valeurs usuelles de résistance d'entrée :

- la résistance d'entrée d'un haut-parleur est typiquement de 8Ω ;
- l'entrée "micro" (destinée à recevoir le signal provenant d'un micro) d'une table de mixage a une résistance d'entrée de $1k\Omega$;
- l'entrée "ligne" (destinée à recevoir le signal provenant d'un autre appareil, p.ex. un lecteur MP3) d'une table de mixage a une impédance d'entrée de $47k\Omega$;

La valeur de résistance d'entrée d'un appareil est en principe indiquée par le constructeur dans la notice technique de cet appareil.

4.2.2 Equivalent de Thévenin d'un dipôle source : résistance de sortie et fem à vide

Considérons maintenant le cas d'un dipôle source, c'est-à-dire délivrant un signal via une paire de bornes de sortie. Si le dipôle est linéaire, il peut être modélisé par un circuit équivalent de Thévenin [3].

La **résistance de sortie** d'un dipôle source linéaire est la valeur de la résistance de l'équivalent de Thévenin de ce dipôle.

La **fem à vide** d'un dipôle source linéaire est la valeur de la source de tension idéale de l'équivalent de Thévenin de ce dipôle.

3. puisqu'une sortie délivre un signal, il est cette fois indispensable de garder la source de tension dans l'équivalent de Thévenin

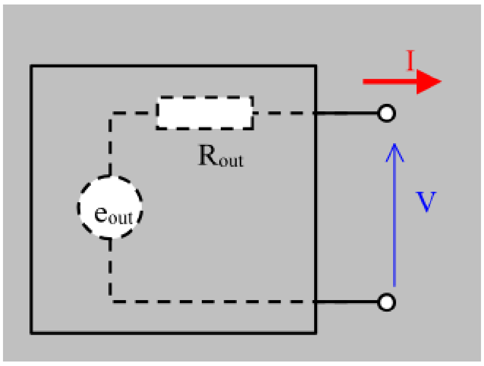

FIGURE 4.8 – Modélisation de la sortie d'un appareil par son équivalent de Thévenin (f.e.m. et impédance de sortie)

Interprétation : influence de la résistance de sortie

La notion de fem à vide est facile à interpréter : il s'agit de la valeur de tension visible à la sortie du dipôle lorsque celui-ci ne délivre aucun courant, et en particulier lorsqu'on le laisse à vide (c'est-à-dire qu'on ne lui connecte aucune charge).

En effet, la tension de sortie du dipôle vaut :

$$V = e_{out} - R_{out} I \tag{4.12}$$

en l'absence de charge le courant est nul et on a donc bien :

$$V = e_{out} \tag{4.13}$$

L'équation 4.12 ci-dessus permet également de comprendre ce que représente la résistance de sortie : lorsqu'un courant I est délivré par le dipôle, la résistance de sortie introduit une chute de tension $R_{out} I$ entre la fem à vide e_{out} et la tension de sortie V. La tension de sortie est donc plus basse que la fem à vide :

La résistance de sortie traduit la difficulté du dipôle à maintenir sa tension de sortie constante lorsque le courant délivré augmente

La résistance de sortie traduit donc typiquement l'imperfection du dipôle par rapport à une source idéale. Pour un dipôle délivrant une tension comme ci-dessus, une résistance de sortie élevée est a priori à considérer comme un inconvénient.

Rappelons que le courant délivré dépendra du circuit extérieur, c'est-à-dire de la charge qu'on connecte à ce dipôle source.

En termes graphiques, par rapport à une source de tension idéale qui présenterait une caractéristique idéale, la résistance de sortie a pour effet d'incliner la caractéristique du dipôle : plus la résistance de sortie est élevée, plus la chute

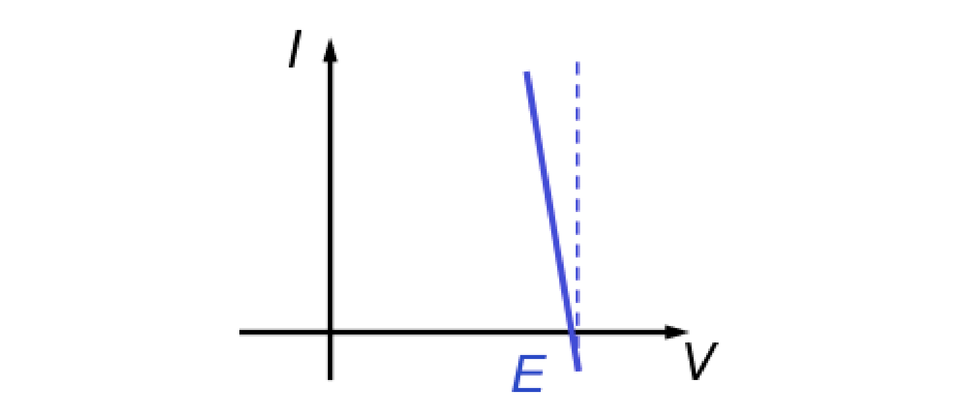

FIGURE 4.9 – influence de la résistance de sortie sur la caractéristique d'une source de tension

de tension est importante et plus la caractéristique s'écarte d'une droite verticale (fig. 4.9).

En effet, dans un plan (I, V), plus la résistance de sortie est élevée, plus la pente de la droite ($\frac{-1}{R_{th}}$) est faible :

$$I = -\frac{V}{R_{th}} + \frac{E_{th}}{R_{th}} \tag{4.14}$$

Comme la résistance d'entrée, la résistance de sortie est une résistance fictive : sauf cas tout-à-fait particulier, elle n'existe pas dans l'appareil concerné mais caractérise via un chiffre (qui a les dimensions d'une résistance) le comportement électrique de celui-ci.

Quelques valeurs usuelles

Dans un certain nombre de cas, les valeurs de résistance de sortie sont standardisées. Voici quelques exemples de valeurs usuelles :

- les générateurs de formes d'onde du laboratoire possèdent une résistance de sortie de 50Ω ;
- la sortie d'un micro dynamique basse impédance possède une résistance de sortie de 150 à 200Ω ;
- la sortie "ligne" d'un appareil audio (destinée à être connectée à l'entrée "ligne" d'un autre appareil audio) possède une résistance de sortie de quelques dizaines d'ohms.

On peut vérifier que ces valeurs sont beaucoup plus faibles que celles des résistances d'entrée données au §4.2.1 (voir aussi §4.3.2 : transmission d'un signal de tension).

4.2.3 Equivalent de Norton d'un dipôle source

Le dipôle source linéaire déjà considéré à la section précédente peut également être modélisé par un circuit équivalent de Norton. Celui-ci comprend une source de courant idéale J et une résistance de sortie R_{out}. Il répond à l'équation :

$$I = J - \frac{V}{R_{out}} \tag{4.15}$$

Comme expliqué au §4.1.5, la résistance de sortie est la même que celle de l'équivalent de Thévenin de ce circuit : elle possède la même valeur. Ici aussi, elle traduit une imperfection du dipôle source par rapport à une source de courant idéale puisqu'elle consomme une partie du courant J, qui ne sera pas délivré en sortie. Cette fois néanmoins, plus la résistance de sortie est *faible*, plus l'imperfection est importante (ce qui correspond au fait qu'une source de courant idéale a une résistance de sortie infinie).

Graphiquement, la résistance de sortie d'un équivalent de Norton a pour effet d'incliner la caractéristique de sortie du dipôle par rapport à la caractéristique horizontale de la source de courant idéale J.

4.2.4 Equivalent de Thévenin/Norton d'un quadripôle

Equivalent de Thévenin d'un quadripôle

De nombreux appareils, puisqu'ils sont censés traiter un signal, comportent une entrée et une sortie. Chacun de ces deux "ports" peut être modélisé par un circuit équivalent de Thévenin comme dans les sections précédentes, de sorte qu'un tel appareil peut être typiquement représenté par le modèle de la figure 4.10.

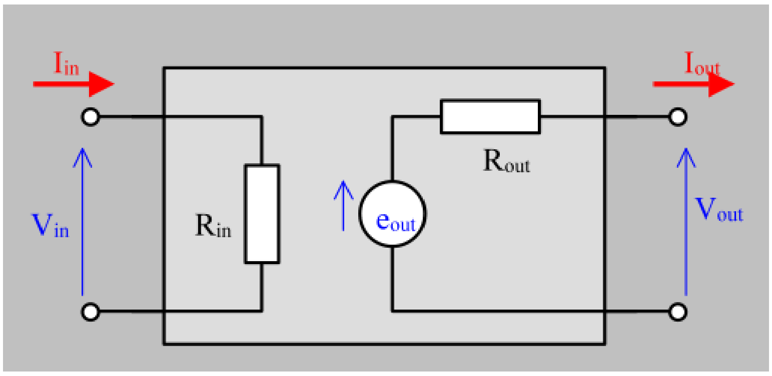

FIGURE 4.10 – schéma équivalent (Thévenin) d'un appareil comprenant une entrée et une sortie

Le comportement externe de l'appareil est complètement caractérisé lorsqu'on connaît trois paramètres :

- sa résistance d'entrée (R_{in})

- sa résistance de sortie (R_{out})
- sa fem à vide (e_{out})

On notera qu'il existe bien entendu cette fois :

- une tension d'entrée (V_{in}) et une tension de sortie (V_{out})
- un courant d'entrée (I_{in}) et un courant de sortie (I_{out})

Il convient de bien distinguer leurs notations pour ne pas les confondre. On définira également très clairement les signes utilisés (a priori : convention récepteur pour l'entrée, convention générateur pour la sortie).

L'existence d'un lien entre l'entrée et la sortie sera modélisé par l'utilisation d'une source de tension commandée (voir §2.7.1), qui fera dépendre la fem à vide des grandeurs électriques d'entrée comme expliqué dans l'exemple ci-dessous.

Amplificateur de tension

Le cas le plus courant est celui de l'amplificateur de tension : considérons le cas d'un quadripôle dont la fonction est de multiplier sa tension d'entrée V_{in} par un gain G. Pour modéliser un tel amplificateur, on utilisera une source de tension commandée en tension répondant à l'équation :

$$e_{out} = GV_{in} \tag{4.16}$$

où G est le gain en tension de l'amplificateur.

Comme on le voit en finale ce n'est pas V_{out} mais e_{out} qui dépend de la tension d'entrée. La résistance de sortie apparaît donc bien comme un élément parasite qui crée une chute de tension entre la valeur idéale (e_{out}) et la valeur réelle de la tension de sortie. Elle traduit la diminution de la tension de sortie lorsque le courant délivré augmente.

Similairement, la résistance d'entrée traduit le fait que le quadripôle consomme un courant non nul lorsqu'on lui applique une tension.

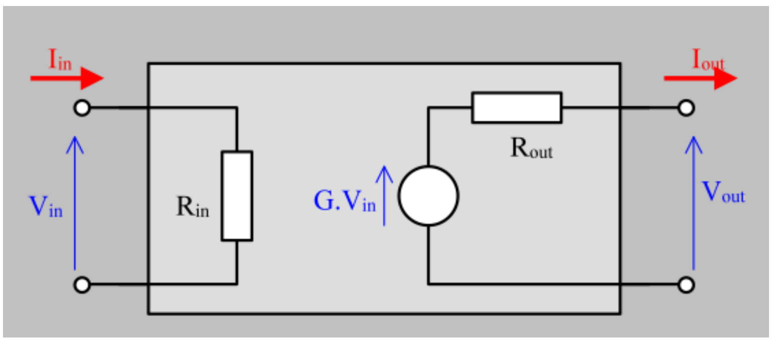

FIGURE 4.11 – schéma équivalent (Thévenin) d'un amplificateur tension-tension

4.2.5 Mesure des paramètres d'un dipôle/quadripôle

Mesure de la résistance d'entrée

Pour mesurer la résistance d'entrée, il suffit d'appliquer une tension aux bornes d'entrée (compatible avec ce que supporte cette entrée), de mesurer le courant correspondant absorbé par l'appareil, et de faire le rapport des deux (loi d'Ohm).

Mesure de la résistance de sortie

La mesure d'une résistance de sortie est un peu plus complexe que celle d'une résistance d'entrée : d'une part parce que l'équivalent de Thévenin comprend cette fois ses deux éléments (résistance et source de tension), d'autre part parce qu'injecter une tension à la sortie d'un appareil pourrait l'endommager.

Fondamentalement, il faut réaliser deux mesures pour identifier la caractéristique de sortie de l'appareil (deux points pour identifier la droite). Un premier point peut être fourni par la mesure de la tension à vide, c'est-à-dire sans rien connecter à la sortie de l'appareil (courant nul). Une mesure de tension à vide, réalisée au moyen d'un voltmètre, donne directement la valeur de la force électromotrice e_{out}.

Mathématiquement, le plus simple serait de prendre comme second point de mesure celui où la tension est nulle. Ceci revient néanmoins à mesurer le courant débité lorsqu'on met la sortie en court-circuit. On perçoit tout de suite que dans la plupart des cas, il ne s'agit pas forcément d'une bonne idée...

Une solution préférable consiste à charger le circuit par une résistance connue (ni trop grande ni trop petite) et à mesurer la tension sur celle-ci. La tension doit être plus faible que la force électromotrice puisque cette fois-ci un courant circule et provoque une chute de tension sur la résistance de sortie. On disposera alors d'un second point de mesure permettant de calculer cette résistance de sortie.

Cette deuxième mesure peut être réalisée sous une forme plus élégante qui permet de se passer de tout calcul. Après avoir mesuré la fem à vide comme précédemment, on branche à la sortie un potentiomètre (résistance variable) en parallèle sur le voltmètre. En partant de la position où le potentiomètre présente la plus grande résistance, on diminue celle-ci jusqu'à ce que la tension de sortie atteigne la moitié de la fem à vide. A cet instant, la valeur du potentiomètre est égale à celle de la résistance de sortie de l'appareil [4] et il n'y a plus qu'à la mesurer à l'ohmmètre sur le potentiomètre (déconnecté du montage).

4.2.6 Notion d'impédance (d'entrée ou de sortie)

Nous avons jusqu'ici utilisé, en parlant des équivalents de Thévenin et Norton, les termes de résistance d'entrée et de résistance de sortie. On trouvera beau-

4. démonstration à essayer à titre d'exercice...

coup plus souvent les termes d'**impédance d'entrée** et **impédance de sortie**, qui sont plus généraux.

Sans entrer ici dans les détails, on peut comprendre le terme d'impédance (qui se note typiquement Z) en retenant que :

- si la résistance (R) traduit un lien proportionnel entre une tension et un courant dans le comportement électrique d'un dipôle,
- l'impédance (Z) traduit un lien qui peut être plus général, et en particulier inclure un déphasage entre les signaux de tension et de courant.

L'**impédance** est donc une généralisation de la résistance au cas où les signaux V et I peuvent être déphasés.

L'impédance suppose de calculer le circuit en utilisant des grandeurs complexes pour la tension et le courant, ce qui sera examiné aux chapitres suivants (§5.3.7). A cette distinction près, tout ce qui a été dit précédemment reste valable. On parlera donc typiquement d'impédance d'entrée Z_{in} et d'impédance de sortie Z_{out} d'un dipôle ou d'un quadripôle.

4.3 Adaptation d'impédance

4.3.1 Connecter deux appareils : pas si simple !

En électronique, on connecte sans arrêt des équipements ou des composants entre eux. Considérons typiquement le cas où on souhaite connecter un appareil "amont" (une source délivrant un signal) à un appareil "aval" (une charge recevant ce signal). Chacun de ces appareils peut typiquement être un quadripôle.

Contrairement à ce qu'on pourrait penser :

On ne peut pas connecter ensemble deux appareils
(et supposer que le montage va fonctionner)
sans vérifier un certain nombre de critères

En premier lieu, il faut vérifier que l'appareil aval supporte les niveaux de tension et de puissance délivrés par l'appareil amont, pour éviter d'endommager l'un des deux appareils. Nous ne nous attarderons pas là-dessus ici.

En second lieu, il faut vérifier l'**adaptation d'impédance**, c'est-à-dire le fait que les résistances (ou plus généralement impédances) d'entrée et de sortie des deux appareils sont "compatibles". Dans le cas contraire, on risque de ne recueillir en aval qu'une toute petite partie du signal qu'on désirait transmettre et le montage ne fonctionnera tout simplement pas.

Les critères permettant de prévoir si le signal sera correctement transmis se basent sur les valeurs des impédances d'entrée et de sortie. Les impédances d'entrée et de sortie apparaissent donc comme des propriétés particulièrement importantes de tout appareil ou équipement électronique puisqu'elles permettent de vérifier le critère d'adaptation d'impédance, c'est-à-dire les possibilités de connexion du composant/équipement avec d'autres composants/équipements.

Les critères à vérifier diffèrent suivant qu'on veut transmettre une tension, un courant ou une puissance.

4.3.2 Adaptation d'impédance en tension

On connecte la sortie d'un appareil "amont" à l'entrée d'un appareil "aval". Chacun des appareils peut être modélisé par son équivalent de Thévenin.

Sur base du circuit formé, on voit que la tension présente à l'entrée de l'appareil aval ne vaut pas e mais plutôt (diviseur résistif : voir §3.3) :

$$V = \frac{R_{in}}{R_{in} + R_{out}} e \tag{4.17}$$

La fraction formée par les résistances étant forcément plus petite que 1, le signal délivré par l'appareil amont est atténué, du simple fait de connecter les deux

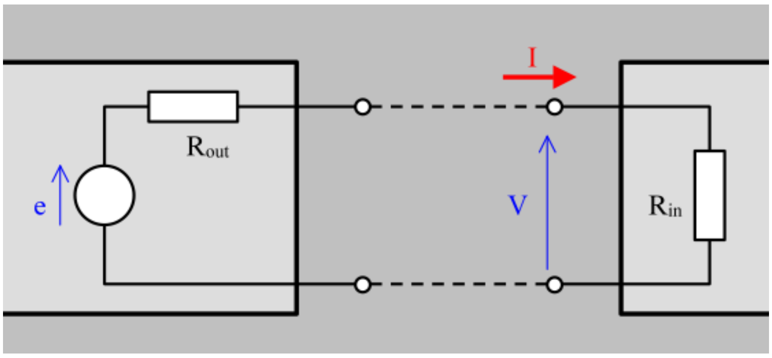

FIGURE 4.12 – connexion entre deux appareils (sortie en tension)

appareils ensemble. Pour éviter une dégradation du signal, il faut éviter cette atténuation autant que possible.

On peut vérifier qu'on obtient une atténuation faible (fraction proche de 1) si l'impédance de sortie est négligeable devant l'impédance d'entrée. On en déduit le **critère d'adaptation d'impédance en tension** :

**Lorsqu'on désire transmettre un signal de tension,
l'impédance de sortie doit être faible
et l'impédance d'entrée élevée**

Le cas idéal est bien sûr obtenu pour une impédance d'entrée infinie et/ou une impédance de sortie nulle.

4.3.3 Adaptation d'impédance en courant

Certains appareils se comportent davantage, du point de vue de leur sortie, comme des sources de courant. On peut alors raisonner en utilisant un équivalent de Norton pour la sortie de l'appareil amont :

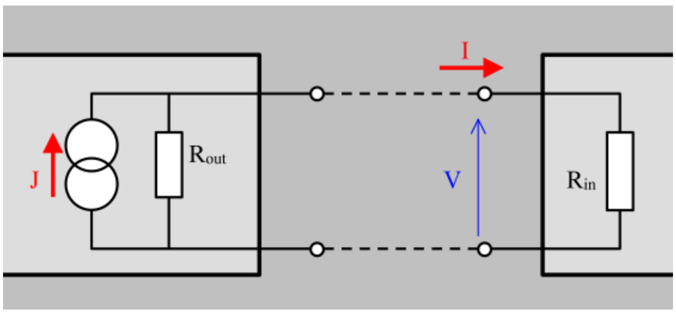

FIGURE 4.13 – connexion entre deux appareils (sortie en courant)

En égalant la tension sur les deux résistances :

$$V = R_{in} I = R_{out}(J - I) \tag{4.18}$$

on trouve l'expression du courant entrant dans l'appareil aval :

$$I = \frac{R_{out}}{R_{in} + R_{out}} J \tag{4.19}$$

L'expression est du même type que précédemment mais c'est cette fois R_{out} qui est au numérateur. En cherchant toujours une atténuation aussi faible que possible, on en déduit le **critère d'adaptation d'impédance en courant** :

Lorsqu'on désire transmettre un signal de courant, **l'impédance de sortie doit être élevée** **et l'impédance d'entrée faible**

Le cas idéal est bien sûr obtenu pour une impédance d'entrée nulle et/ou une impédance de sortie infinie.

Ce critère est donc l'inverse du cas où on souhaite transmettre une valeur de tension.

4.3.4 Adaptation d'impédance en puissance

Enfin il peut arriver qu'on veuille transmettre un maximum de puissance entre deux appareils. C'est notamment le cas entre un amplificateur de puissance (ampli audio) et le haut-parleur qui le suit. Que faut-il faire dans ce cas ?

Reprenons le dessin de la figure 4.12. Le courant dans la charge (R_{in}) vaut :

$$I = \frac{e}{R_{in} + R_{out}} \tag{4.20}$$

La puissance dans cette charge vaut donc :

$$P = R_{in} I^2 = \frac{R_{in}}{(R_{in} + R_{out})^2} e^2 \tag{4.21}$$

On peut montrer que la puissance est maximale lorsque la condition suivante est satisfaite :

$$R_{in} = R_{out} \tag{4.22}$$

En d'autres termes, il faut que l'impédance d'entrée et l'impédance de sortie soient *égales* pour transmettre un maximum de puissance. Dans ces conditions, la puissance reçue par la charge vaut :

$$P = \frac{e^2}{4R_{out}} \tag{4.23}$$

On peut remarquer qu'une même puissance est dissipée sur R_{out} dans l'appareil amont (la tension sur la charge vaut la moitié de la fem e puisque R_{in} et R_{out} sont identiques). Cette puissance n'est en générale pas négligeable : c'est ce qui explique que les amplis de puissance comportent de gros refroidisseurs…

4.4 Cas particulier des appareils de mesure

Connecter un voltmètre ou un ampèremètre pour mesurer une tension ou un courant dans un montage, c'est également connecter deux circuits ensemble ! Cette connexion modifie le circuit initial : il faut donc s'assurer dans chaque cas que la perturbation introduite par l'appareil de mesure est négligeable.

Grâce aux notions que nous avons introduites ci-dessus, on peut analyser la connexion d'un appareil de mesure comme un cas particulier d'adaptation d'impédance. Nous en profitons pour introduire quelques notions supplémentaires.

4.4.1 Noeuds à haute et basse impédance

Impédance d'un noeud

On définit l'**impédance d'un noeud** quelconque d'un circuit comme étant l'impédance de sortie de l'équivalent de Thévenin du circuit entre ce noeud et la masse.

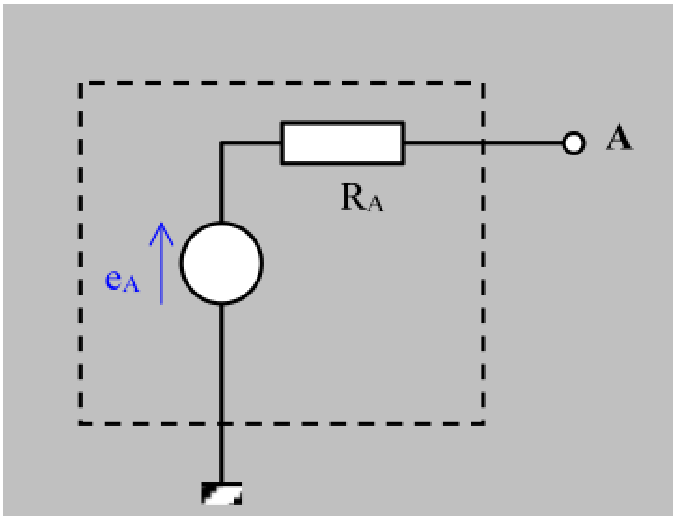

FIGURE 4.14 – R_A est l'impédance du noeud A

Un **noeud à basse impédance** est un noeud dont l'impédance est faible (R_A<100Ω). Un **noeud à haute impédance** est un noeud dont l'impédance est élevée (R_A>100kΩ).

4.4.2 Connexion d'un appareil de mesure

Compte tenu des définitions précédentes, connecter un appareil de mesure se ramène bien à un problème d'adaptation d'impédance en considérant la situation suivante :

- l'appareil amont est le montage, modélisé par son équivalent de Thévenin,
- l'appareil aval est l'appareil de mesure, modélisé par son impédance d'entrée.

Voyons maintenant les critères à appliquer dans chaque cas…

Connexion d'un voltmètre

Lorsqu'on connecte un voltmètre (d'impédance d'entrée R_m) entre deux noeuds d'un montage (fem à vide V_N et impédance R_N), on retrouve donc exactement le problème d'adaptation en tension vu précédemment (§4.3.1). Si V_N correspond à la tension en l'absence de voltmètre, la tension présente entre les deux noeuds devient :

$$V_m = \frac{R_m}{R_m + R_N} V_N \tag{4.24}$$

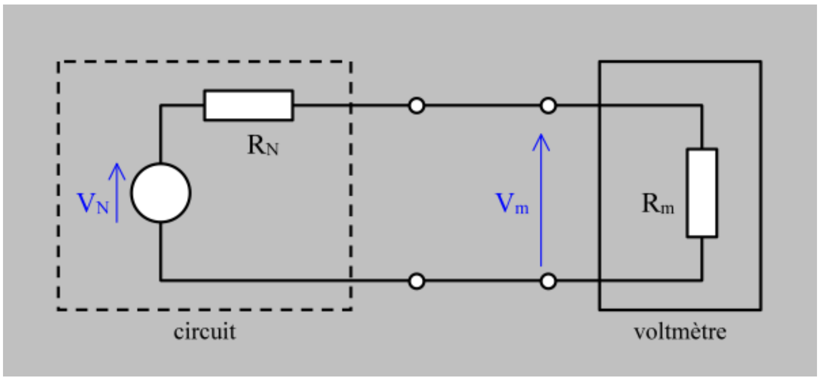

FIGURE 4.15 – modélisation d'une mesure au voltmètre

La même règle que précédemment s'applique : le montage sera peu perturbé (et donc la mesure correcte) si l'impédance d'entrée du voltmètre est beaucoup plus grande que celle existant entre les noeuds où l'on effectue la mesure. Comme on ne connaît pas a priori l'impédance des noeuds du montage, un voltmètre possède donc toujours une impédance d'entrée très élevée ($G\Omega$ et au-delà). On peut même dire qu'on paiera un voltmètre d'autant plus cher que son impédance d'entrée est grande...

Le résultat de la mesure dépend de l'impédance du voltmètre mais également de celle du noeud (R_N) : la tension V_N sera d'autant moins perturbée que l'impédance du noeud est faible. Les noeuds à haute impédance seront donc plus délicats à mesurer au voltmètre que les noeuds à basse impédance (puisque les noeuds à haute impédance auront du mal à satisfaire le critère d'adaptation d'impédance en tension).

Connexion d'un ampèremètre

Comme un ampèremètre se connecte en série, mesurer un courant demande obligatoirement d'interrompre un fil du montage. On peut donc modéliser la connexion d'un ampèremètre en "sortant" momentanément du montage le fil à interrompre et en réduisant le circuit restant à son équivalent de Norton (puisqu'on s'intéresse au courant) :

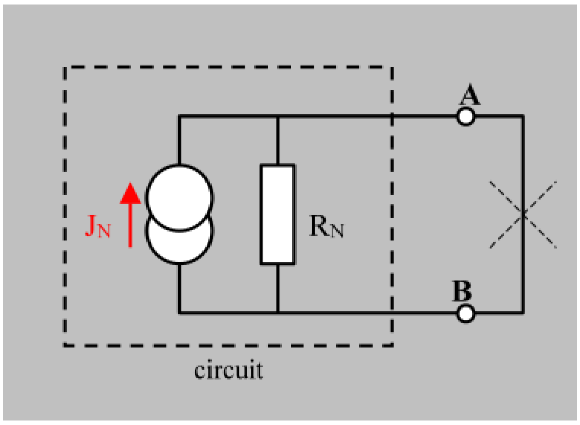

FIGURE 4.16 – équivalent de Norton du circuit où l'on insère un ampèremètre

Il suffit ensuite de remplacer le fil par l'équivalent de Thévenin de l'ampèremètre :

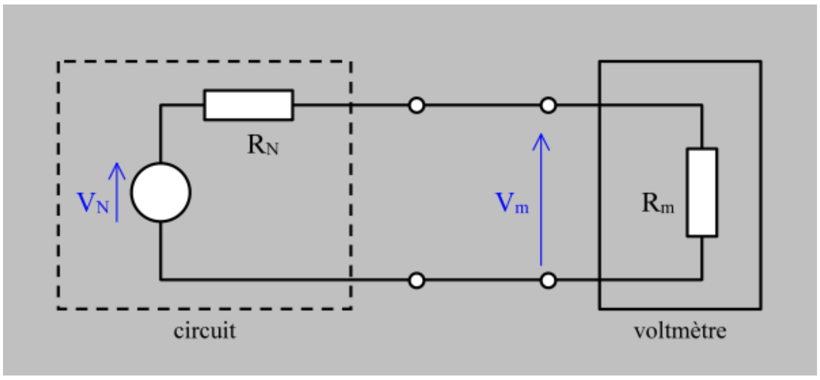

FIGURE 4.17 – modélisation d'une mesure à l'ampèremètre

Le courant passant dans l'ampèremètre vaut :

$$I_m = \frac{R_N}{R_m + R_N} J_N \tag{4.25}$$

On retrouve alors la condition d'adaptation d'impédance en courant : pour réaliser une mesure correcte (= qui ne perturbe pas le circuit initial), il faut que l'impédance d'entrée de l'ampèremètre soit beaucoup plus faible que l'impédance existant entre les noeuds entre lesquels on insère l'ampèremètre. Un ampèremètre possède donc toujours une impédance d'entrée très faible.

Chapitre 5

Composants réactifs

Ce chapitre est entièrement consacré aux composants réactifs : la capacité et l'inductance.

Pour rappel, les composants réactifs ne consomment ou ne génèrent pas de puissance, mais peuvent en stocker momentanément et la restituer ensuite. Cette propriété amène un comportement particulier dans les circuits, puisque le *temps* doit être pris en compte (par opposition aux circuits purement résistifs).

Divers outils mathématiques ont été développés pour appréhender le comportement des éléments réactifs dans les circuits. Ce chapitre introduit progressivement ces outils en les illustrant sur les circuits réactifs de base.

Les sections 5.1 et 5.2 traitent de l'**analyse temporelle** des circuits RC et RL (circuits du premier ordre) respectivement.

Les trois sections suivantes sont consacrées à l'**analyse fréquentielle** :

- la section 5.3 traite des phaseurs et impédances, ainsi que de la notion de valeur efficace,
- la section 5.4 traite de la réponse en fréquence $H(j\omega)$ et de son tracé sous forme de courbes de Bode,
- enfin la section 5.5 est spécifiquement consacrée à la technique du tracé asymptotique des courbes de Bode en utilisant les concepts de pôles et zéros.

De nombreux éléments additionnels ont encore été regroupés sous forme d'annexes dans le chapitre 6.

Le but du regroupement de tous ces éléments liés aux composants réactifs est de montrer que différents formalismes mathématiques se répondent pour former une théorie cohérente. Celle-ci n'est jamais qu'une construction progressive d'outils destinés à permettre d'appréhender plus facilement le comportement des circuits contenant des capacités et des inductances.

5.1 Analyse temporelle : circuit RC

5.1.1 Rappels concernant la capacité

Une capacité est capable d'emmagasiner de l'énergie sous forme de charges électrostatiques. La ddp présente sur une capacité est à tout instant proportionnelle à la charge qui est stockée dans celle-ci :

$$q(t) = Cv(t) \tag{5.1}$$

En se rappelant que le courant est la dérivée temporelle de la charge, cette loi peut également être formulée de la manière suivante :

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{5.2}$$

ou encore (forme intégrale) :

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)d\xi \tag{5.3}$$

💣 Dans ces équations, la grandeur $v(t)$ est la différence de potentiel aux bornes de la capacité, à ne pas confondre avec le potentiel sur l'une ou l'autre des bornes de cette même capacité.

💣 Cette ddp $v(t)$ est bien la somme de *deux* termes : la variation de tension sur la capacité due à la présence d'un courant i (entrant ou sortant) entre l'instant t_0 et l'instant présent t (cette variation est représentée par le terme contenant l'intégrale), et la ddp v_0 initialement présente sur la capacité à l'instant t_0. Cette ddp v_0 résulte d'une éventuelle charge q_0 emmagasinée dans la capacité à l'instant initial selon la relation :

$$v_0 = \frac{q_0}{C} \tag{5.4}$$

Oublier ce dernier terme est une erreur classique à éviter.

Charge et décharge d'une capacité

Une capacité est dite **chargée** dès que sa tension est non nulle. En pratique, cette situation correspond au fait qu'une des armatures de la capacité comprend un surplus d'électrons et l'autre un déficit d'électrons. Les deux armatures pouvant permuter leurs rôles, la tension sur la capacité peut en principe être aussi bien positive que négative [1].

💣 Pour éviter toute équivoque, précisons ce que l'on entend par **décharger** la capacité : on charge une capacité lorsqu'on augmente la valeur absolue de sa tension ; on la décharge lorsqu'on rapproche sa tension de la valeur nulle.

1. Attention, on parle ici de la capacité en tant que dipôle idéal. Certains condensateurs réels (les condensateurs polarisés : voir chapitre 3) ne supportent une tension que dans un seul sens.

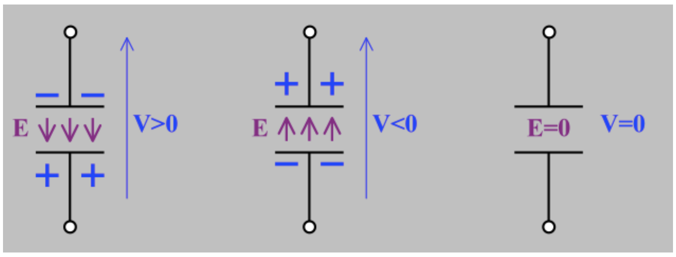

FIGURE 5.1 – capacité chargée positivement (gauche), négativement (centre) et déchargée (droite)

Capacité et courant

Comme il n'existe pas de lien galvanique (c'est-à-dire via un conducteur) entre les deux armatures, la capacité ne laisse pas passer de courant en continu. Par contre, sa charge et sa décharge s'accompagnent bien transitoirement de la circulation d'un courant (puisqu'elles impliquent toutes deux un déplacement de charges électriques).

Deux lois fondamentales

Sur base de la loi de la capacité idéale, deux lois fondamentales ont été dégagées au §2.3.3. Ces lois nous seront extrêmement utiles pour l'analyse temporelle des circuits contenant des capacités (voir ci-dessous) :

loi court terme (ou HF) de la capacité :
aux bornes d'une capacité, la ddp ne peut pas varier instantanément

loi long terme (ou BF) de la capacité :
après un temps très long (ou en moyenne),
le courant dans une capacité est forcément nul

La loi long terme n'implique pas que la ddp soit nulle à long terme sur la capacité : elle peut être constante, de valeur non nulle.

5.1.2 Résolution temporelle du circuit RC : échelon de tension

Comment prévoir le comportement d'un circuit comprenant des capacités ? Considérons le circuit le plus simple : le circuit RC série.

On désire prédire l'évolution temporelle du courant $i(t)$ et des tensions $v_R(t)$ et $v_C(t)$ lorsque, en partant d'une situation où tous les courants et tensions sont nuls, on applique un échelon de tension d'amplitude E à la source.

Cette situation particulière est la **réponse indicielle** du circuit (réponse à un échelon). C'est la situation de référence utilisée pour caractériser l'évolution temporelle d'un circuit.

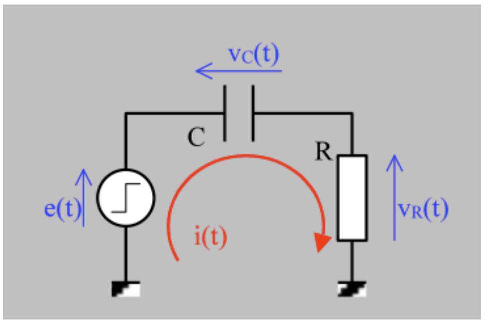

FIGURE 5.2 – circuit RC

Remarquons avant de commencer que pour ce circuit en particulier la loi des mailles nous permet d'écrire :

$$e(t) = v_C(t) + v_R(t) \tag{5.5}$$

On en déduit que les tensions $v_C(t)$ et $v_R(t)$ varient de manière complémentaire l'une de l'autre : leur somme fait toujours $e(t)$ (qui vaut 0 avant l'échelon et E après l'échelon).

D'autre part (loi d'Ohm), le courant $i(t)$ varie, au facteur R près, comme $v_R(t)$.

Résolution analytique

Une première manière de trouver l'évolution temporelle du circuit consiste à résoudre celui-ci analytiquement. Cette résolution, faite en annexe à la fin du chapitre (§6.2), donne les résultats suivants (voir aussi figure 5.3) :

$$\begin{aligned} v_R(t) &= Ee^{\frac{-t}{RC}} \\ i(t) &= \frac{E}{R}e^{\frac{-t}{RC}} \\ v_C(t) &= E\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right) \end{aligned} \tag{5.6}$$

En pratique, la voie analytique se révèle néanmoins comporter plusieurs inconvénients :

- il faut environ 15 à 20 minutes à un étudiant moyen pour refaire le développement qui mène à ces résultats : c'est beaucoup, sans parler du risque d'erreur que ce développement comporte ;
- le développement mathématique se complique nettement dès qu'on ajoute quelques composants au circuit. Le résultat est peu transposable dès que la situation change ;
- enfin il ne donne aucun "feeling" de ce qui se passe réellement dans le circuit. Si l'on commet une erreur au niveau mathématique, celle-ci est difficilement détectable si l'on n'a aucun sens physique des phénomènes.

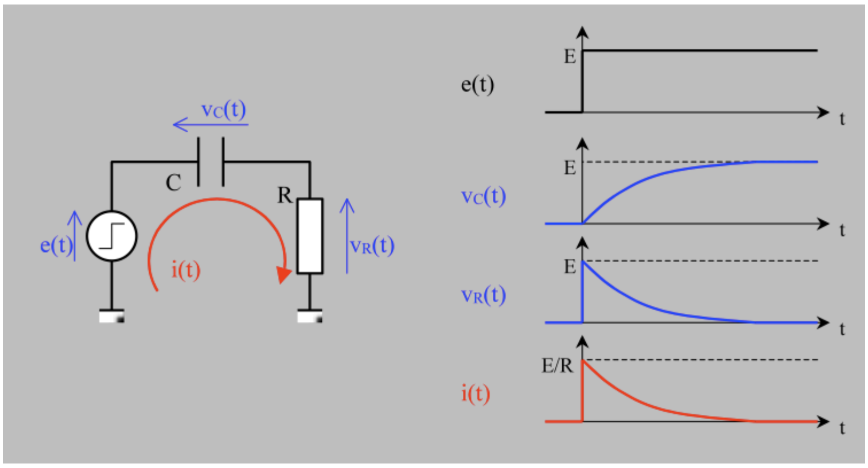

FIGURE 5.3 – évolution des grandeurs électriques dans le circuit RC (échelon de tension)

La voie analytique, tout en restant un moyen de résolution possible, s'avère donc fort limitée en pratique.

Résolution rapide : 1er exemple

Par contre, en utilisant les deux lois données précédemment au §5.1.1 (lois HF et BF de la capa), il est possible d'obtenir les mêmes résultats d'une manière plus rapide. La solution du circuit RC peut en effet être obtenue en analysant son comportement à 3 moments-clés :

1) Avant l'échelon (conditions initiales)
Les conditions initiales du problème (c'est-à-dire ici pour le temps t<0) doivent être précisées dans l'énoncé. On part ici de la situation suivante :

- le courant est nul (si le circuit n'a pas subi d'excitation "depuis longtemps" [2], cette situation est obligatoire vu la loi *long terme* s'appliquant à la capacité) ;
- en conséquence (1) : la ddp v_0 sur la capacité est *constante* (loi de la capacité). On suppose ici de surcroît qu'elle est *nulle* (= condition initiale du problème) ;
- en conséquence (2) : la ddp sur la résistance est nulle (loi d'Ohm).

$$\begin{aligned} i(t_0^-) &= 0 \\ v_C(t_0^-) &= 0 \\ v_R(t_0^-) &= 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

2) En t_0 (court terme)
Que se passe-t-il en t_0, lorsqu'on applique l'échelon ? Lorsqu'on applique l'échelon de tension E :

2. c'est-à-dire depuis plusieurs constantes de temps

- la ddp sur la capa *reste nulle* (loi *court terme* : elle ne peut jamais varier instantanément : $v_C(t_0^+) = v_C(t_0^-)$) ;
- en conséquence : toute la tension E se reporte sur la résistance : $v_R(t_0^+) = E$
- et donc le courant vaut : $i(t_0^+) = E/R$ (loi d'Ohm)

3) En t=infini (long terme)
Par ailleurs on peut obtenir les valeurs asymptotiques du circuit : après un temps "très long" [3],

- le courant est nul dans la capacité (loi *long terme*)
- en conséquence : la ddp sur la résistance est nulle (loi d'Ohm)
- et donc : toute la tension est reportée sur la capa : $v_C = E$ (la capacité est alors chargée à cette valeur de tension)

Si on a retenu, de la résolution analytique, que les formes d'onde d'un circuit RC sont de type "exponentielle décroissante" [4], on peut tracer les formes d'onde de la figure 5.3 sur base des informations obtenues ci-dessus, et aucune équation ne doit être résolue. Cette évolution temporelle correspond physiquement aux éléments suivants :

- pour t>0, le courant étant non nul la capacité se charge (ici : v_C augmente)
- la ddp sur la résistance diminue d'autant
- et donc : le courant décroît progressivement ($i(t) = V_R(t)/R$)

L'ensemble de cette procédure est beaucoup plus rapide que la résolution analytique, et surtout bien davantage transposable à d'autres situations.

💣 Dans le raisonnement ci-dessus, le point qui pose généralement problème est celui de la transition au moment de l'échelon, car le comportement réel du circuit ne correspond pas forcément à l'intuition qu'on en a. L'erreur très souvent rencontrée consiste à modifier instantanément la différence de potentiel sur la capacité, ce qui est contraire à la réalité. Si l'on respecte strictement la loi court terme, cette erreur ne se produit pas. Ce risque d'erreur est particulièrement visible dans le cas de l'échelon inverse traité page suivante.

Pour être tout-à-fait clair, on peut encore formuler le comportement d'une capacité de la manière suivante :

- lorsque le potentiel d'un côté d'une capacité subit un échelon, la capacité doit être considérée comme "rigide" : le potentiel sur l'autre borne de la capacité doit subir exactement le même échelon, de manière à ce que la ddp reste constante dans l'immédiat (pas de variation instantanée) ;
- dans un second temps, la ddp sur la capacité évolue lentement (pour

3. idem
4. solution typique d'une équation différentielle du premier ordre.

autant qu'un courant circule dans le circuit) : c'est la phase de charge ou de décharge, qui se termine asymptotiquement par un courant nul dans la capacité.

Ces deux phases distinctes sont bien visibles sur la figure 5.3 : variation brusque puis évolution progressive.

Une autre erreur classique consiste à tracer des formes d'onde inappropriées après l'échelon. Pour éviter cet écueil, il faut se rappeler qu'une variation exponentiellement décroissante consiste à se rapprocher asymptotiquement de droites *horizontales*.

Résolution rapide (2e exemple) : échelon de tension inverse

Pour illustrer encore la résolution rapide et l'intérêt des lois court terme et long terme, ainsi que l'influence des conditions initiales[5] sur la solution du problème, voyons maintenant ce qui se passe, en partant de la situation électrique finale du cas précédent, lorsqu'on applique un échelon de tension négatif d'amplitude E (retour de la tension de source à 0). Nous supposons donc maintenant que l'instant $t = 0$ représente le moment de retour à 0 de la tension $e(t)$.

1) Avant l'échelon (conditions initiales)
Nous repartons de la situation suivante (voir étape 3 du paragraphe précédent) :

- le courant et la ddp sur la résistance sont nuls ;
- la ddp sur la capa vaut $+E$ (capa chargée) ;

$$\begin{aligned} i(t_0^-) &= 0 \\ v_R(t_0^-) &= 0 \\ v_C(t_0^-) &= E \end{aligned} \tag{5.8}$$

2) En t_0 (court terme) :
Juste après l'échelon négatif $-E$:

- la source de tension prend la valeur nulle : $e(t_0^+) = 0$
- or la ddp sur la capacité *ne peut pas* varier instantanément (loi *court terme* : $v_C(t_0^+) = v_C(t_0^-)$) : cette ddp vaut donc encore $+E$ (!) ;
- en conséquence : la tension sur la résistance vaut $v_R(t_0^+) = -E$ (tension de source nulle moins tension $+E$ sur la capacité) ;
- et donc le courant vaut $i(t_0^+) = -E/R$ (loi d'Ohm).

3) En t=infini (long terme)
Lorsque tous les transitoires ont disparu ($t >>$) :

- le courant est nul dans la capacité (loi *long terme*) ;
- en conséquence : la tension est nulle sur la résistance (loi d'Ohm) ;

5. les équations du circuit sont en effet rigoureusement identiques : la différence de solution est uniquement due à la différence de conditions initiales par rapport au problème précédent

- comme v_R et $e(t)$ sont nulles, v_C l'est aussi (la capacité est complètement déchargée).

Sachant que quelles que soient les conditions initiales et l'amplitude de l'échelon de la source, les formes d'onde sont du type "exponentielle décroissante", nous pouvons à nouveau tracer les formes d'onde de manière aussi précise qu'avec une résolution analytique (figure 5.4).

Les formes d'onde suivent toujours une variation de type exponentielle décroissante mais correspondent cette fois-ci aux phénomènes suivants :

- le courant étant négatif, la capacité se décharge (la tension v_C diminue) ;
- en conséquence : la ddp sur la résistance augmente (en valeur algébrique) ;
- et donc le courant augmente également (loi d'Ohm).

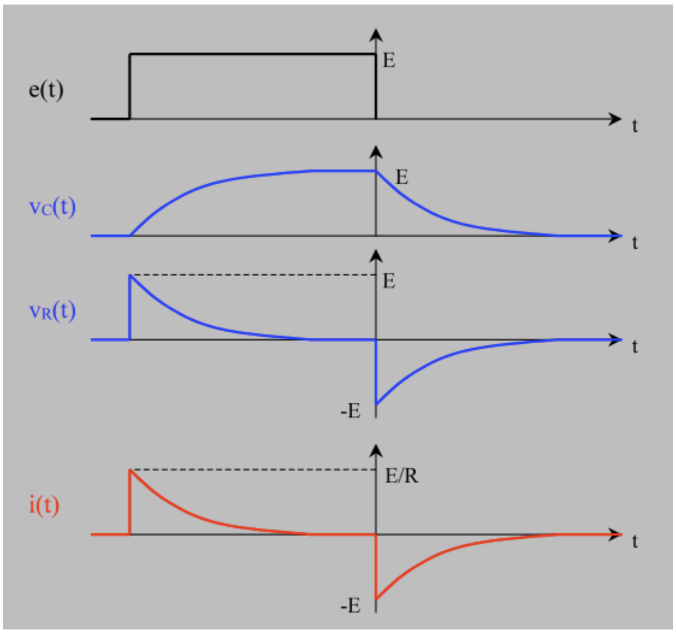

FIGURE 5.4 – formes d'onde d'un RC pour un échelon de tension négatif (en t=0)

On peut observer qu'au moment de l'échelon inverse, la tension sur la résistance devient *négative*. Ce fait est tellement contraire à l'intuition (probablement car la source de tension $e(t)$ n'est jamais négative) que bon nombre d'étudiants "trafiquent" les formes d'onde pour ne pas avoir de valeur négative sur la résistance. Or cette valeur négative est tout-à-fait correcte. La justification du passage en négatif de la tension est précisément le fait qu'on part d'une situation où la capacité est chargée et que cette charge ne peut varier instantanément. L'application de la loi court terme permet précisément de ne pas se fier uniquement à son intuition, qui dans ce cas-ci est trompeuse.

5.1.3 Constante de temps et fréquence de coupure (pour un circuit du 1er ordre)

Le circuit RC se rencontre très souvent en pratique. Il lui correspond également des systèmes similaires (au sens : ayant le même comportement car les mêmes équations) dans d'autres disciplines : un tel circuit est appelé circuit du premier ordre (son équation contient une dérivée du premier ordre). Il lui correspond un vocabulaire particulier.

Constante de temps

Les résultats analytiques ont montré que dans un circuit RC, la durée de charge et décharge de la capacité dépend du produit des valeurs R et C. Ce produit RC est appelé **constante de temps** du circuit (unités : s) et se note :

$$\tau = RC \tag{5.9}$$

La constante de temps n'est pas égale au temps de charge ou décharge (qui théoriquement est infini à cause de l'asymptote horizontale), mais donne par contre l'échelle de temps de ces phénomènes. Le tableau ci-dessous, valable pour tous les phénomènes de type "exponentielle décroissante" (1er ordre), donne la progression de la charge et de la décharge en fonction du temps (compté en constantes de temps) :

temps écoulé depuis l'échelon	pourcentage de la (dé)charge réalisé
τ	63%
3τ	95%
5τ	99%

Ces ordres de grandeur sont utiles à retenir. On retiendra en particulier qu'au bout de 5 constantes de temps, les variations des formes d'onde sont terminées (à un pourcent près).

Une fois définie la constante de temps, les équations du circuit RC peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} v_L(t) &= Ee^{\frac{-t}{\tau}} \\ v_R(t) &= E\left(1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \\ i(t) &= \frac{E}{R}\left(1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Passe-bas et passe-haut

Que tirer de l'analyse temporelle du circuit RC ? L'intérêt principal de ce circuit est qu'il réalise un filtrage. En effet : si l'on considère que la tension $e(t)$ est un signal d'entrée, le circuit offre deux sortie possibles : les tensions $v_R(t)$ et $v_C(t)$:

- la tension $v_C(t)$ ne comporte que les basses fréquences (variations lentes) du signal e(t) : la fonction v_C/e est donc un **filtre passe-bas** ;
- la tension $v_R(t)$ ne comporte que les hautes fréquences (variations rapides) du signal e(t) : la fonction v_R/e est donc un **filtre passe-haut.**

Pulsation de coupure et fréquence de coupure

La limite entre les fréquences considérées comme "hautes" et "basses" est la **fréquence de coupure**, définie comme :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{1}{2\pi RC} \tag{5.11}$$

Sachant que le lien entre pulsation (en rad/s) et fréquence (en Hz) est toujours :

$$\omega = 2\pi f \tag{5.12}$$

il y correspond une **pulsation de coupure** :

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} \tag{5.13}$$

L'interprétation de la fréquence/pulsation de coupure apparaîtra plus clairement aux §§6.8 et 6.9.

Bande passante

Enfin la **bande passante** (notée B ou BW pour "bandwidth") est définie comme la gamme de fréquence dans laquelle le filtre laisse passer le signal :

- pour le filtre passe-bas, la bande passante s'étend de 0Hz à la fréquence de coupure, elle a donc numériquement la même valeur que la fréquence de coupure ;
- pour le filtre passe-haut, elle s'étend de la fréquence de coupure jusqu'à l'infini : elle est donc elle-même infinie.

5.2 Analyse temporelle : circuit RL

5.2.1 Rappels concernant l'inductance

La loi de base temporelle de l'inductance est :

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{5.14}$$

Comme on l'a déjà signalé, l'inductance est le composant dual de la capacité : en intervertissant le courant et la tension, on retrouve le même comportement pour les deux composants. Ceci découle directement de la comparaison avec la loi temporelle de la capacité :

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{5.15}$$

Ainsi, alors qu'une capacité stocke l'énergie sous forme de charge *électrostatique*, l'inductance est capable d'emmagasiner de l'énergie sous forme *magnétique*. Alors qu'on parle de *charger* ou *décharger* une capacité, on parlera de **magnétiser** ou **démagnétiser** une inductance suivant que le courant, en valeur absolue, croît ou décroît dans celle-ci.

Physiquement, l'inductance peut être perçue comme une réserve d'énergie magnétique s'opposant à toute variation brusque du courant (de la même manière qu'une capacité peut être perçue comme une réserve d'énergie électrostatique s'opposant à toute variation brusque de la ddp à ses bornes).

Deux lois fondamentales

Pour rappel (voir §2.3.2), on peut extraire pour l'inductance une loi *haute fréquence* et une loi *basse fréquence* qui permettent de prévoir le comportement temporel d'un circuit comportant une inductance :

loi court terme (ou HF) de l'inductance : **dans une inductance, le courant ne peut pas varier instantanément**

loi long terme (ou BF) de l'inductance : **après un temps très long (ou en moyenne),** **la ddp sur l'inductance est forcément nulle**

💣 La loi long terme n'implique pas que le courant soit nul à long terme dans l'inductance : il peut être constant, de valeur non nulle.

5.2.2 Résolution temporelle du circuit RL : échelon de tension

Résolution analytique

L'évolution temporelle d'un circuit RL auquel on applique un échelon de tension peut être trouvé par voie analytique. Le cas standard où le courant dans le circuit est nul à l'instant initial est développé au §6.3.

Le résultat en est le suivant :

$$\begin{aligned} v_L(t) &= Ee^{\frac{-t}{\frac{L}{R}}} \\ v_R(t) &= E\left(1-e^{\frac{-t}{\frac{L}{R}}}\right) \\ i(t) &= \frac{E}{R}\left(1-e^{\frac{-t}{\frac{L}{R}}}\right) \end{aligned} \tag{5.16}$$

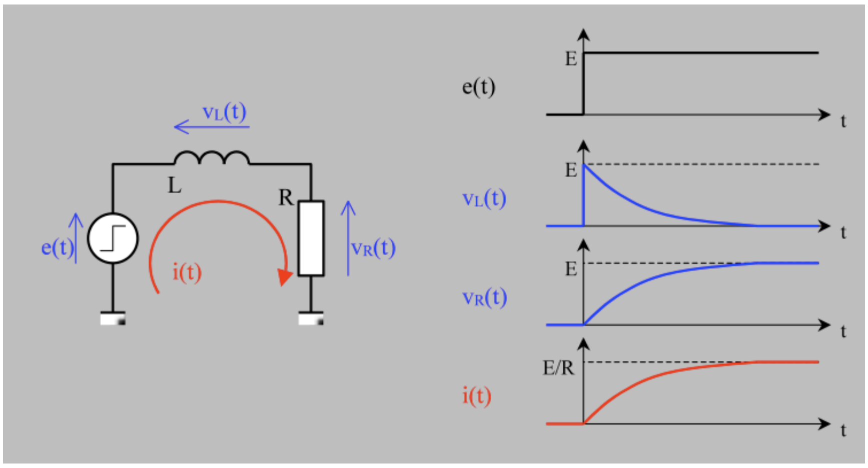

FIGURE 5.5 – évolution des grandeurs électriques dans le circuit RL (échelon de tension)

Résolution rapide

Outre une résolution purement analytique, une résolution rapide peut être faite en exploitant les lois court terme et long terme, suivant un déroulement tout-à-fait similaire à celui utilisé pour le circuit RC :

1) Avant l'échelon (conditions initiales en t_0^-)

- la ddp sur l'inductance est nulle (si le circuit n'a pas subi d'excitation "depuis longtemps" [6], cette situation est obligatoire vu la loi *long terme*) ;

6. c'est-à-dire depuis plusieurs constantes de temps

- en conséquence (1) : le courant i_0 dans l'inductance est *constant* (loi temporelle de l'inductance). On suppose ici de surcroît qu'il est *nul* (= condition initiale spécifique du problème) ;
- en conséquence (2) : la ddp sur la résistance est nulle (loi d'Ohm).

$$\begin{aligned} v_L(t_0^-) &= 0 \\ i_L(t_0^-) &= 0 \\ v_R(t_0^-) &= 0 \end{aligned} \tag{5.17}$$

2) En t_0^+ (court terme)
Que se passe-t-il en t_0, lorsqu'on applique l'échelon ? Lorsqu'on applique l'échelon de tension E :

- le courant dans l'inductance *reste nul* (loi *court terme* : il ne peut jamais varier instantanément : $i_L(t_0^+) = i_L(t_0^-)$) ;
- donc la tension sur la résistance reste nulle également (loi d'Ohm) : $v_R(t_0^+) = 0$
- et en conséquence toute la tension E se reporte sur l'inductance : $v_L(t_0^+) = E$

3) En t=infini (long terme)
Par ailleurs on peut obtenir les valeurs asymptotiques du circuit : après un temps "très long" [7],

- la ddp sur l'inductance est forcément nulle (loi long terme) : $v_L = 0$
- en conséquence : toute la tension est reportée sur la résistance : $v_R = E$
- et le courant prend la valeur $i_L = \frac{E}{R}$ (loi d'Ohm)

Si on a retenu, de la résolution analytique, que les formes d'onde d'un circuit RL sont de type "exponentielle décroissante" (solution typique d'une équation différentielle du premier ordre), on peut tracer les formes d'onde de la figure 5.5 sur base des informations obtenues ci-dessus, et aucune équation ne doit être résolue.

L'ensemble de cette procédure est beaucoup plus rapide que la résolution analytique, et surtout bien davantage transposable à d'autres situations.

5.2.3 Constante de temps et fréquence de coupure

Filtres passe-haut et passe-bas

On déduit des résultats ci-dessus que :

- la tension $v_L(t)$ ne comporte que les hautes fréquences (variations rapides) du signal e(t) : la fonction v_L/e est donc un **filtre passe-haut** ;
- la tension $v_R(t)$ ne comporte que les basses fréquences (variations lentes) du signal e(t) : la fonction v_R/e est donc un **filtre passe-bas**.

7. idem

Attention : les rôles des deux composants sont donc *permutés* par rapport au cas du circuit RC.

Constante de temps, fréquence de coupure et bande passante

Les notions définies pour le circuit RC sont en fait valables pour tous les circuits du premier ordre. Pour un circuit RL, il convient simplement (au vu des équations temporelles du circuit, à comparer à celles du circuit RC), de considérer que la constante de temps vaut :

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{5.18}$$

Moyennant quoi la pulsation de coupure vaut toujours :

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} \tag{5.19}$$

et la fréquence de coupure :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau} \tag{5.20}$$

Les conclusions concernant la bande passante restent valables également :

- pour le filtre passe-bas, la bande passante s'étend de 0Hz à la fréquence de coupure, elle a donc numériquement la même valeur que la fréquence de coupure ;
- pour le filtre passe-haut, elle s'étend de la fréquence de coupure jusqu'à l'infini : elle est donc elle-même infinie.

Et les équations temporelles du circuit peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} v_L(t) &= Ee^{\frac{-t}{\tau}} \\ v_R(t) &= E\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \\ i(t) &= \frac{E}{R}\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \end{aligned} \tag{5.21}$$

5.2.4 Linéarité des circuits comprenant des éléments réactifs

Les circuits RC et RL, de même que les circuits plus complexes comprenant des capacités et des inductances sont décrits par des équations différentielles linéaires (pour autant que les valeurs de R, L et C soient constantes).

Ces circuits sont donc linéaires au sens où nous l'avons déjà défini pour les résistances et on peut donc leur appliquer le principe de superposition.

5.3 Analyse fréquentielle (I) : phaseurs et impédances

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié le comportement des circuits RC et RL sous l'angle "temporel". Nous avons en particulier essayé de prévoir ce qui se passe lorsqu'on applique un échelon de tension à ces circuits.

Les circuits électriques, en particulier les circuits linéaires, peuvent également s'étudier sous l'angle "fréquentiel". L'analyse fréquentielle consiste à considérer la réponse du circuit à une sollicitation[8] sinusoïdale, c'est-à-dire comportant une seule fréquence (monochromatique).

On introduit pour cela un formalisme particulier qui comprend tout un arsenal d'outils mathématiques : phaseurs, impédances, fonctions de transfert, etc. Ceux-ci n'ont d'autre but que d'accélérer et simplifier l'analyse du comportement des circuits, en particulier des circuits comportant des éléments réactifs.

Les outils de l'analyse fréquentielle sont nombreux : ils seront exposés en trois sections. L'analyse fréquentielle suppose par définition les hypothèses suivantes :

- après avoir discuté les hypothèses et le champ d'application de l'analyse fréquentielle, cette section expose les notions de valeur efficace, phaseur et impédance,
- la section 5.4 traite de la réponse en fréquence $H(j\omega)$ et de son tracé sous forme de courbes de Bode,
- enfin la section 5.5 est spécifiquement consacrée à la technique du tracé asymptotique des courbes de Bode en utilisant les concepts de pôles et zéros.

Ces sections s'appuient sur les annexes du chapitre 6.

5.3.1 Hypothèses et (absence de) limitations de l'analyse fréquentielle

Hypothèses fondamentales

L'analyse fréquentielle suppose par définition les hypothèses suivantes :

- le circuit considéré est linéaire,
- toutes les sources (de tension et de courant) sont purement sinusoïdales et de même fréquence,

La combinaison des deux hypothèses ci-dessus permet d'affirmer que dans ces circonstances, *tous les signaux* (tensions et courants) présents dans le circuit sont purement sinusoïdaux et de même fréquence.

Une propriété des circuits linéaires est en effet que la réponse d'un circuit linéaire à une sollicitation sinusoïdale est également sinusoïdale et de même fréquence.

8. c'est-à-dire une source, de tension ou de courant

Ces hypothèses particulières sont désignées sous le terme de **circuits linéaires en régime sinusoïdal**. Le terme "en régime" rappelle en particulier l'absence de transitoire (les signaux sont périodiques), et le terme sinusoïdale rappelle l'aspect monochromatique des formes d'onde (une seule fréquence).

Le régime sinusoïdal s'oppose au **régime transitoire**.

Une erreur classique consiste à utiliser les outils du formalisme fréquentiel en dehors des hypothèses du régime linéaire sinusoïdal. Insistons donc sur le fait que pour qu'une source soit purement monochromatique :

- son signal ne peut pas contenir de composante continue (c'est-à-dire que sa moyenne doit être nulle),
- tous les transitoires (variations momentanées) doivent avoir disparu.

Les circonstances suivantes ne répondent par exemple pas à ces hypothèses :

- une sollicitation en échelon (cfr chapitre précédent),
- l'application d'une sinusoïde à partir d'un certain instant,
- toute forme d'onde non strictement sinusoïdale,
- l'application de signaux à un instant donné aux moyens d'interrupteurs.

Limites d'utilisation de la méthode

Contrairement à ce qu'on pourrait penser, ce type d'analyse se révèle assez peu restrictif.

La première raison est que si l'on y étudie le comportement d'un circuit à une seule fréquence, rien n'empêche de faire cette étude de manière paramétrique, c'est-à-dire sans préciser quelle est cette fréquence. Ceci est simplement réalisé en calculant le circuit sous forme analytique, au moyen d'expressions dans lesquelles figure une fréquence f ou plus souvent une pulsation ω qui restent sous forme littérale. En conséquence, l'analyse couvre en un seul calcul *tout le spectre* de fréquences ou de pulsations.

La seconde raison est qu'on peut étendre la validité de l'analyse aux signaux périodiques quelconques (et non plus uniquement sinusoïdaux) en combinant les deux propriétés suivantes :

- d'une part Fourier a montré que tout signal périodique peut se décomposer en une somme de sinusoïdes ;
- d'autre part, la linéarité permet précisément d'utiliser le principe de superposition, c'est-à-dire d'analyser individuellement chaque composante d'un signal formé d'une somme de signaux.

En présence d'une sollicitation périodique non sinusoïdale, on peut donc dans le principe :

- séparer ce signal en composantes fréquentielles monochromatiques distinctes (Fourier) ;
- étudier la réponse du circuit à chacune de ces composantes individuelles puisqu'on se trouve alors dans les hypothèses de l'analyse fréquentielle ;
- sommer les réponses obtenues et obtenir la réponse du circuit à la sollicitation non sinusoïdale initiale (principe de superposition).

Il est même possible d'établir des liens mathématiques entre les résultats de l'analyse fréquentielle et le comportement temporel des circuits (via la transformée de Fourier et la transformée de Laplace : voir §6.12), mais ceci ne sera pas exposé ici.

5.3.2 Valeur efficace

Définition

La valeur efficace d'un signal périodique est définie comme la racine carrée de la moyenne (sur une période) du carré du signal, c'est-à-dire :

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T X^2(t)dt} \tag{5.22}$$

où T désigne la période du signal $X(t)$. C'est l'opérateur intégral (accompagné de la division par T) qui réalise l'opération de moyennage de $X^2(t)$.

Le terme anglais pour désigner une valeur efficace est *root mean square* (souvent abrégé en "*rms*"), ce qui signifie mot à mot "racine de la moyenne du carré" : il n'y a donc aucune excuse pour oublier comment on calcule une valeur efficace.

La valeur efficace d'un signal X se note X_{eff} ou X_{rms}.

Plus spécifiquement, on s'intéressera dans les circuits aux valeurs efficaces des signaux de tension ou de courant sur les composants, qui sont donc définies comme :

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt} \tag{5.23}$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} \tag{5.24}$$

Valeur efficace d'un signal sinusoïdal

Pour le cas particulier d'un signal sinusoïdal, c'est-à-dire d'un signal de la forme :

$$X(t) = \hat{A}cos(\omega t) \tag{5.25}$$

où Â désigne la valeur de crête (la valeur maximum) de $X(t)$, on peut facilement montrer que la valeur efficace vaut la valeur de crête divisée par le facteur racine de deux :

$$A_{eff} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}} \tag{5.26}$$

A titre d'exemple, une sinusoïde de valeur de crête $1V$ a donc une valeur efficace de $0,707V_{eff}$.

💣 On notera que la valeur efficace est une valeur constante (indépendante du temps), puisqu'il s'agit d'une valeur moyenne.

💣 Lorsqu'on donne l'"amplitude" d'un signal sinusoïdal (en volts ou en ampères), il est toujours préférable de préciser s'il s'agit d'une valeur de crête ou d'une valeur efficace, sinon il y a une ambiguïté. Si rien n'est précisé, il s'agit en principe d'une valeur efficace.

Si le signal périodique n'est pas sinusoïdal, la notion de valeur efficace reste valable, mais le rapport entre valeur de crête et valeur efficace est différent.

Interprétation

Par définition, un signal périodique varie à chaque instant : quelle valeur choisir pour le caractériser ? On peut choisir le maximum du signal sur la période, mais cette valeur peut être très peu représentative. On peut également choisir la valeur moyenne, mais pour une sinusoïde par exemple celle-ci est nulle et n'apporte donc pas d'information. La valeur efficace s'avère en finale un meilleur moyen de caractériser un signal périodique.

La valeur efficace est en effet fondamentalement liée à la puissance moyenne (dans le temps) du signal.

Imaginons en effet par exemple un courant $i(t)$ variant dans le temps de façon périodique. L'énergie dissipée par ce courant lorsqu'il traverse une résistance R vaut, sur une période (intégrale de la puissance instantanée) :

$$E = \int_0^T v(t).i(t)dt = \int_0^T Ri^2(t)dt \tag{5.27}$$

La valeur moyenne de cette énergie sur une période (puissance moyenne) vaut donc

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T Ri^2(t)dt \tag{5.28}$$

Or compte tenu de la définition de la valeur efficace du courant donnée cidessus, cette dernière expression n'est rien d'autre que le carré de la valeur efficace de $i(t)$, multiplié par R :

$$P_{moy} = RI_{eff}^2 \tag{5.29}$$

Par ailleurs, la puissance dissipée dans cette même résistance par un courant continu de valeur I_{dc} vaudrait précisément :

$$P = RI_{dc}^2 \tag{5.30}$$

Constatant que les deux expressions sont identiques, on peut proposer l'interprétation suivante :

La valeur efficace I_{eff} d'un courant périodique $i(t)$ est la valeur du courant continu qui provoquerait en moyenne la même dissipation de puissance que $i(t)$ (sous-entendu : dans une résistance R quelconque)

Une conclusion identique peut être obtenue concernant la ddp. On obtient en effet également (équation équivalente à 5.29) :

$$P_{moy} = \frac{V_{eff}^2}{R} \tag{5.31}$$

On peut encore montrer que

$$P_{moy} = V_{eff}.I_{eff} \tag{5.32}$$

En d'autres termes, l'introduction de la valeur efficace telle que définie ci-dessus permet de généraliser les formules de la puissance instantanée au cas des signaux périodiques.

💣 Au contraire, calculer la puissance d'un signal périodique en multipliant les valeurs de crête de la tension et du courant (par analogie avec la formule de la puissance instantanée) donne un résultat tout-à-fait faux. On peut vérifier au moyen de la formule 5.27 que la puissance moyenne d'un signal sinusoïdal de $1V$ sur une résistance de 1Ω est de... $0,707W$ (et non $1W$).

5.3.3 Phaseurs

Définition

Un phaseur est un nombre complexe représentant un signal sinusoïdal

Considérons en effet un circuit linéaire en régime sinusoïdal. On sait que tous les courants et tensions ont même fréquence. Ils peuvent donc tous s'écrire sous la forme [9] :

$$X(t) = A_X\sqrt{2}cos(\omega t + \varphi_X) \tag{5.33}$$

L'expression ci-dessus peut encore se mettre sous la forme :

$$X(t) = A_X\sqrt{2}\Re\{e^{j(\omega t+\varphi_X)}\} \tag{5.34}$$

9. où $A_X\sqrt{2}$ représente la valeur de crête de la sinusoïde et A_X sa valeur efficace

La fréquence étant commune à tous les signaux, ceux-ci ne se distinguent l'un de l'autre que par leur amplitude et leur phase. Le **phaseur** de X(t), noté ici $\underline{X}$, est par définition le regroupement de ces deux informations sous la forme :

$$\underline{X} = A_X e^{j\varphi_X} \tag{5.35}$$

Le phaseur suffit donc à définir complètement un signal électrique dans un circuit linéaire en régime sinusoïdal.

On peut passer du phaseur au signal temporel et inversément en utilisant l'équivalence :

$$X(t) = \sqrt{2}\Re\{\underline{X}e^{j\omega t}\} \tag{5.36}$$

Intérêt des phaseurs

Un phaseur est un nombre complexe (ou encore un vecteur) particulier représentant un signal sinusoïdal :

- l'amplitude A_X du phaseur vaut (sauf exception) la valeur efficace du signal temporel X(t),
- la phase φ_X du phaseur vaut la phase du signal temporel X(t).

L'utilisation des phaseurs dans un circuit linéaire en régime sinusoïdal permet de faire abstraction du fait que tous les signaux varient périodiquement au cours du temps : un signal temporel variable est remplacé par un nombre complexe constant.

Sur le plan mathématique, l'utilisation des phaseurs permet de passer d'un système *d'équations différentielles réelles* à un système *d'équations algébriques complexes*, beaucoup plus facile à résoudre.

Graphiquement, ceci se traduit par le fait de remplacer des *sinusoïdes* par des *vecteurs*, ce qui permet une représentation plus concise également.

Enfin, l'utilisation des phaseurs permet de généraliser la notion de résistance à celle d'impédance, qui permet de décrire le comportement des éléments réactifs (voir §5.3.7).

Représentation dans le plan complexe

En soi, le phaseur est un nombre complexe constant. Il se représente donc par un vecteur fixe dans le plan complexe :

L'intérêt de cette représentation apparaîtra plus clairement au moment de comparer les positions respectives de différents phaseurs, c'est-à-dire lorsqu'on considérera un circuit.

Interprétation graphique du lien entre phaseur et signal temporel

Le lien entre le phaseur et le signal temporel qu'il représente peut être compris dans le graphique ci-dessous.

Pour obtenir le signal réel, il faut (voir dernière équation ci-dessus) :

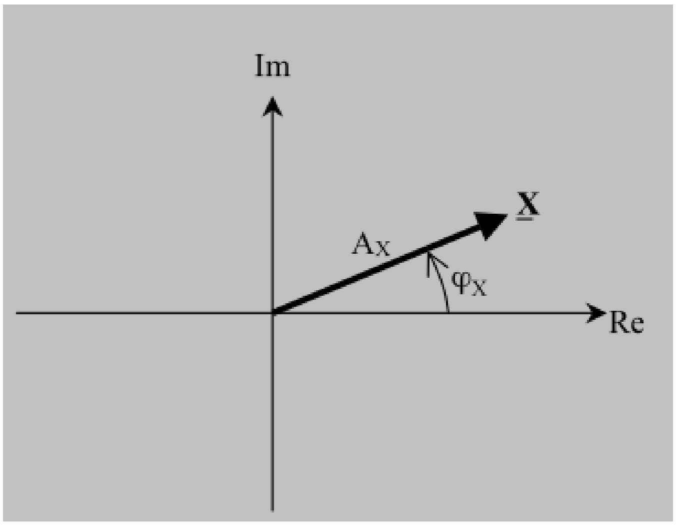

FIGURE 5.6 – représentation d'un phaseur dans le plan complexe

- multiplier le phaseur par $e^{j\omega t}$, ce qui a pour effet de le faire tourner dans le plan complexe de l'angle ωt (variable au cours du temps),
- prendre la partie réelle du vecteur $\underline{X}e^{j\omega t}$, ce qui revient à projeter celui-ci sur l'axe réel,
- multiplier la valeur obtenue par $\sqrt{2}$ (car le module du phaseur est la valeur efficace du signal temporel).

Si, par la pensée, on fait tourner le phaseur $\underline{X}e^{j\omega t}$ au cours du temps, on obtient bien une variation sinusoïdale de sa projection sur l'axe réel. Le phaseur décrit donc bien une sinusoïde.

Pour faire cette conversion, il est évidemment nécessaire de connaître la fréquence du problème, c'est-à-dire la vitesse à laquelle les phaseurs "tournent". Insistons sur le fait que cette fréquence est unique : tous les phaseurs doivent tourner à la même vitesse.

Nous ne montrons cette figure que pour la bonne compréhension, pour se raccrocher momentanément à la variation temporelle, qui est plus familière. Néanmoins l'intérêt des phaseurs est de faire abstraction de cette variation temporelle, et de raisonner dans le plan complexe seul, sans faire la projection.

Introduisons maintenant la notion d'*impédance*.

5.3.4 Impédance d'une inductance pure

Définition

Si nous définissons l'**impédance** d'une inductance L comme le nombre complexe (purement imaginaire)

$$Z_L = j\omega L \tag{5.37}$$

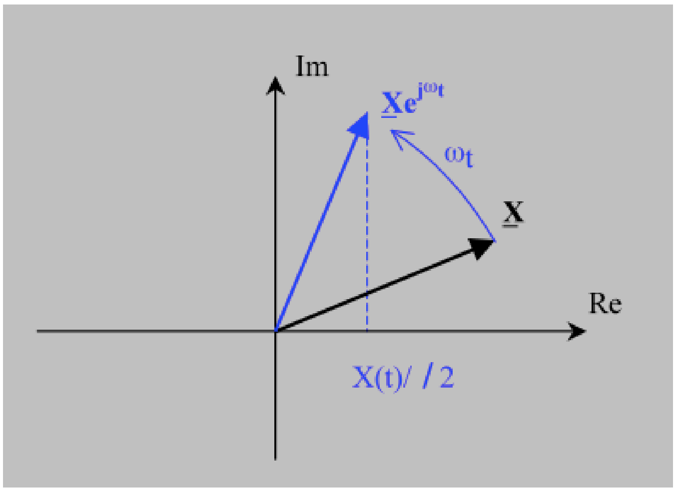

FIGURE 5.7 – lien entre phaseur (fixe) et signal temporel (tpériodique)

on peut montrer que la loi fondamentale de l'inductance

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{5.38}$$

peut s'écrire, sous les hypothèses du régime linéaire sinusoïdal :

$$\underline{V} = Z_L \underline{I} \tag{5.39}$$

Si la première des deux dernières équations reste plus générale, on voit bien apparaître ici l'intérêt de l'analyse fréquentielle puisque l'équation différentielle 5.38 est remplacée par une équation algébrique 5.39 dont la dérivée a disparu.

Démonstration

Sous les hypothèses du régime sinusoïdal, tout signal présent dans le circuit est sinusoïdal. C'est notamment le cas du courant et de la ddp agissant sur l'inductance L. On peut donc en toute généralité les écrire :

$$\begin{aligned} v(t) &= V_{eff}\sqrt{2}cos(\omega t + \phi) \\ i(t) &= I_{eff}\sqrt{2}cos(\omega t + \theta) \end{aligned} \tag{5.40}$$

Ces expressions, introduites dans la loi temporelle de l'inductance, donnent :

$$\begin{aligned} V_{eff}\sqrt{2}cos(\omega t + \phi) &= L\frac{d}{dt}\left(I_{eff}\sqrt{2}cos(\omega t + \theta)\right) \\ &= -\omega L I_{eff}\sqrt{2}sin(\omega t + \theta) \\ &= \omega L I_{eff}\sqrt{2}cos(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \tag{5.41}$$

ou encore :

$$V_{eff} cos(\omega t + \phi) = \omega L I_{eff} cos(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}) \tag{5.42}$$

et par dérivation des deux membres :

$$V_{eff} sin(\omega t + \phi) = \omega L I_{eff} sin(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}) \tag{5.43}$$

En se rappelant que :

$$e^{ja} = cosa + jsina \tag{5.44}$$

et en additionnant l'équation 5.42 au produit de l'équation 5.43 par j, on obtient :

$$V_{eff} e^{j(\omega t + \phi)} = \omega L I_{eff} e^{j(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2})} \tag{5.45}$$

qui se simplifie en :

$$\begin{aligned} V_{eff} e^{j\phi} &= \omega L I_{eff} e^{j\theta} e^{j\frac{\pi}{2}} \\ &= j\omega L I_{eff} e^{j\theta} \end{aligned} \tag{5.46}$$

Or en régime sinusoïdal, chaque signal peut être décrit par un phaseur. Compte tenu de la définition donnée au §5.3.3, les phaseurs de $v(t)$ et $i(t)$ valent ici :

$$\begin{aligned} \underline{V} &= V_{eff} e^{j\phi} \\ \underline{I} &= I_{eff} e^{j\theta} \end{aligned} \tag{5.47}$$

On obtient donc en finale :

$$\underline{V} = j\omega L \underline{I} \tag{5.48}$$

ou encore

$$\underline{V} = Z_L \underline{I} \tag{5.49}$$

pour autant qu'on définisse l'impédance de L comme :

$$Z_L = j\omega L \tag{5.50}$$

Interprétation de Z_L

Nature de Z_L

On notera que :

- l'impédance d'une inductance est un *nombre complexe* (purement imaginaire),
- bien qu'une impédance et un phaseur soient tous deux des nombres complexes, ils ne doivent pas être confondus : une impédance décrit la *relation existant entre un courant et une ddp*, alors qu'un phaseur décrit *un de ces deux signaux* (toujours en régime sinusoïdal)

- en comparant les équations 5.38 et 5.48, on peut se rendre compte qu'une multiplication par $j\omega$ correspond à l'opérateur dérivée $\frac{d}{dt}$. Les deux équations ne sont néanmoins pas totalement équivalentes puisque la variation temporelle des signaux n'est pas décrite par l'équation 5.48 (tout l'intérêt des phaseurs étant précisément de faire abstraction de cette variation)
- la loi 5.48 a la forme d'une loi d'Ohm (multiplication du courant par un facteur constant [10] pour trouver la ddp), au détail près qu'elle concerne des nombres complexes. Nous pouvons la considérer comme une loi d'Ohm généralisée.

Une impédance est un nombre complexe décrivant la relation entre la ddp et le courant agissant sur un dipôle (sous les hypothèses du régime sinusoïdal)

En se référant à l'équation 5.39, on peut même être plus précis mathématiquement et écrire :

L'impédance est le rapport d'un phaseur de tension sur un phaseur de courant

Visualisation dans le plan complexe

Ces différents éléments, et en particulier la loi de l'inductance, peuvent être visualisés dans le plan complexe (fig. 5.8).

Il faut pour cela définir une phase de référence par rapport aux signaux. Si l'on prend comme référence la phase du courant (soit $\theta = 0°$ dans les notations précédentes), c'est-à-dire qu'on aligne arbitrairement le courant sur l'axe horizontal :

- par rapport au phaseur de courant $\underline{I}$, le phaseur de tension $\underline{V}$ apparaît aligné sur l'axe vertical, décalé de 90° en sens anti-horlogique (nombre imaginaire positif). Cette rotation de +90° dans la plan complexe résulte de la multiplication du nombre complexe $\underline{I}$ par j dans la loi d'Ohm généralisée $\underline{V} = Z_L \underline{I}$,
- compte tenu de ce qui a été dit ci-dessus, cette rotation correspond encore à une *dérivation* par rapport au temps,
- quant aux amplitudes des deux phaseurs, elles sont dans un rapport ωL conformément à la même loi.

Cette représentation permet encore de savoir quel signal est en avance sur l'autre : si l'on se rappelle que, pour obtenir les signaux temporels, il convient de multiplier les phaseurs par $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ (ce qui les fait tourner dans le sens anti-horlogique dans le plan complexe), puis de prendre la partie réelle du vecteur

10. au sens indépendant de ce courant et de cette ddp

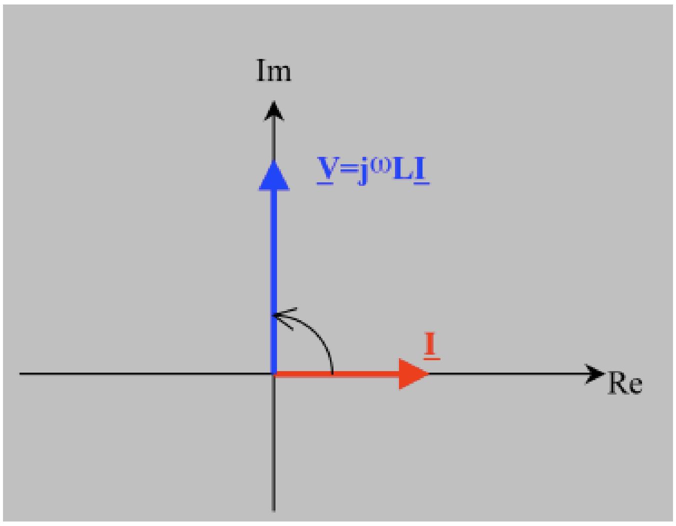

FIGURE 5.8 – phaseurs de tension et de courant d'une inductance pure

tournant ainsi obtenu (voir éq. 5.36), on peut vérifier que dans ce cas-ci c'est la projection de $\underline{V}$ qui coupe l'axe réel *avant* celle de $\underline{I}$, en d'autres termes que :

pour une inductance, la tension est en avance de 90° sur le courant

Ceci illustre fort bien comment les phaseurs, par leur disposition respective dans le plan complexe, permettent de "voir" le lien entre courant et tension dans le circuits.

Variation en fréquence

Enfin on peut observer que l'impédance d'une inductance varie avec la fréquence puisque l'expression de Z_L dépend de ω :

L'impédance d'une inductance en proportionnelle à ω.
Son module est donc faible en basse fréquence
et élevé en haute fréquence.

Ceci correspond bien au fait qu'une inductance s'oppose à une variation brusque du courant la traversant.

En valeurs extrêmes, il est utile de se rappeler que l'impédance d'une inductance :

- tend vers *zéro* (et donc se rapproche d'un court-circuit) pour les basses fréquences,
- tend vers l'*infini* (et donc se rapproche d'un circuit ouvert) pour les hautes fréquences,

ce qui est très aisé à déduire de l'expression $Z_L = j\omega L$.

5.3.5 Impédance d'une capacité pure

Définition

De la même manière, si nous définissons l'**impédance** d'une capacité C comme le nombre complexe (purement imaginaire)

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \tag{5.51}$$

on peut montrer que la loi fondamentale de la capacité

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{5.52}$$

peut s'écrire, sous les hypothèses du régime linéaire sinusoïdal :

$$\underline{V} = Z_C \underline{I} \tag{5.53}$$

Si la première des deux dernières équations reste plus générale, on voit bien apparaître ici l'intérêt de l'analyse fréquentielle puisque l'équation différentielle 5.52 est remplacée par une équation algébrique 5.53 dont la dérivée a disparu.

Démonstration

Sous les hypothèses du régime sinusoïdal, tout signal présent dans le circuit est sinusoïdal. C'est notamment le cas du courant et de la ddp agissant sur la capacité C. On peut donc en toute généralité les écrire :

$$\begin{aligned} v(t) &= V_{eff}\sqrt{2}cos(\omega t + \phi) \\ i(t) &= I_{eff}\sqrt{2}cos(\omega t + \theta) \end{aligned} \tag{5.54}$$

Ces expressions, introduites dans la loi temporelle de la capacité, donnent :

$$\begin{aligned} I_{eff}\sqrt{2}cos(\omega t + \theta) &= C\frac{d}{dt}\left(V_{eff}\sqrt{2}cos(\omega t + \phi)\right) \\ &= -\omega C V_{eff}\sqrt{2}sin(\omega t + \phi) \\ &= \omega C V_{eff}\sqrt{2}cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \tag{5.55}$$

ou encore :

$$I_{eff}cos(\omega t + \theta) = \omega C V_{eff}cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}) \tag{5.56}$$

et par dérivation des deux membres :

$$I_{eff}sin(\omega t + \theta) = \omega C V_{eff}sin(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}) \tag{5.57}$$

En se rappelant que :

$$e^{ja} = cosa + jsina \tag{5.58}$$

et en additionnant l'équation 5.56 au produit de l'équation 5.57 par j, on obtient :

$$I_{eff}e^{j(\omega t+\theta)} = \omega C V_{eff}e^{j(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2})} \tag{5.59}$$

qui se simplifie en :

$$\begin{aligned} I_{eff}e^{j\theta} &= \omega C V_{eff}e^{j\phi}e^{j\frac{\pi}{2}} \\ &= j\omega C V_{eff}e^{j\phi} \end{aligned} \tag{5.60}$$

Or en régime sinusoïdal, chaque signal peut être décrit par un phaseur. Compte tenu de la définition donnée au §5.3.3, les phaseurs de $v(t)$ et $i(t)$ valent ici :

$$\begin{aligned} \underline{V} &= V_{eff}e^{j\phi} \\ \underline{I} &= I_{eff}e^{j\theta} \end{aligned} \tag{5.61}$$

On obtient donc en finale [11] :

$$\underline{I} = j\omega C\underline{V} \tag{5.62}$$

En isolant la ddp, cette dernière loi s'écrit

$$\underline{V} = \frac{1}{j\omega C}\underline{I} \tag{5.63}$$

ou encore

$$\underline{V} = Z_C\underline{I} \tag{5.64}$$

pour autant qu'on définisse l'impédance de C comme :

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \tag{5.65}$$

Interprétation de Z_C

Nature de Z_C

Les conclusions faites à propos de l'impédance de l'inductance (§5.3.4) restent valables à un élément près : l'impédance d'une capacité est un nombre imaginaire purement *négatif* (le facteur j se trouvant au dénominateur de l'expression de l'impédance).

Visualisation dans le plan complexe

11. Ce résultat aurait pu être obtenu immédiatement en remarquant qu'entre les équations 5.38 et 5.52, les rôles de $v(t)$ et $i(t)$ sont permutés, et que C remplace L (mais la forme de l'équation est identique). En effectuant ces modifications sur l'équation 5.48 déjà obtenue pour l'inductance, nous aurions immédiatement obtenu la dernière équation ci-dessus.

La loi de la capacité peut être visualisée dans le plan complexe (fig. 5.9).

Il faut pour cela définir une phase de référence par rapport aux signaux. Si l'on prend comme référence la phase du courant (soit $\theta = 0°$ dans les notations précédentes), c'est-à-dire qu'on aligne arbitrairement le courant sur l'axe horizontal :

- par rapport au phaseur de courant $\underline{I}$, le phaseur de tension $\underline{V}$ apparaît aligné sur l'axe vertical, décalé de 90° en sens *horlogique* (nombre imaginaire négatif). Cette rotation de -90° dans le plan complexe résulte de la division du nombre complexe $\underline{I}$ par j dans la loi d'Ohm généralisée $\underline{V} = Z_C \underline{I}$,
- compte tenu de ce qui a été dit ci-dessus, cette rotation correspond encore à une *intégration* (du courant),
- quant aux amplitudes des deux phaseurs, elles sont dans un rapport $\frac{1}{\omega C}$ conformément à la même loi.

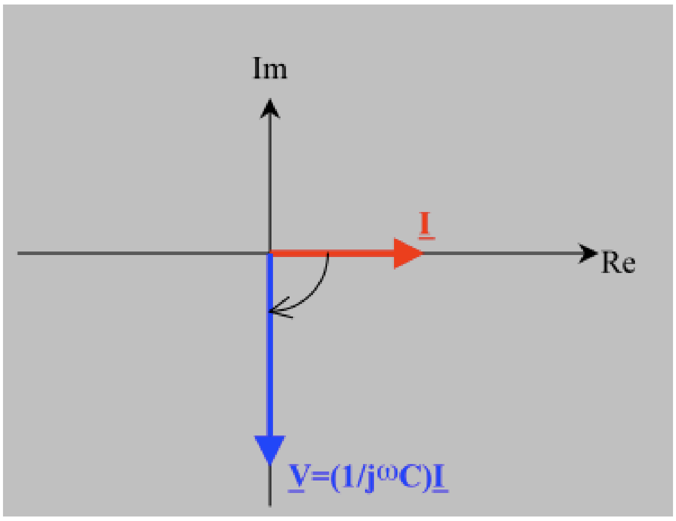

FIGURE 5.9 – phaseurs de tension et de courant d'une capacité pure

Cette représentation permet encore de savoir quel signal est en avance sur l'autre : si l'on se rappelle que, pour obtenir les signaux temporels, il convient de multiplier les phaseurs par $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ (ce qui les fait tourner dans le sens anti-horlogique dans le plan complexe), puis de prendre la partie réelle du vecteur tournant ainsi obtenu (voir éq. 5.36), on peut vérifier que dans ce cas-ci c'est la projection de $\underline{I}$ qui coupe l'axe réel *avant* celle de $\underline{V}$, en d'autres termes que :

pour une capacité, la tension est en retard de 90° sur le courant

Ceci illustre fort bien comment les phaseurs, par leur disposition respective dans le plan complexe, permettent de "voir" le lien entre courant et tension dans le circuits.

Variation en fréquence

Enfin on peut observer que l'impédance d'une capacité varie avec la fréquence puisque l'expression de Z_C dépend de ω :

L'impédance d'une capacité en inversement proportionnelle à ω.
Son module est donc élevé en basse fréquence
et faible en haute fréquence.

Ceci correspond bien au fait qu'une inductance s'oppose à une variation brusque de la ddp à ses bornes (en se rappelant que pour charger/décharger une capacité, il faut lui injecter ou lui soustraire du courant, ce qui est facilité par une impédance faible).

En valeurs extrêmes, il est utile de se rappeler que l'impédance d'une capacité :

- tend vers l'*infini* (et donc se rapproche d'un circuit ouvert) pour les basses fréquences,
- tend vers *zéro* (et donc se rapproche d'un court-circuit) pour les hautes fréquences,

ce qui est très aisé à déduire de l'expression $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$.

5.3.6 Impédance d'une résistance pure

Pour être complet, analysons le cas de la résistance à la lueur des discussions précédentes.

La résistance pure étant un simple facteur réel, elle ne déphase pas le courant sinusoïdal qu'elle multiplie. Tension et courant agissant sur une résistance ont donc la même phase.

On pourra donc écrire en phaseurs :

$$\underline{V} = R\underline{I} \tag{5.66}$$

et on pourra considérer que la valeur R, en tant que nombre réel, est l'impédance de la résistance (composant) caractérisé par cette valeur.

Dans le plan complexe, les phaseurs de tension et de courant d'une résistance pure sont alignés puisque les deux grandeurs sont toujours en phase. Ceci correspond bien au fait que R est un simple facteur multiplicatif réel.

Ceci clarifie une différence fondamentale entre une résistance et une inductance ou une capacité : alors qu'une inductance ou une capacité pures introduisent un déphasage de 90° (en positif ou en négatif) entre ddp et courant, une résistance pure n'introduit aucun déphasage.

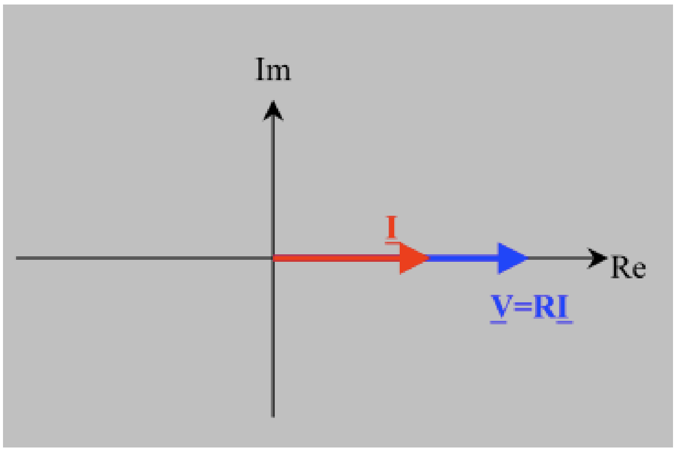

FIGURE 5.10 – phaseurs de tension et de courant d'une résistance pure

5.3.7 Impédance d'un dipôle quelconque

L'impédance est une généralisation de la notion de résistance

Les §§5.3.4, 5.3.5 et 5.3.6 ont montré que l'écriture des grandeurs électriques en phaseurs permet de généraliser la loi d'Ohm aux composants réactifs purs. A condition de remplacer la notion de résistance (nombre réel) par celle d'impédance (nombre complexe), le lien entre courant et tension s'écrit maintenant :

$$\underline{V} = Z\underline{I} \tag{5.67}$$

où $\underline{V}$, Z et $\underline{I}$ sont tous les trois des nombres complexes.

Cette généralisation permet en particulier de décrire mathématiquement un possible *déphasage* (jusqu'ici de 90°) entre $v(t)$ et $i(t)$.

Alors que nous avons introduit l'impédance sur base des dipôles idéaux L et C, cette notion d'impédance peut en fait être généralisée à l'ensemble des composants passifs linéaires en considérant que l'impédance est un nombre complexe quelconque, c'est-à-dire comportant une partie réelle *et* une partie imaginaire. Les trois dipôles idéaux considérés ci-dessus constituent alors simplement des cas particuliers de la notion d'impédance.

Ce faisant, le déphasage entre $v(t)$ et $i(t)$ peut être quelconque et dépend du rapport des parties réelle et imaginaire de Z.

Les interprétations déjà obtenues restent pleinement valables :

Une impédance est un nombre complexe décrivant la relation entre la ddp et le courant agissant sur un dipôle (sous les hypothèses du régime sinusoïdal)

L'impédance est le rapport d'un phaseur de tension sur un phaseur de courant

Elles peuvent être complétées de la manière suivante :

L'impédance est une généralisation de la notion de résistance à un nombre complexe quelconque, permettant ainsi, sous les hypothèses du régime sinusoïdal, de décrire le déphasage intervenant entre signaux de tension et de courant

Utilité de la notion d'impédance

L'intérêt majeur de la notion d'impédance est de simplifier l'analyse des circuits en transformant des équations différentielles (réelles) concernant des signaux variables dans le temps en équations algébriques (complexes) indépendantes du temps.

Grâce au formalisme fréquentiel présenté ci-dessus, l'ensemble des notions présentées précédemment pour les circuits *résistifs* sont étendues aux circuits comportant des éléments *réactifs*. Pour autant qu'on effectue les calculs en phaseurs et impédances (donc en nombres complexes), restent donc valables :

- les lois de mise en série et en parallèle (§3.4),
- la procédure de base pour résoudre un circuit (3.2),
- le théorème de superposition (§3.7),
- l'impédance d'entrée et de sortie d'un équivalent de Thévenin (§4.2.1 et §4.2.2).

Vocabulaire lié aux impédances

Toute impédance Z peut s'écrire sous la forme d'un nombre complexe :

$$Z = R + jX \tag{5.68}$$

Les parties réelle et imaginaire de Z sont respectivement appelées **résistance** R et **réactance** X. Ces deux nombres réels s'expriment en Ω.

On notera trois cas particuliers :

- pour une résistance pure : R est la valeur ohmique de la résistance et $X = 0$
- pour une inductance pure : $R = 0$ et $X = \omega L$
- pour une capacité pure : $R = 0$ et $X = -(1/\omega C)$

5.3.8 Admittance, conductance et susceptance

Le formalisme fréquentiel introduit également une autre grandeur, appelée **admittance** et notée Y :

$$\underline{I} = Y\underline{V} \tag{5.69}$$

L'admittance décrit elle aussi le lien existant entre tension et courant, mais selon une formulation mathématique alternative. Alors que l'impédance est le rapport d'un phaseur de tension et d'un phaseur de courant *dans cet ordre* (c'est-à-dire avec la tension au numérateur), l'admittance n'est rien d'autre que le rapport inverse :

L'admittance est le rapport d'un phaseur de *courant* sur un phaseur de *tension*

L'admittance est également un nombre complexe :

$$Y = G + jB \tag{5.70}$$

Les parties réelle et imaginaire de Y sont respectivement appelées **conductance** G et **susceptance** B. Ce sont deux nombres réels s'exprimant en Ω^{-1}.

Attention, si l'on peut écrire que l'admittance est l'inverse de l'impédance...

$$Y = \frac{1}{Z} \tag{5.71}$$

...on ne peut par contre pas écrire pour un dipôle quelconque que la conductance est l'inverse de la résistance (et encore moins que la susceptance est l'inverse de la réactance : voir le signe négatif dans les formules ci-dessous).

Pour passer de l'admittance à l'impédance d'un même dipôle, on peut montrer que les expressions générales sont au contraire :

$$\begin{aligned} R &= \frac{G}{G^2 + B^2} \\ X &= \frac{-B}{G^2 + B^2} \end{aligned} \tag{5.72}$$

et pour passer de l'impédance à l'admittance :

$$\begin{aligned} G &= \frac{R}{R^2 + X^2} \\ B &= \frac{-X}{R^2 + X^2} \end{aligned} \tag{5.73}$$

5.4 Analyse fréquentielle (II) : réponse en fréquence $H(j\omega)$ et courbes de Bode

5.4.1 Réponse en fréquence $H(j\omega)$

Définition et interprétation

On considère en toute généralité un circuit comportant une entrée et une sortie (= quadripôle), dont les signaux d'entrée et de sortie sont respectivement notés $v_i(t)$ et $v_o(t)$.

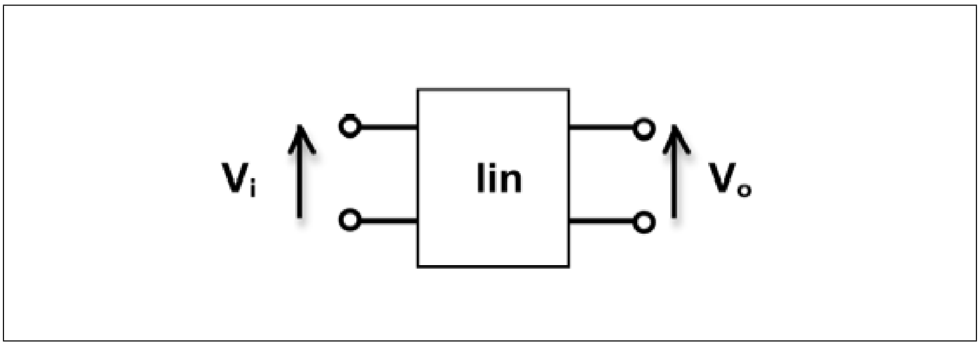

FIGURE 5.11 – quadripôle linéaire

L'analyse fréquentielle implique par définition que nous posons les hypothèses du régime linéaire sinusoïdal (voir § 5.3), c'est-à-dire :

- le circuit est linéaire
- le signal d'entrée est monochromatique (c'est-à-dire ne contient qu'une seule fréquence ou pulsation)

On rappellera encore que la fréquence f (en Hz) et la pulsation ω (en rad/s) sont liées par :

$$\omega = 2\pi f \tag{5.74}$$

chaque fois qu'on utilise le terme "fréquence", on fait donc implicitement référence à la pulsation correspondante, et inversément.

De cet ensemble d'éléments, il ressort que :

- le signal de sortie est également monochromatique, et de même fréquence/pulsation que le signal d'entrée, ainsi d'ailleurs que tous les autres signaux dans le circuit ;
- à chacun des signaux $v_i(t)$ et $v_o(t)$ on peut associer un phaseur (voir §5.3.3) : nous les notons respectivement $\underline{V}_i$ et $\underline{V}_o$
- bien qu'on analyse le circuit en supposant tous les signaux monochromatiques et de même fréquence/pulsation, il n'est pas nécessaire de préciser quelle est cette fréquence/pulsation : on peut donc trouver

des expressions analytiques de $\underline{V}_i$ et $\underline{V}_o$ dépendant de ω et donc représentant le comportement du circuit pour *tout le spectre de fréquence.*

Sous ces hypothèses, la **réponse en fréquence** ou **transmittance isochrone** $H(j\omega)$ du circuit est le rapport entre l'expression du phaseur du signal de sortie et celle du phaseur du signal d'entrée [12] :

$$H(j\omega) = \frac{\underline{V_o}}{\underline{V_i}} \tag{5.75}$$

La réponse en fréquence exprime la transformation que le circuit fait subir au signal d'entrée $\underline{V_i}$. Il suffit en effet de multiplier ce signal $\underline{V_i}$ par $H(j\omega)$ pour trouver $\underline{V_o}$:

$$\underline{V_o} = H(j\omega)\underline{V_i} \tag{5.76}$$

La réponse en fréquence caractérise donc la *fonction* du circuit, dans le cadre du formalisme fréquentiel (circuits linéaires en régime sinusoïdal). Elle peut être vue comme une généralisation de la notion de gain (voir §5.4.2 ci-dessous).

Nature mathématique

La réponse en fréquence est un nombre complexe variable en fonction de la fréquence (ou de la pulsation).

Néanmoins la réponse en fréquence *n'est pas* un phaseur :

- un phaseur est un nombre complexe (constant) représentant un *signal*
- alors que la réponse en fréquence est un nombre complexe exprimant la *fonction du circuit*

La réponse en fréquence ne doit pas être confondue avec :

- la réponse indicielle qui est la réponse du circuit à un signal d'entrée en forme d'échelon (la réponse indicielle appartient donc au formalisme temporel)
- la réponse impulsionnelle qui est la réponse du circuit à un signal d'entrée en forme d'impulsion de Dirac (la réponse impulsionnelle appartient donc aussi au formalisme temporel)

En toute généralité, elle ne doit pas non plus être confondue avec la **transmittance isomorphe** ou **fonction de transfert** $H(p)$. Les fonctions $H(p)$ et $H(j\omega)$ entretiennent néanmoins un rapport extrêmement étroit puisque la fonction $H()$ est identique dans les deux cas : c'est uniquement la variable à laquelle s'applique la fonction qui diffère ($j\omega$ pour la réponse en fréquence et la

12. dans cette expression et la suivante, les phaseurs dépendent donc implicitement de ω

variable de Laplace p pour la fonction de transfert). Dans le cadre de ce cours, nous nous permettrons parfois un abus de langage en appelant "fonction de transfert (en $j\omega$)" la réponse en fréquence $H(j\omega)$. Nous invitons le lecteur à se reporter au §5.5.5 pour plus de détails.

Mathématiquement parlant, toutes ces notions sont étroitement liées au sein d'une théorie cohérente. Nous n'aborderons pas ici l'ensemble de cette théorie, qui relève de l'analyse complexe. Néanmoins quelques correspondances utiles sont données à l'annexe 6.12.

5.4.2 Courbes de Bode

La réponse en fréquence étant un nombre complexe, elle peut toujours se décomposer sous la forme polaire :

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \tag{5.77}$$

$A(\omega)$ et $\varphi(\omega)$, appelés respectivement **gain** et **phase** de la réponse en fréquence, sont des nombres réels variables en fréquence [13].

Le gain apparaît donc ici comme le module de la réponse en fréquence :

$$A(\omega) = |H(j\omega)| \tag{5.78}$$

On peut donc effectivement voir la réponse en fréquence comme la généralisation de la notion de gain, mais en permettant d'exprimer davantage de phénomènes, à savoir :

- la variation éventuelle de la valeur du gain du circuit en fonction de la fréquence du signal d'entrée
- l'introduction par le circuit d'un déphasage éventuel (lui aussi variable en fonction de la fréquence) entre le signal d'entrée et le signal de sortie

On étudie classiquement une réponse en fréquence (donc la fonction d'un circuit) en la représentant graphiquement sous forme de diagramme de Bode.

Un **diagramme de Bode** (ou **courbes de Bode**) est un ensemble de deux graphes qui représentent la variation du gain et de la phase d'un circuit en fonction de la fréquence ou de la pulsation. Plus précisément, un diagramme de Bode comprend :

- un graphe du gain $A(\omega)$ tracé dans des axes *bilogarithmiques* : $Log|A(\omega)| = fct(Log\omega)$
- un graphe de la phase $\varphi(\omega)$ tracé dans des axes *semi-logarithmiques* : $\varphi(\omega) = fct(Log\omega)$

La figure 5.12 en donne un exemple.

13. Par opposition à $A(\omega)$ et $\varphi(\omega)$, on note que H dépend de "$j\omega$" notamment pour rappeler que H est un nombre complexe.

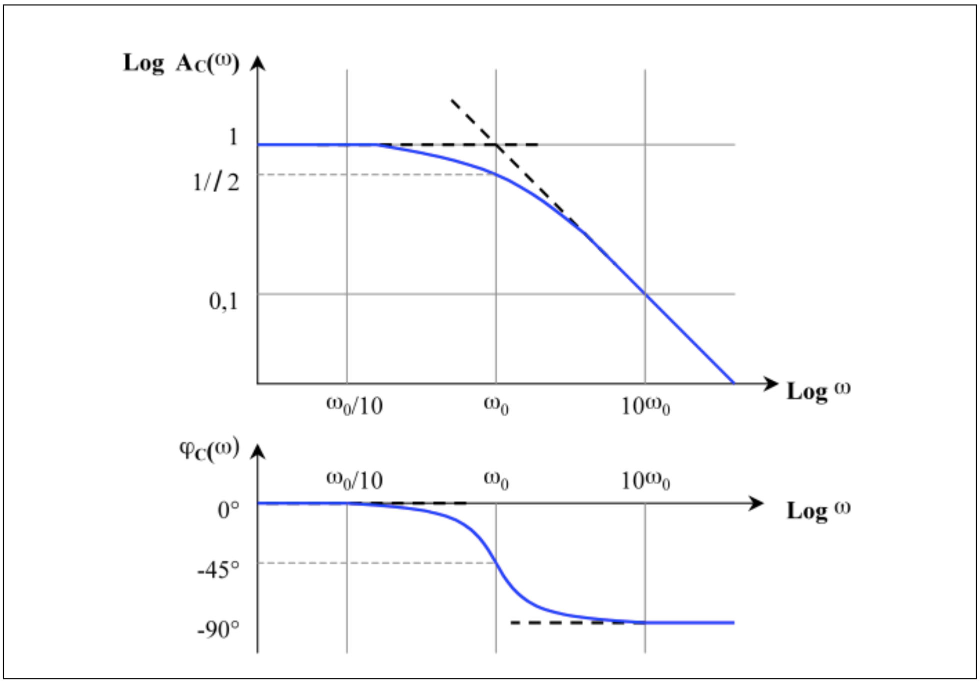

FIGURE 5.12 – réponse en fréquence d'un circuit passe-bas du 1er ordre

Les courbes de Bode permettent de voir en un coup d'œil quel est l'effet du circuit sur un signal d'entrée en fonction de la fréquence de ce signal. En effet, une fois une valeur de fréquence (ou pulsation) choisie sur l'axe horizontal :

- le graphe supérieur donne le gain (donc la modification d'amplitude) appliqué au signal d'entrée par le circuit, sous forme d'un facteur multiplicatif
- le graphe inférieur donne le déphasage appliqué au signal d'entrée par le circuit

Le diagramme de Bode illustre bien l'idée du formalisme fréquentiel : tout en considérant mathématiquement une seule fréquence à la fois, ce formalisme permet d'étudier le comportement du circuit sur l'ensemble du spectre des fréquences.

La raison pour laquelle on utilise dans ces graphes le logarithme du gain et le logarithme de la fréquence est que ces deux variables varient potentiellement sur de nombreux ordres de grandeur. La phase par contre varie forcément dans une gamme limitée (360°), de sorte que le recours aux logarithmes n'est pas nécessaire. L'annexe 6.1 rappelle plus en détail les notions de logarithme et de décibel (dB), à maîtriser absolument dans ce contexte.

Le diagramme de Bode n'est pas uniquement une construction théorique : dans une installation ou un logiciel audio, l'équaliseur est un module qui permet de contrôler la "couleur" du signal musical, notamment la balance entre basses et aiguës. La manière la plus visuelle de le faire s'avère précisément d'utiliser un diagramme de Bode. On notera par exemple sur la capture d'écran figure 5.13 la graduation en dB de l'axe vertical et la graduation logarithmique de l'axe horizontal des fréquences (en Hz). Dans son principe, cette figure n'est rien d'autre qu'un diagramme de Bode. (La phase n'est pas représentée.)

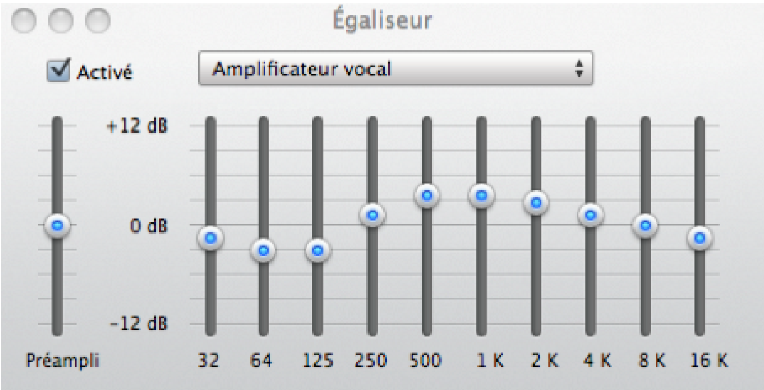

FIGURE 5.13 – copie d'écran de l'équaliseur dans iTunes. Le profil sélectionné ici a pour but de faire ressortir la voix humaine, typiquement entre 250Hz et 4kHz

5.4.3 Courbes de Bode : principes de base et pièges à éviter

Les courbes de Bode étant la manière la plus courante de représenter l'action d'un circuit linéaire sur un signal, on sera très souvent amené à en lire ou en tracer.

Les courbes de Bode d'un circuit peuvent s'obtenir :

- soit sur base de mesures (du gain et du déphasage) réalisées à différentes fréquences et reportées dans les axes adéquats
- soit sur base de calculs si l'on connaît l'expression mathématique de la réponse en fréquence du circuit $H(j\omega)$.

Dans cette dernière option, pour tracer un point des courbes (plus exactement : les valeurs de gain et de phase correspondant à une fréquence), il faudra successivement :

- choisir une fréquence (exprimée sous forme de fréquence ou de pulsation, sans oublier qu'il existe un facteur 2π entre ces deux grandeurs)
- calculer les valeurs de gain et de phase en insérant la valeur de fréquence dans la réponse en fréquence et en exprimant le nombre complexe résultant sous forme polaire (module et phase)
- reporter correctement les valeurs obtenues dans les axes adéquats : bi-logarithmique pour le gain, semi-logarithmique pour la phase

Cette dernière étape est remplie de pièges. Sans un peu d'habitude, le tracé d'un graphe sur papier logarithmique s'apparente à un parcours d'obstacles. L'expérience montre qu'il y a trois pièges à éviter :

1er piège : calculer le logarithme deux fois

Concrètement, il faut choisir avant de tracer un diagramme de Bode si on le fait sur papier millimétré normal ou sur papier logarithmique :

- si l'on dispose de papier millimétré, il faut reporter les logarithmes (en dB pour le gain) des valeurs de gain et de fréquence sur celui-ci. (La phase peut être reportée directement sans calcul.)
- pour éviter de devoir calculer ces logarithmes, une alternative consiste à utiliser du papier logarithmique (une feuille bilogarithmique pour le gain, une feuille semi-logarithmique pour la phase ou encore une feuille directement prévue avec les deux graphes pour les diagramme de Bode) : ses graduations intègrent déjà le calcul du logarithme, d'où leur "distorsion" par rapport à des axes classiques. Dans ce cas, ce sont bien les valeurs "classiques" du gain et de la fréquence (= avant d'en avoir pris le logarithme) qu'il convient de reporter directement dans les axes. C'est par exemple le cas dans la figure 5.12.

L'erreur à ne pas commettre est donc de calculer le logarithme du gain ou de la fréquence lorsqu'on dispose de papier logarithmique, puisque cela reviendrait à tracer $Log(Log A)$ ou $Log(Log f)$. A retenir :

si l'on utilise du papier logarithmique,
on n'a aucun logarithme à calculer

Néanmoins avant même de reporter les valeurs, deux autres pièges sont à éviter :

2e piège : inverser le papier logarithmique

Un graphe comportant un ou deux axes logarithmiques possède une seule orientation correcte. En pratique, les plus grandes cases de l'axe logarithmique doivent se trouver en bas et à gauche de la feuille. Retourner le graphe de 180° mène à des résultats aberrants…

3e piège : mettre une graduation "zéro"

Sur du papier logarithmique (où donc, on reporte les valeurs "classiques"), on ne peut jamais indiquer de graduation "0" (en effet, un rapport de valeur 0 correspondrait à "moins l'infini" en dB). Les graduations principales de l'axe logarithmique correspondent normalement aux puissances successives de 10. Un bon point de départ est donc de mettre une graduation "1" ou une puissance de 10 (mais surtout pas un "0") sur une de ces graduations principales, puis de fixer les valeurs des autres graduations en utilisant chaque fois un facteur 10.

Outre le report dans un diagramme de Bode de valeur mesurées ou calculées, il est également possible de déduire rapidement l'allure générale des courbes de Bode en utilisant la technique du tracé asymptotique. Celle-ci est détaillée dans le paragraphe suivant.

5.4.4 Tracé asymptotique de $H(j\omega)$: 1re manière

Le principe du **tracé asymptotique** consiste à obtenir une *approximation* de la réponse en fréquence en remplaçant celle-ci par une fonction uniquement constituée de segments de droite, qui en constituent les asymptotes. Cette approximation est évidemment plus simple et rapide à tracer que la fonction initiale. Le tracé asymptotique est ensuite généralement complété de quelques points "bien choisis" calculés plus précisément.

Dans tous les cas, il convient d'abord d'identifier les différents "domaines de fréquence" de la fonction. Lorsque $H(j\omega)$ est du premier ou du deuxième ordre [14], ces fréquences sont les fréquences de coupure, connues via la forme canonique de la fonction.

Pour réaliser ensuite le tracé asymptotique proprement dit, une première technique consiste à négliger, au numérateur et au dénominateur de la réponse en fréquence, les termes les moins significatifs, dans le but de ne garder dans chaque domaine de fréquence que les termes dominants. On ramène ainsi l'expression de la réponse en fréquence à une droite, qui en est l'asymptote dans ce domaine de fréquence. Cette technique de simplification est illustrée en fin de chapitre sur les circuits RC et RL (voir §§6.8 et 6.9).

La technique de "réduction" de l'expression de la réponse en fréquence repose sur les principes suivants :

- dans un polynôme, négliger les termes d'exposant inférieur à l'exposant le plus élevé (autrement dit : ne garder que le terme d'exposant le plus élevé)
- dans une fraction, simplifier les facteurs identiques au numérateurs et au dénominateur

Concrètement, il s'agit donc de :

- au numérateur, ne garder que le terme d'exposant le plus élevé
- au dénominateur, ne garder que le terme d'exposant le plus élevé
- simplifier ensuite ce qui peut l'être entre numérateur et dénominateur

💣 De nombreux étudiants ont une forte tendance à utiliser un mélange des deux principes précédents : simplifier des *termes* similaires entre numérateur et dénominateur (en ce compris éventuellement le terme d'exposant le plus élevé, ce qui ne laisse... rien au numérateur ou au dénominateur). Ceci contredit les règles élémentaires de simplification d'une fraction et est totalement à proscrire si l'on veut obtenir un résultat correct...

14. La présence d'un ordre plus élevé de la fonction $H(j\omega)$ est un premier argument pour utiliser la méthode "pôles et zéros" expliquée à la section suivante (§5.5.8).

Cette première technique de tracé asymptotique est brièvement illustrée en annexe sur les circuits élémentaires (§6.8 et §6.9).

Une technique alternative, plus puissante, est proposée à la section suivante.

5.5 Analyse fréquentielle (III) : tracé asymptotique "pôles et zéros" d'une réponse en fréquence $H(j\omega)$

La technique du tracé asymptotique, définie à la fin de la section précédente, peut être rendue plus rapide et systématique en utilisant les notions de pôles et de zéros. Celles-ci proviennent de l'analyse complexe et permettent des analyses plus poussées encore du comportement des circuits. Sans être strictement indispensables dans le cadre de ce cours, elles sont donc intéressantes à connaître.

Ces notions sont néanmoins relativement complexes à exposer, en tout cas si l'on veut garder une certaine rigueur scientifique. Ce chapitre peut donc être lu de deux manières : soit comme un exposé sur ce que sont les pôles et les zéros (lecture complète), soit comme un exposé de la procédure concrète à suivre pour réaliser un tracé asymptotique (auquel cas certaines sections, qui seront indiquées, peuvent être passées). Quelques explications complémentaires sont par ailleurs renvoyées en annexes pour alléger le tout.

5.5.1 Principe et justification initiale

Le tracé asymptotique exploitant les notions de pôles et de zéros repose sur l'idée qu'on peut analyser séparément l'influence sur les courbes de Bode de chaque facteur composant la réponse en fréquence. Ceci permet de fragmenter, et donc de simplifier, l'analyse d'une fonction $H()$ quelque peu complexe. Cette technique repose implicitement sur la propriété suivante :

Le diagramme de Bode d'une réponse en fréquence est la *somme* des diagrammes de Bode individuels de ses différents *facteurs*

La justification de ce principe découle directement de la définition même des courbes de Bode et des propriétés de base des logarithmes. En effet, concernant la courbe du *gain* :

- d'une part les courbes de Bode représentent le *logarithme* du gain
- d'autre part le logarithme d'un produit $X.Y$ est égal à la *somme* des logarithmes de X et de Y (voir §6.1).

En conséquence, si une réponse en fréquence est le produit d'un certain nombre de facteurs $H_1()$, $H_2()$, $H_3()$, etc... son diagramme de Bode est la somme des diagrammes de Bode individuels des fonctions $H_1()$, $H_2()$, $H_3()$, etc.

De manière plus détaillée, si on considère par exemple une fonction :

$$H(j\omega) = H_1(j\omega).H_2(j\omega) \tag{5.79}$$

telle que :

$$H_i(j\omega) = A_i(\omega)e^{j\varphi_i(\omega)} \tag{5.80}$$

il vient :

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \\ &= A_1(\omega)A_2(\omega)e^{j(\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega))} \end{aligned} \tag{5.81}$$

et on obtient bien :

$$\begin{aligned} A(\omega) &= A_1(\omega)A_2(\omega) \\ \varphi(\omega) &= \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) \end{aligned} \tag{5.82}$$

Si l'on se rappelle que dans un diagramme de Bode, on trace le gain en décibels, c'est-à-dire qu'on trace la variable :

$$A[dB] = 20LogA(\omega) \tag{5.83}$$

On obtient compte tenu des équations précédentes :

$$\begin{aligned} A[dB] &= 20Log[A_1(\omega).A_2(\omega)] \\ &= 20LogA_1(\omega) + 20LogA_2(\omega) \\ &= A_1[dB] + A_2[dB] \end{aligned} \tag{5.84}$$

Le graphe du gain total correspond donc bien à la somme des gains en dB de chaque facteur, et donc à la somme des courbes de Bode individuelles des différents gains $H_1()$, $H_2()$, $H_3()$, etc.

Par ailleurs on peut également vérifier dans les équations ci-dessus que la phase de $H()$ est bien la somme des phases de $H_1()$ et de $H_2()$ (on peut donc bien sommer les graphes de phase correspondants).

Les diagrammes de Bode individuels des facteurs composant une fonction de transfert sont donc sommables.

5.5.2 Tracé asymptotique "pôles et zéros" : 4 étapes

La procédure de tracé asymptotique exploitant les notions de pôles et de zéros comprend 4 étapes :

- étape 1 : factoriser la réponse en fréquence $H(j\omega)$
- étape 2 : identifier les pôles et les zéros
- étape 3 : définir les intervalles de fréquence
- étape 4 : dans chaque intervalle, tracer l'asymptote (gain et phase)

5.5.3 Etape 1 : factoriser la réponse en fréquence $H(j\omega)$

On peut montrer que la réponse en fréquence d'un quadripôle linéaire est une fonction rationnelle de $j\omega$. En d'autres termes, elle peut toujours s'écrire sous la forme d'un quotient de polynômes en $j\omega$, qui peuvent toujours se factoriser sous la forme d'un produit de facteurs du premier ou du second degré.

Nous reviendrons au §5.5.7 sur les facteurs du second degré. Dans l'immédiat, si nous supposons uniquement la présence de facteurs du premier degré (et d'un éventuel facteur de degré 0 c'est-à-dire une constante A_0), cela signifie que la réponse en fréquence peut toujours se mettre sous la forme :

$$H(j\omega) = A_0(j\omega)^k \frac{\left(1+\frac{j\omega}{n_0}\right)\left(1+\frac{j\omega}{n_1}\right)\ldots\left(1+\frac{j\omega}{n_N}\right)}{\left(1+\frac{j\omega}{d_0}\right)\left(1+\frac{j\omega}{d_1}\right)\ldots\left(1+\frac{j\omega}{d_D}\right)} \tag{5.85}$$

La première étape de la procédure de tracé asymptotique consistera précisément, en partant du circuit ou de ses équations, à exprimer la réponse en fréquence sous une forme identique à celle ci-dessus.

5.5.4 Etape 2 : identifier les pôles et les zéros

Pôles et zéros : définition initiale en $H(j\omega)$

En toute rigueur, les concepts de pôle et de zéro ne sont pas directement définis à partir de la réponse en fréquence et de la variable $j\omega$, mais à partir de la **fonction de transfert** $H(p)$.

Néanmoins la définition des notions de pôles et zéros sur base de cette fonction $H(p)$ n'est pas strictement utile dans le cadre d'un tracé asymptotique. Nous nous contenterons donc dans un premier temps de définir ces notions de manière plus pragmatique, sur base de la fonction $H(j\omega)$ que nous connaissons déjà. Cette définition est à considérer comme une approximation. Le lien avec la fonction $H(p)$ sera clarifié au §5.5.5 pour les lecteurs intéressés.

Dans l'immédiat, nous pouvons interpréter les notions de **pôle** et de **zéro** de la manière suivante :

Les pôles et les zéros décrivent de manière concise la forme mathématique (= les différents facteurs) de la réponse en fréquence

Comme on va le voir, les pôles et zéros traduisent en effet simplement la présence de facteurs d'une certaine forme dans la fonction $H()$. Si en soi, ceci est déjà intéressant, les pôles et zéros possèdent une propriété plus intéressante encore :

Les pôles et les zéros sont (au signe près) :
les valeurs de la pulsation ω auxquelles le comportement asymptotique de la réponse en fréquence $H(j\omega)$ change

Dans le cadre d'un tracé asymptotique, cette propriété présente évidemment beaucoup d'intérêt. Elle est justifiée au §6.10 et sera directement exploitée à l'étape 3 de la procédure (§5.5.8).

Avant cela, précisons d'abord pratiquement ce que sont les pôles et zéros conformément au premier encadré.

Pôle ou zéro simple

Concrètement, et en supposant que la fonction $H()$ est composée de plusieurs facteurs comme expliqué à l'étape 1, nous dirons qu'un facteur de la forme :

$$\left(1+\frac{j\omega}{\sigma_i}\right) \tag{5.86}$$

- introduit un "**zéro** en $-\sigma_i$" s'il est présent au *numérateur* de $H()$

- introduit un "**pôle** en $-\sigma_i$" s'il est présent au *dénominateur* de $H()$

On notera le signe "moins" présent dans la valeur du pôle ou du zéro, alors que ce signe n'apparaît pas dans la fonction $H()$: la raison en apparaîtra au §5.5.5.

Pôle ou zéro multiple

On peut généraliser en disant que si un tel facteur est présent plusieurs fois dans la fonction $H()$ (pour une même valeur σ_i), et donc possède dans celle-ci un exposant k :

$$\left(1+\frac{j\omega}{\sigma_i}\right)^k \tag{5.87}$$

la fonction $H()$ possède k "zéros ou pôles en $-\sigma_i$" (suivant que le facteur est présent respectivement au *numérateur* ou au *dénominateur*).

On parle dans ce cas de pôles ou de zéros *multiples*, par opposition au cas précédent (k=1), où les pôles/zéros sont dits *simples*.

Pôles ou zéros complexes conjugués

Ce type de pôles/zéros implique la présence de facteurs du second degré. Ce cas est spécifiquement traité au §5.5.7. Il s'apparente au cas des pôles/zéros multiples.

Pôle ou zéro à l'origine

Enfin on dira que le facteur

$$(j\omega)^k$$

- introduit k **zéros à l'origine** (ou *"k zéros en 0"*[15]) s'il est présent au numérateur de $H()$
- introduit k **pôles à l'origine** (ou *"k pôles en 0"*) s'il est présent au dénominateur de $H()$

Gain constant

Outre les facteurs dépendant de ω, la fonction $H()$ contiendra typiquement un facteur constant A_0 qui représente la valeur du gain à fréquence nulle (= en continu).

15. La notion de "zéro en 0" est évidemment un peu difficile à appréhender à ce stade. Elle se clarifiera dans la suite, mais recouvre bien deux "zéros" de natures tout-à-fait différentes.

Exemple

Par exemple, la fonction :

$$H(j\omega) = 4j\omega \frac{\left(1+\frac{j\omega}{5}\right)^3}{\left(1+\frac{j\omega}{7}\right)} \tag{5.88}$$

possède :
- un pôle en -7
- trois zéros en -5
- un zéro en 0
- et un gain en continu de 4

On voit donc bien qu'à chaque facteur de la réponse en fréquence correspond un type particulier (et une valeur particulière) de pôle ou de zéro. A ce stade, nous avons donc simplement introduit un vocabulaire permettant de décrire de manière concise la forme mathématique précise de $H(j\omega)$.

La section qui suit expose le lien avec la fonction $H(p)$. Pour la suite de la procédure de tracé, on peut directement se reporter au §5.5.7.

5.5.5 Définitions rigoureuses en $H(p)$

Fonction de transfert $H(p)$

Si l'on veut être plus rigoureux, les notions de pôles et de zéros ne se conçoivent que dans le cadre de la fonction de transfert ou transmittance isomorphe $H(p)$.

Celle-ci s'obtient simplement en remplaçant le facteur $j\omega$ de la réponse en fréquence par la variable p, appelée variable de Laplace[16]. De manière générale, la fonction de transfert d'un circuit est donc de la forme :

$$H(p) = A_0 p^k \frac{\left(1+\frac{p}{n_0}\right)\left(1+\frac{p}{n_1}\right)\ldots\left(1+\frac{p}{n_N}\right)}{\left(1+\frac{p}{d_0}\right)\left(1+\frac{p}{d_1}\right)\ldots\left(1+\frac{p}{d_D}\right)} \tag{5.89}$$

où les valeurs σ_i sont des réels positifs ou nuls[17].

La différence par rapport à la réponse en fréquence réside dans le fait que la variable de Laplace est un nombre complexe, c'est-à-dire possède à la fois une partie réelle et une partie imaginaire :

$$p = \sigma + j\xi \tag{5.90}$$

La variable sur laquelle opère la fonction de transfert est donc une variable à *deux dimensions* (dans le plan complexe), tandis que la réponse en fréquence n'opère que sur une variable à une dimension : la pulsation ω.

16. La variable de Laplace se note également souvent s
17. pour rappel : voir §5.5.7 pour le cas des facteurs du second degré

Cette différence permet de réaliser, via la fonction de transfert, des analyses plus poussées qu'en utilisant simplement la réponse en fréquence. Elle permet par exemple de s'intéresser à la **stabilité** du circuit (c'est-à-dire de savoir si le circuit va spontanément osciller ou non), ce qui dépasse le simple tracé de courbes de Bode et plus globalement le cadre de ce cours.

Pôles et zéros : définition en H(p)

Compte tenu de la forme de $H(p)$ donnée ci-dessus, la définition des pôles et des zéros apparaît ici beaucoup plus directe. Par définition :

- les **zéros** sont les racines du *numérateur* de la fonction de transfert : c'est-à-dire les valeurs de p qui *annulent* $H(p)$
- les **pôles** sont les racines du *dénominateur* de la fonction de transfert : c'est-à-dire les valeurs de p qui rendent $H(p)$ *infinie*

Les pôles et les zéros sont les valeurs de p qui annulent (zéros) ou rendent infinie (pôles) la fonction de transfert $H(p)$

Lorsque la fonction de transfert est écrite comme ci-dessus, elle possède donc

- n **zéros** de valeurs respectives (i=1 à n) :

$$p = -n_i \tag{5.91}$$

- m **pôles** de valeurs respectives (j=1 à m) :

$$p = -d_j \tag{5.92}$$

- k **zéros à l'origine** (si k>0) OU k **pôles à l'origine** (si k<0)

La notion de "zéro en 0" se clarifie ici : elle signifie que la fonction $H()$ a la propriété de s'annuler ("zéro") pour la valeur nulle ("en 0") de sa variable p ou $j\omega$.

Exemple

En reprenant l'exemple déjà donné précédemment pour la réponse en fréquence, on dira que la fonction :

$$H(p) = 4p^2 \frac{\left(1 + \frac{p}{5}\right)}{\left(1 + \frac{p}{7}\right)} \tag{5.93}$$

possède :

- un pôle en p=-7
- un zéro en p=-5

- deux zéros à l'origine ("zéros en 0")
- un gain en continu de 4

Ces pôles et ces zéros, représentant chacun une valeur complexe de p, peuvent être situés graphiquement dans le plan complexe. Puisque les valeurs n_i et d_j sont des réels positifs, les pôles et zéros de la fonction $H(p)$ seront donc tous situés sur l'axe réel *négatif* (ou éventuellement à l'origine) dans le plan complexe, comme dans l'exemple ci-dessus.

5.5.6 Récapitulatif : interprétation globale des notions de pôles et zéros dans le cadre du tracé asymptotique

En résumé, pour une réponse en fréquence s'écrivant

$$H(j\omega) = A_0(j\omega)^k \frac{\left(1+\frac{j\omega}{n_0}\right)\left(1+\frac{j\omega}{n_1}\right)\ldots\left(1+\frac{j\omega}{n_N}\right)}{\left(1+\frac{j\omega}{d_0}\right)\left(1+\frac{j\omega}{d_1}\right)\ldots\left(1+\frac{j\omega}{d_D}\right)} \tag{5.94}$$

à laquelle correspond une fonction de transfert s'écrivant :

$$H(p) = A_0 p^k \frac{\left(1+\frac{p}{n_0}\right)\left(1+\frac{p}{n_1}\right)\ldots\left(1+\frac{p}{n_N}\right)}{\left(1+\frac{p}{d_0}\right)\left(1+\frac{p}{d_1}\right)\ldots\left(1+\frac{p}{d_D}\right)} \tag{5.95}$$

fonctions dans lesquelles les valeurs n_i et d_j sont des réels positifs ou nuls (et dans lesquelles pourraient également intervenir un ou plusieurs facteurs du second degré : voir §5.5.7) :

- les pôles et les zéros (de valeur $-n_i$ ou $-d_j$) sont les valeurs complexes qui annulent (zéros) ou rendent infinie (pôles) la fonction de transfert. Ces valeurs peuvent se représenter dans la partie gauche du plan complexe puisque leur partie réelle est négative ou nulle.
- par ailleurs les valeurs n_i et d_j (positives, donc correspondant aux valeurs absolues des pôles et des zéros) correspondent à l'ensemble des pulsations pour lesquelles le comportement asymptotique de la réponse en fréquence change. Par abus de langage, on dira que le comportement de la réponse en fréquence change "aux pôles" et "aux zéros", mais on désignera en disant cela des valeurs de pulsation (qui en fait possèdent le signe opposé aux pôles et au zéros).

Si l'on se contente de s'intéresser au diagramme de Bode du circuit, on pourra se contenter de cette approximation de langage, c'est-à-dire : ignorer complètement la fonction de transfert $H(p)$ en tant que telle et réaliser l'entièreté de l'analyse en $j\omega$ tout en parlant de "pôles" et de "zéros".

Les pôles et les zéros sont les valeurs de p :
qui annulent (zéros) ou rendent infinie (pôles) la fonction de transfert
et qui, en valeur absolue, donnent les valeurs de pulsation auxquelles le comportement asymptotique de la réponse en fréquence change

5.5.7 Cas particulier des facteurs du second degré

Considérons maintenant l'hypothèse où la fonction $H()$ contient un facteur du second degré, donc de forme générale :

$$[1+\alpha(j\omega)+\beta(j\omega)^2] \tag{5.96}$$

ou encore (en p) :

$$[1+\alpha p+\beta p^2] \tag{5.97}$$

Un tel facteur peut toujours être réécrit sous la forme canonique :

$$[1+2\zeta\frac{j\omega}{p_0}+\left(\frac{j\omega}{p_0}\right)^2] \tag{5.98}$$

ou encore (en p) :

$$[1+2\zeta\frac{p}{p_0}+\left(\frac{p}{p_0}\right)^2] \tag{5.99}$$

Ce facteur possède deux racines (et introduira donc deux zéros ou deux pôles suivant qu'il est au numérateur ou au dénominateur), qui sont de la forme :

$$p_1, p_2 = -p_0\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1}\right) \tag{5.100}$$

Trois scénarios sont alors envisageables (en fonction de la valeur de ζ, d'où l'intérêt d'utiliser la forme canonique) :

- lorsque $\zeta > 1$, la fonction possède deux racines réelles distinctes et est donc décomposable en deux facteurs du premier degré. On retombe alors sur un cas déjà envisagé : deux pôles ou zéros simples distincts $-p_1$ et $-p_2$;
- lorsque $\zeta = 1$, la fonction possède une racine double en $-p_0$. On retombe également sur un cas déjà envisagé : deux pôles ou zéros doubles en $-p_0$;
- lorsque $\zeta < 1$, la fonction possède deux **racines complexes conjuguées**, ce qui est une situation nouvelle.

Dans ce dernier cas, les deux racines peuvent être réécrites de manière à faire apparaître plus explicitement leurs parties réelle et imaginaire :

$$p_1, p_2 = -p_0\left(\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\right) \tag{5.101}$$

Concernant la fonction de transfert $H(p)$, cela implique que lorsqu'on représentera les pôles et les zéros dans le plan complexe, ces pôles ou zéros complexes conjugués ne se trouvent plus sur l'axe réel, mais au contraire possèdent la même abscisse (négative comme les autres pôles et zéros, et de valeur $-p_0\zeta$), et des ordonnées opposées : ils se placeront donc symétriquement autour de l'axe horizontal du plan complexe [18].

18. mais à nouveau cette interprétation, si nous elle permet de visaliser les choses, ne nous est pas directement utile pour un tracé asymptotique

Concernant la réponse en fréquence $H(j\omega)$, qui nous intéresse davantage ici, on peut montrer que (voir §6.11 pour un développement plus détaillé) :

- la valeur p_0 représente ici aussi une valeur de pulsation où le comportement asymptotique change ;
- autour de cette valeur (à des pulsations beaucoup plus élevées ou beaucoup plus basses), le comportement *asymptotique* de ce facteur de $H(j\omega)$ est rigoureusement le même que celui qui serait causé par deux facteurs du premier degré identiques (zéros ou pôles doubles) [19] ;
- à la pulsation p_0, le comportement est par contre différent de celui d'une racine double : la réponse en fréquence réelle peut ici s'écarter très nettement du croisement de ses asymptotes. En particulier lorsque $\zeta = 0$ et que le facteur se trouve au dénominateur (cas des pôles complexes conjugués), la valeur de $H(j\omega)$ devient théoriquement *infinie* : c'est le phénomène de **résonance**. Cette valeur infinie est due au fait que dans ces conditions, le facteur du second degré prend lui-même une valeur nulle (en tant que nombre complexe : $0 + j0$), une situation qui est impossible pour un facteur du premier degré.

Mis à part à l'endroit même de la résonance (pulsation p_0), où le tracé de la fonction hors asymptote doit être précisé et dépend du paramètre ζ, un facteur du second degré possède le même tracé asymptotique qu'un facteur double du premier degré.

5.5.8 Etape 3 : identifier les intervalles de fréquence

Principe

Concrètement, l'étape 2 ci-dessus a surtout consisté à introduire un vocabulaire spécifique pour parler des facteurs composant la réponse en fréquence, facteurs qui avaient été identifiés à l'étape 1.

Qu'on choisisse [20] une formulation en $j\omega$ ou en p, on dispose à ce stade d'une fonction $H()$ sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$H(j\omega) = A_0(j\omega)^k \frac{\left(1+\frac{j\omega}{n_0}\right)\left(1+\frac{j\omega}{n_1}\right)...\left(1+\frac{j\omega}{n_N}\right)}{\left(1+\frac{j\omega}{d_0}\right)\left(1+\frac{j\omega}{d_1}\right)...\left(1+\frac{j\omega}{d_D}\right)} \tag{5.102}$$

ou

19. c'est-à-dire : avant la pulsation p_0 une asymptote horizontale d'ordonnée 1 ; et après la pulsation p_0 une variation de la phase de 180° et une asymptote oblique de pente *plus* ou *moins* 40dB/décade suivant que le facteur du second degré se trouve au numérateur ou au dénominateur

20. dans le cadre du tracé asymptotique d'un diagramme de Bode, ce choix est bien essentiellement une question de goût

$$H(p) = A_0 p^k \frac{\left(1+\frac{p}{n_0}\right)\left(1+\frac{p}{n_1}\right)\ldots\left(1+\frac{p}{n_N}\right)}{\left(1+\frac{p}{d_0}\right)\left(1+\frac{p}{d_1}\right)\ldots\left(1+\frac{p}{d_D}\right)} \tag{5.103}$$

où les valeurs n_i et d_j sont des réels positifs ou nuls.
Ces valeurs représentent :

- au signe près, les pôles et les zéros de la fonction de transfert
- de manière plus intéressante dans le cadre d'un tracé asymptotique : en tant que valeurs positives ou nulle, les *pulsations où le comportement asymptotique est modifié*

Des facteurs du second degré pourraient de surcroît apparaître. Chacun de ceux-ci introduit deux pôles ou deux zéros (réels ou complexes conjugués) de partie réelle $-p_0\zeta$.

Une fois la fonction $H()$ factorisée, c'est-à-dire ici dès les valeurs de tous les pôles et zéros identifiées, la troisième étape consiste simplement à lister ces pulsations "critiques" par ordre croissant. Chacune de ces valeurs définira alors la limite gauche ou droite d'un intervalle de fréquence dans lequel le comportement asymptotique de $H(j\omega)$ pourra être calculé.

Exemple

Pour reprendre l'exemple précédent : pour la fonction

$$H(j\omega) = 4(j\omega)^2 \frac{\left(1+\frac{j\omega}{5}\right)}{\left(1+\frac{j\omega}{7}\right)} \tag{5.104}$$

ou

$$H(p) = 4p^2 \frac{\left(1+\frac{p}{5}\right)}{\left(1+\frac{p}{7}\right)} \tag{5.105}$$

qui possède un pôle en -7, un zéro en -5 et deux zéros à l'origine, les pulsations critiques seront donc par ordre croissant : 0, 5 et 7 (rad/s).

Ces valeurs définissent trois intervalles de pulsation (valeurs en rad/s) :

- intervalle I : $[0;5]$
- intervalle II : $[5;7]$
- intervalle II : $[7;[$

5.5.9 Etape 4 : réaliser le tracé asymptotique

Le tracé asymptotique de la réponse en fréquence peut être directement déduit de la connaissance des pôles et des zéros, c'est-à-dire des facteurs élémentaires composant la fonction $H()$.

Le principe général consiste à balayer l'axe des pulsations en considérant des valeurs croissantes de ω, et à appliquer au passage de chaque pôle ou zéro une modification du gain et de la phase dépendant du type de pôle ou zéro considéré. Pour la facilité, ces modifications sont reprises sous forme de tableau en fin de section (§5.5.10).

On procédera concrètement en deux phases :

Phase I : pôles et zéros à l'origine

La première phase concerne uniquement les valeurs de pulsation situées à gauche[21] du *premier pôle ou zéro non nul.*

Deux cas doivent être distingués suivant qu'il existe ou non des pôles ou zéros à l'origine :

- en l'absence de pôles et de zéros à l'origine (ligne 1 du tableau), la réponse en fréquence se réduit à $H(j\omega) = A_0$. Elle vaut donc une constante dans toute cette gamme de pulsations. Dans les courbes de Bode, le gain est une asymptote horizontale d'ordonnée A_0 et la phase est nulle.
- en présence de k pôles ou zéros à l'origine, la réponse en fréquence n'est par contre plus constante. Dans les courbes de Bode, cela se traduit pour le gain par une asymptote oblique de pente k (pente positive pour un ou des pôle(s), négative pour un ou des zéro(s)) et une phase valant autant de fois 90° qu'il y a de pôles ou de zéros (voir lignes 2 et 3 du tableau).
- dans ce second cas de figure, on ne peut tracer l'asymptote oblique du gain sans avoir identifié un point de passage de celle-ci (puisqu'on n'en connaît à ce stade que la pente). Il découle de l'approximation asymptotique de $H(j\omega)$ dans ce domaine que la droite du gain passe par le point $(1, A_0)$.

Phase II : pôles et zéros non nuls

Pour les autres intervalles de pulsation, il suffit ensuite de prendre un à un les pôles et les zéros restants par ordre de pulsation croissante[22], et à appliquer, au passage de chaque pôle ou zéro, la modification reprise dans le tableau (lignes 4 et 5).

Concrètement, chaque pôle ou zéro modifie :

- la pente du gain d'une unité
- la valeur de la phase de 90°

Attention, il s'agit donc bien d'*incrémenter* (pour les zéros) ou de *décrémenter* (pour les pôles) la pente du gain et la valeur de la phase au passage des pôles et des zéros, par rapport au domaine de fréquence précédent.

21. en regardant l'axe des pulsations, c'est-à-dire plus rigoureusement : *pour les valeurs de pulsation inférieures à la pulsation du premier pôle ou zéro non nul*
22. c'est-à-dire par valeurs absolues croissantes, tous pôles et zéros confondus

Pôles/zéros complexes conjugués

En présence de pôles ou zéros complexes conjugués (forcément non nuls, donc apparaissant dans cette phase II), la règle reste identique pour le tracé asymptotique proprement dit : au passage de ceux-ci, il suffit de les considérer comme des pôles ou zéros doubles, c'est-à-dire d'appliquer la règle générale pour $k = 2$. La pente du gain varie donc de 2 unités et la phase de 180°.

Il faudra néanmoins se rappeler que l'éventuelle résonance due à ces pôles ou zéros complexes conjugués (voir §5.5.7) n'est par principe pas visible dans le tracé asymptotique. Autour de ces valeurs de pulsation, le comportement de la réponse en fréquence réelle peut donc être extrêmement différent du tracé asymptotique. Il restera donc à finaliser le tracé (voir ci-après).

5.5.10 Tableau récapitulatif pour le tracé asymptotique

	pôle ou zéro simple (k=1)	k pôles ou zéros multiples
en l'absence de pôles et de zéros à l'origine :	*jusqu'au premier pôle ou zéro non nul :* $A = A_0$ (asympt. horiz.) $\phi = 0°$	*jusqu'au premier pôle ou zéro non nul :* $A = A_0$ (asympt. horiz.) $\phi = 0°$
en présence de zéro(s) à l'origine :	*jusqu'au premier pôle ou zéro non nul :* pente $A = +1$ $\phi = +90°$ et $A = A_0$ en $\omega = 1$	*jusqu'au premier pôle ou zéro non nul :* pente $A = +k$ $\phi = +k.90°$ et $A = A_0$ en $\omega = 1$
en présence de pôle(s) à l'origine :	*jusqu'au premier pôle ou zéro non nul :* pente $A = -1$ $\phi = -90°$ et $A = A_0$ en $\omega = 1$	*jusqu'au premier pôle ou zéro non nul :* pente $A = -k$ $\phi = -k.90°$ et $A = A_0$ en $\omega = 1$
au passage de zéro(s) non nul(s)	pente $A \nearrow 1$ $\phi \nearrow 90°$	pente $A \nearrow k$ $\phi \nearrow k.90°$
au passage de pôle(s) non nul(s)	pente $A \searrow 1$ $\phi \searrow 90°$	pente $A \searrow k$ $\phi \searrow k.90°$

Pour une justification du contenu de ce tableau : voir §6.11.

5.5.11 Finalisation du tracé

Une fois le tracé *asymptotique* connu, il convient pour obtenir une meilleure idée des courbes de Bode *réelles* de calculer les valeurs du gain et de la phase en quelques points choisis (en pratique : aux alentours des pôles et zéros). Pour chacun de ces points, il suffit pour cela de remplacer ω par la valeur de pulsation choisie, de calculer la valeur de $H()$ correspondante (gain et phase), et de reporter le tout au bon endroit dans les courbes de Bode.

Aux pôles et aux zéros, cette opération sera encore facilitée par les propriétés suivantes :

- un facteur du premier degré introduit en sa pulsation de coupure (le pôle ou le zéro) une variation de 3dB par rapport à son asymptote horizontale (voir annexes §6.1, §6.8 et §6.9),
- pour un facteur du second degré, la valeur de ζ donne une bonne idée de l'ampleur de la résonance éventuelle (voir §5.5.7).

5.5.12 Conclusion

Si le tracé asymptotique "pôles" et "zéros" est assez complexe à exposer, la procédure de tracé est en elle-même assez simple. Nous l'avons exposée comme comprenant quatre étapes par souci de clarté, mais en réalité factoriser la fonction $H()$ sous la forme canonique proposée (étape 1) revient immédiatement à identifier les pôles et les zéros (étape 2), qu'il suffit ensuite de classer par ordre croissant (étape 3). Les trois premières étapes peuvent donc être groupées sans difficulté, avant de réaliser le tracé proprement dit (étape 4).

Ceci étant posé, c'est comme toujours un peu de pratique qui permet de se rendre compte du cheminement exact à réaliser...

Chapitre 6

Composants réactifs : annexes

Cette section regroupe un ensemble de développements relatifs aux composants réactifs qui sont autant d'éléments de référence.

Le §6.1 rappelle les notions liées aux décibels et aux logarithmes, indispensables mais souvent mal maîtrisées.

Un ensemble de sections est ensuite consacré à l'étude des circuits du premier ordre (RC et RL) selon différents formalismes. Ces sections permettent de comparer entre eux autant les circuits que les formalismes, dans un ensemble de notations cohérentes. Elles illustrent par ailleurs par des exemples pratiques les notions exposées précédemment dans ce chapitre. Ainsi :

- La résolution temporelle (voie analytique) des circuits RC et RL est réalisée aux §§6.2 et 6.3 ;
- ces mêmes circuits sont résolus en phaseurs et impédances aux §§ 6.4 et 6.5 ;
- on en calcule ensuite les réponses en fréquence aux §§6.6 et 6.7 ;
- pour en tracer ensuite les différentes courbes de Bode (passe-haut et passe-bas) selon les deux méthodes exposées précédemment aux §§6.8 et 6.9

Enfin les trois dernières sections clarifient des éléments relevant de l'analyse complexe :

- au§6.10 : la correspondance entre les variables p et $j\omega$;
- au §6.11 : la justification des comportements à appliquer aux courbes de Bode lors d'un tracé asymptotique "pôles et zéros" ;
- au §6.12 : les liens existant entre quelques concepts fondamentaux des analyses temporelle et fréquentielle.

6.1 Décibels et logarithmes

Dans les courbes de Bode, le gain et la fréquence sont représentés en valeur logarithmique. Le gain est en particulier formulé en décibels.

Les logarithmes et décibels présentent plusieurs avantages importants qui justifient leur utilisation dans ce contexte.

Logarithmes

Considérons le logarithme Y d'un nombre X :

$$Y = Log X \tag{6.1}$$

Le logarithme Y d'une variable X peut être vu comme une distorsion de l'échelle utilisée pour exprimer X

Un premier avantage de la fonction logarithme est de modifier la représentation de la gamme de valeurs de la manière suivante :

- elle dilate l'échelle autour des faibles valeurs de X
- elle concentre l'échelle autour des grandes valeurs de X

Plus précisément, elle consacre une même plage de variation de Y pour deux valeurs de X distantes d'un même *facteur*, quelle que soit la valeur de X : une variation de X entre 1 et 10 prendra autant de place, en valeurs de Y (et donc sur un graphique à échelle logarithmique), qu'une variation de X de 10000 à 100000. En d'autres termes, elles transforme une progression géométrique X en progression linéaire Y. Ceci convient particulièrement bien pour l'étude des réponses en fréquence de circuits électriques ou électroniques (voir sections suivantes).

Un deuxième avantage de la représentation logarithmique est qu'un nombre X très grand ou très petit sera représenté de manière beaucoup plus concise sous forme logarithmique Y :

Par exemple :

- X = 1000000000 => Y = 9
- X = 0,0000001 => Y = -7

Le logarithme permet en particulier de représenter plus facilement des nombres comportant de nombreux zéros (ce qui limite le risque d'erreur) ou variant sur des gammes très larges. Ceci est en soi une raison suffisante d'utiliser les logarithmes pour le gain et la fréquence, qui varient en effet sur de nombreux ordres de grandeur [1] :

- un gain en tension peut varier couramment entre 1 et 100000,

1. La phase, elle, se contente de varier entre 0° et 360°. Il n'y a donc pas d'intérêt à l'exprimer sous forme logarithmique, d'où le fait que le graphe de la phase est semi-logarithmique. En d'autres termes, la phase reste représentée sur une échelle linéaire.

- la fréquence varie entre 0Hz (continu) et quelques GHz.

Un troisième avantage découle de la propriété suivante : le logarithme du produit est égal à la somme des logarithmes :

$$Log(A.B) = Log A + Log B \tag{6.2}$$

En d'autres termes, lorsqu'on travaille en logarithmes on peut remplacer la multiplication de deux nombres par la somme de leurs logarithmes. On réalise ainsi un gain de temps tout en minimisant le risque d'erreur : pour reprendre l'exemple déjà donné ci-dessus, il est beaucoup plus facile et beaucoup moins risqué en termes d'erreurs d'écrire et de calculer :

$$9 - 7 = 2 \tag{6.3}$$

que d'écrire et de calculer :

$$1000000000.0,0000001 = 100 \tag{6.4}$$

Cet avantage sera particulièrement pertinent pour calculer le gain résultant de la mise en cascade d'équipements successifs (voir aussi ci-dessous).

Décibels

Le gain est non seulement exprimé sous forme logarithmique, mais plus particulièrement en décibels.

Le **décibel** (notation : **dB**) est une unité utilisée spécifiquement pour représenter un rapport de deux grandeurs du même type. Elle est donc purement relative et adimensionnelle [2].

Si X est un rapport de deux tensions (ou de deux courants), la valeur de X en décibels vaut 20 fois le logarithme en base 10 de X :

$$X[dB] = 20 Log X \tag{6.5}$$

Par exemple, pour un amplificateur :

- un gain de 10 (facteur multiplicatif de la tension) sera synonyme d'un gain de 20 dB (car 20 Log 10 = 20)
- un gain de 100 sera synonyme d'un gain de 40 dB (car 20 Log 100 = 40)
- un gain d'un facteur 0,1 (atténuation) sera synonyme d'un gain de -20dB (car 20 Log 0,1 = -20), ou encore d'une perte de 20dB

2. Le décibel est utilisé dans de nombreuses disciplines et il en existe de nombreuses variantes. On ne sera donc pas étonné de trouver d'autres définitions. En particulier, il existe différentes échelles consistant à exprimer en "décibels" le rapport d'une grandeur à une valeur de référence fixe : on exprime donc toujours un rapport, mais la valeur en dB devient une mesure absolue. C'est notamment le cas de l'échelle de dB utilisée pour mesurer les sons perçus par l'oreille humaine. Lorsqu'on dit que "le seuil de douleur auditif est situé à 120dB environ", cette valeur de 120dB représente une valeur absolue de pression acoustique.

Quelques valeurs courantes sont données dans la table ci-dessous[3] :

X	Log X	X[dB]
0,00001	-5	-100 dB
0,0001	-4	-80 dB
0,001	-3	-60 dB
0,01	-2	-40 dB
0,1	-1	-20 dB
1/2	-0,3	-3 dB
$1/\sqrt{2}$	-0,15	-6 dB
1	**0**	**0 dB**
$\sqrt{2}$	0,15	3 dB
2	0,3	6 dB
10	1	20 dB
100	2	40 dB
1000	3	60 dB
10000	4	80 dB
100000	5	100 dB

Un équipement électronique, comme par exemple une table de mixage, est souvent composé de nombreux circuits successifs qui possèdent chacun un gain. Pour calculer le gain de l'ensemble du montage, il conviendra de multiplier les gains des différents circuits. Mais comme évoqué dans le paragraphe précédent, il sera encore plus facile de sommer les gains en dB des différents circuits. Par exemple, la mise en cascade d'un ampli de gain 2 (6dB) et d'un ampli de gain 10 (20dB) donne une amplification de 26dB (soit un gain de 20).

Ce qui peut se justifier comme suit :

$$AB[dB] = 20Log(A.B) = 20LogA + 20LogB = A[dB] + B[dB] \tag{6.6}$$

Définition alternative pour les rapports de puissances

Le décibel peut également être utilisé pour représenter un rapport de deux puissances, mais dans ce cas la définition est différente[4] :

$$X[dB] = 10LogX \tag{6.7}$$

Cette double définition du décibel est cohérente puisque une puissance est proportionnelle au carré d'une tension ou d'un courant. La double définition

3. les valeurs 3dB et 6dB sont des valeurs arrondies

4. La définition avec un facteur 10 (et non 20) est en fait la définition originale, d'où le "déci" dans décibel.

permet donc d'obtenir la même valeur en décibels, qu'on considère indifféremment un rapport de deux tensions ou des deux puissances correspondant à ces tensions (sur une même résistance).

En effet, si on considère une valeur X exprimant en dB un rapport de tensions :

$$X[dB] = 20Log\frac{V_A}{V_B} \tag{6.8}$$

on trouve que le rapport de puissances exprimé en dB (avec la définition adéquate : facteur 10) donne bien la même valeur X.

$$10Log\frac{P_A}{P_B} = 10Log\frac{V_A^2/R}{V_B^2/R} = 10Log\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^2 = 20Log\frac{V_A}{V_B} = X[dB] \tag{6.9}$$

Octave et décade

Pour terminer, deux termes de vocabulaire utilisés en particulier lorsqu'on parle d'écart de fréquences :

- on appelle **décade** un rapport de 10 entre deux valeurs
- on appelle **octave** un rapport de 2 entre deux valeurs

Il y a donc une décade entre 30Hz et 300Hz, et une octave entre 30Hz et 60Hz[5].

5. Il s'agit bien de la même définition de l'octave que celle utilisée en musique : 880Hz correspond bien à un LA situé une octave plus haut que le LA de référence à 440Hz.

6.2 Circuit RC : calcul temporel détaillé

On considère un circuit RC :

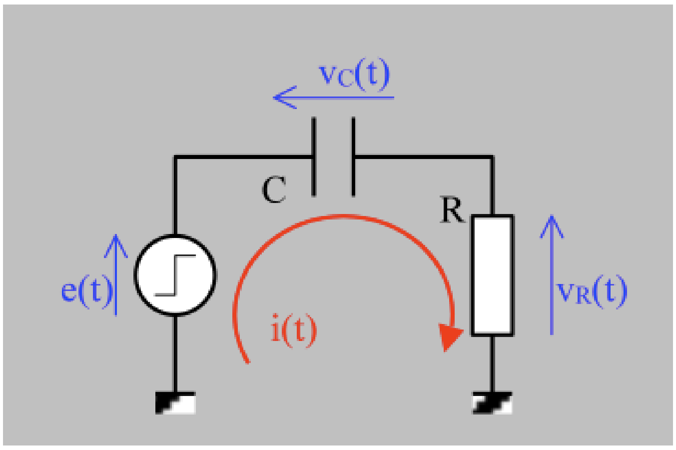

FIGURE 6.1 – circuit RC

Nous souhaitons ici en faire l'analyse temporelle, en supposant que e(t) consiste à appliquer un échelon de tension de valeur E à l'instant t=0, toutes les valeurs étant nulles auparavant (capacité déchargée avant t=0).

Comme d'habitude, la première étape de l'analyse consiste toujours à définir les grandeurs électriques de manière univoque : ceci est fait dans la figure ci-dessus.

Pour ce circuit, il y a une seule équation de maille :

$$e(t) = v_C(t) + v_R(t) \tag{6.10}$$

Et puisqu'un seul courant existe dans le circuit, il n'y a pas lieu d'écrire d'équations de nœuds.

Les lois des composants sont les suivantes (supposant qu'on a pris des conventions récepteur pour chacun de ces composants, ce qui est bien le le cas dans la figure 6.1) :

$$\begin{aligned} v_R(t) &= Ri(t) \\ v_C(t) &= \frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)d\xi + v_C(0) \end{aligned} \tag{6.11}$$

L'équation de maille devient :

$$e(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)d\xi + v_C(0) + Ri(t) \tag{6.12}$$

en dérivant une fois, on obtient (membre de gauche nul car e(t) est une constante) pour t>0 :

$$0 = \frac{1}{C}i(t) + R\frac{di(t)}{dt} \tag{6.13}$$

qui est une équation différentielle du premier ordre. Elle peut être réécrite :

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} i(t) \tag{6.14}$$

La solution générale de l'équation homogène (SGEH) de cette équation différentielle est (A=cte à déterminer) :

$$i(t) = A.e^{-\frac{t}{RC}} \tag{6.15}$$

à laquelle il faut ajouter la solution particulière de l'équation non homogène (SPENH), qui est une constante :

$$i(t) = A.e^{-\frac{t}{RC}} + B \tag{6.16}$$

Il faut maintenant déterminer A et B. Pour ce faire, on utilise les propriétés de la capacité.

La loi long terme (à long terme, le courant dans une capacité est nul) permet de constater que B est nul :

$$i(\infty) = A.e^{-\frac{\infty}{RC}} + B = B = 0 \tag{6.17}$$

La loi court terme dit que la ddp sur la capacité ne peut être modifiée instantanément (or celle-ci était nulle avant l'échelon) :

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \tag{6.18}$$

En réécrivant l'équation du circuit à l'instant $t = 0^+$, on obtient :

$$i(0^+) = A.e^{-\frac{0}{RC}} = A \tag{6.19}$$

par ailleurs (loi d'Ohm) :

$$i(0^+) = \frac{v_R(0^+)}{R} = \frac{e(0^+) - v_C(0^+)}{R} = \frac{E-0}{R} = \frac{E}{R} \tag{6.20}$$

On obtient donc :

$$A = \frac{E}{R} \tag{6.21}$$

et donc finalement pour le courant :

$$i(t) = \frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{RC}} \tag{6.22}$$

dès lors tension sur la résistance vaut :

$$v_R(t) = Ri(t) = E.e^{-\frac{t}{RC}} \tag{6.23}$$

et celle sur la capacité :

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t \frac{E}{R} e^{\frac{-\xi}{RC}} d\xi + v_C(0) = \frac{E}{RC}\left[(-RC)e^{\frac{-\xi}{RC}}\right]_0^t + 0 = E(1 - e^{\frac{-t}{RC}}) \tag{6.24}$$

On peut vérifier qu'on a effectivement

$$e(t) = v_C(t) + v_R(t) \tag{6.25}$$

On notera que si les conditions initiales changent (l'échelon intervient quand la capacité est chargée à une certaine tension), le calcul de A doit être repris.

On rappellera qu'une procédure de calcul temporel plus rapide, se basant sur les lois HF et BF de la capacité, a été proposée au 5.1.2.

On y trouvera notamment les formes d'ondes correspondant aux résultats ci-dessus ainsi que l'interprétation de ces formes d'ondes en termes de filtrage passe-haut et passe-bas.

6.3 Circuit RL : calcul temporel détaillé

On considère un circuit RL :

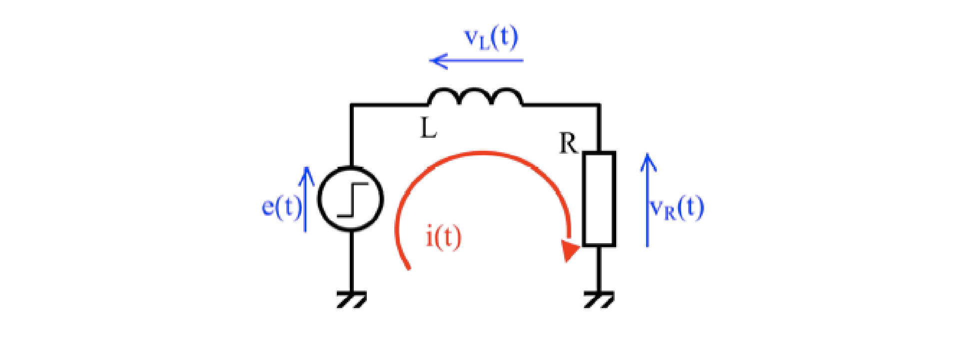

FIGURE 6.2 – circuit RL

Nous souhaitons ici en faire l'analyse temporelle, en supposant que e(t) consiste à appliquer un échelon de tension de valeur E à l'instant t=0, toutes les valeurs étant nulles auparavant (inductance démagnétisée avant t=0).

Comme d'habitude, la première étape de l'analyse consiste toujours à définir les grandeurs électriques de manière univoque. On définit par exemple les courants et tensions comme ci-dessus (idem à la figure 5.5). Pour ce circuit, il y a une seule équation de maille :

$$e(t) = v_L(t) + v_R(t) \tag{6.26}$$

Et puisqu'un seul courant existe dans le circuit, il n'y a pas lieu d'écrire d'équations de nœuds. Compte tenu des lois des composants, cette équation peut être réécrite comme (en supposant qu'on a pris des conventions récepteur pour chacun de ces composants, ce qui est le cas dans la figure 6.2) :

$$e(t) = R.i(t) + L\frac{di(t)}{dt} \tag{6.27}$$

qui est directement l'équation différentielle recherchée (e(t) est une constante).

La solution générale de l'équation homogène correspondante est (A=cte) :

$$i(t) = Ae^{\frac{-t}{L/R}} \tag{6.28}$$

à laquelle il faut ajouter la solution particulière de l'équation non homogène, qui est une constante :

$$i(t) = Ae^{\frac{-t}{L/R}} + B \tag{6.29}$$

A l'instant initial, le courant ne peut varier dans l'inductance (loi court terme de l'inductance), or il était nul avant l'échelon :

$$i(0^+) = Ae^{\frac{0}{L/R}} + B = A + B = 0 \tag{6.30}$$

On en déduit :

$$B = -A \tag{6.31}$$

et donc

$$i(t) = A\left(e^{\frac{-t}{L/R}} - 1\right) \tag{6.32}$$

A l'instant initial toujours, la ddp sur la résistance est nulle (par la loi d'Ohm, le courant étant nul) et toute la tension se reporte donc sur l'inductance (loi des mailles). On a donc :

$$v_L(0^+) = e(0^+) = E \tag{6.33}$$

par ailleurs puisque nous connaissons l'expression du courant nous pouvons calculer celle de v_L :

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L\frac{d}{dt}\left[A\left(e^{\frac{-t}{L/R}} - 1\right)\right] = AL\left(\frac{-1}{L/R}\right)e^{\frac{-t}{L/R}} = -ARe^{\frac{-t}{L/R}} \tag{6.34}$$

En égalant les deux dernières expressions pour $t = 0^+$, on obtient :

$$A = -\frac{E}{R} \tag{6.35}$$

Et on a donc finalement :

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E}{R}\left(1 - e^{\frac{-t}{L/R}}\right) \\ v_R(t) &= E\left(1 - e^{\frac{-t}{L/R}}\right) \\ v_L(t) &= Ee^{\frac{-t}{L/R}} \end{aligned} \tag{6.36}$$

6.4 Circuit RC : calcul en phaseurs et impédances

Voyons maintenant comment analyser ce même circuit (et donc arriver aux mêmes conclusions) en utilisant les phaseurs et les impédances.

Pour utiliser ces outils, il est nécessaire de se placer dans les hypothèses d'un circuit linéaire en régime sinusoïdal :

- le circuit est linéaire si R et C sont constants, ce qui est a priori bien le cas ici
- les signaux sont en régime sinusoïdal si le signal d'entrée est monochromatique (sinusoïdal), ce que nous considérons par principe dans la suite en utilisant des phaseurs et des impédances

Il y a fondamentalement quatre grandeurs électriques dans le circuit RC : un courant, deux tensions et une force électromotrice. Puisque nous sommes en régime sinusoïdal, nous leur associons les quatre phaseurs suivants :

$$\begin{aligned} \underline{E} &= A_E e^{j\varphi_E} \\ \underline{I} &= A_I e^{j\varphi_I} \\ \underline{V_R} &= A_R e^{j\varphi_R} \\ \underline{V_C} &= A_C e^{j\varphi_C} \end{aligned} \tag{6.37}$$

En grandeurs temporelles, la loi des mailles s'écrivait :

$$e(t) = v_C(t) + v_R(t) \tag{6.38}$$

Elle reste d'application en régime sinusoïdal où elle devient :

$$\underline{E} = \underline{V_R} + \underline{V_C} \tag{6.39}$$

L'intérêt du formalisme fréquentiel apparaît à ce stade dans le fait que la loi d'Ohm s'applique maintenant à tous les composants (à condition d'utiliser la notion d'impédance) :

$$\begin{aligned} \underline{V_R} &= Z_R \underline{I} \\ \underline{V_C} &= Z_C \underline{I} \end{aligned} \tag{6.40}$$

avec

$$\begin{aligned} Z_R &= R \\ Z_C &= \frac{1}{j\omega C} \end{aligned} \tag{6.41}$$

ce qui donne

$$\underline{E} = R\underline{I} + = \frac{1}{j\omega C}\underline{I} = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\underline{I} \tag{6.42}$$

dont on peut déduire le courant circulant dans le circuit :

$$\underline{I} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC}\underline{E} \tag{6.43}$$

puis les tensions sur chaque composant :

$$\begin{aligned} \underline{V_R} &= R\underline{I} = \frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}\underline{E} \\ \underline{V_C} &= \frac{1}{j\omega C}\underline{I} = \frac{1}{1+j\omega RC}\underline{E} \end{aligned} \tag{6.44}$$

Comme on le voit, aucun calcul différentiel ou intégral n'a été nécessaire pour arriver à ce résultat. Pour rappel, la valeur ω_0 est définie comme la pulsation de coupure :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \tag{6.45}$$

de sorte qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \underline{V_R} &= \frac{\frac{j\omega}{\omega_0}}{1+j\omega RC}\underline{E} \\ \underline{V_C} &= \frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_0}}\underline{E} \end{aligned} \tag{6.46}$$

Représentation dans le plan complexe

Représentons ces phaseurs dans le plan complexe (uniquement les phaseurs de tension puisque $\underline{I}$ est identique à $\underline{V_R}$, au facteur R près).

Pour cela, calculons pour chacun les approximations haute et basse fréquence. Pour $\underline{V_R}$, cela donne :

$$\begin{aligned} \underline{V_R}(BF) &\approx \frac{j\omega}{\omega_0}\underline{E} \\ \underline{V_R}(HF) &\approx \underline{E} \end{aligned} \tag{6.47}$$

ainsi que la valeur à la pulsation de coupure ω_0.

$$\underline{V_R}(\omega_0) = \frac{j}{1+j}\underline{E} \tag{6.48}$$

$\underline{V_R}$ apparaît donc comme un nombre complexe variant en fonction de la fréquence, qui peut se représenter comme suit :

- en basse fréquence ($\omega << \omega_0$) : un nombre presque purement imaginaire et de module négligeable
- en haute fréquence ($\omega >> \omega_0$) : un nombre presque purement réel proche de $\underline{E}$
- entre ces deux valeurs, $\underline{V_R}$ décrit un arc de cercle dans le plan complexe, dans le sens horlogique, en passant par un vecteur à 45° en ω_0

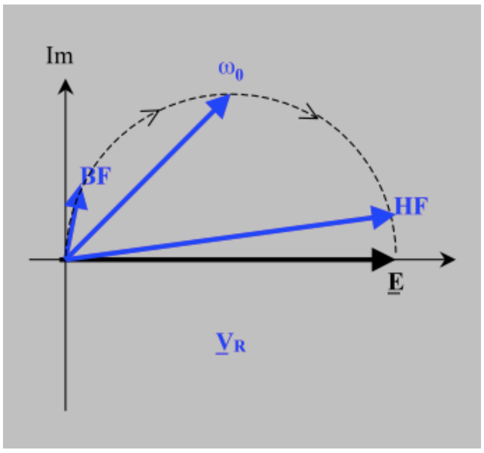

FIGURE 6.3 – évolution du phaseur de tension sur la résistance en fonction la fréquence

Similairement pour $\underline{V_C}$:

$$\begin{aligned}\underline{V_C}(BF) &\approx \underline{E}\\ \underline{V_C}(HF) &\approx \frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_0}}\underline{E}\\ \underline{V_C}(\omega_0) &= \frac{j}{1+j}\underline{E}\end{aligned} \tag{6.49}$$

$\underline{V_C}$ apparaît donc comme un nombre complexe variant en fonction de la fréquence, qui peut se représenter comme suit :

- en basse fréquence ($\omega << \omega_0$) : un nombre presque purement réel proche de $\underline{E}$
- en haute fréquence ($\omega >> \omega_0$) : un nombre presque purement imaginaire et de module négligeable
- entre ces deux valeurs, $\underline{V_C}$ décrit un arc de cercle dans le plan complexe, dans le sens horlogique, en passant par un vecteur à -45° en ω_0.

On peut encore vérifier la propriété suivante, qui confirme que chaque phaseur se déplace (en fonction de la fréquence) sur un demi-cercle :

$$|\underline{V_R}|^2 + |\underline{V_C}|^2 = |\underline{E}|^2 \tag{6.50}$$

On peut également vérifier qu'à toute fréquence, la somme vectorielle de $\underline{V_R}$ et de $\underline{V_C}$ donne bien $\underline{E}$ (loi des mailles).

Ces graphes permettent aussi de saisir l'évolution des amplitudes et des déphasages des signaux, ce qui est bien l'avantage des phaseurs. On peut notamment voir immédiatement que :

- $\underline{V_R}$ est très petit (et déphasé de 90°) en BF et proche de $\underline{E}$ en HF : c'est bien un passe-haut,

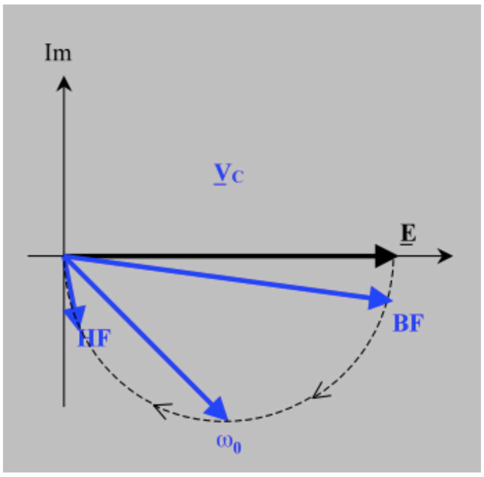

FIGURE 6.4 – évolution du phaseur de tension sur la capacité en fonction la fréquence

- $\underline{V_C}$ est proche de $\underline{E}$ en BF et très petit (et déphasé de -90°) en HF : c'est bien un passe-bas.

6.5 Circuit RL : calcul en phaseurs et impédances

Définissons les quatre phaseurs suivants :

$$\begin{aligned}\underline{E} &= A_E e^{j\varphi_E}\\ \underline{I} &= A_I e^{j\varphi_I}\\ \underline{V_R} &= A_R e^{j\varphi_R}\\ \underline{V_L} &= A_L e^{j\varphi_L}\end{aligned} \tag{6.51}$$

La loi des mailles, traduite en phaseurs, nous amène à écrire :

$$\underline{E} = Z_R\underline{I} + Z_L\underline{I} = (R + j\omega L)\underline{I} \tag{6.52}$$

Les tensions sur les deux composants valent respectivement :

$$\begin{aligned}\underline{V_R} &= \frac{R}{R + j\omega L}\underline{E} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega L}{R}}\underline{E}\\ \underline{V_L} &= \frac{j\frac{\omega L}{R}}{1 + j\frac{\omega L}{R}}\underline{E}\end{aligned} \tag{6.53}$$

En définissant la pulsation de coupure du filtre RL par :

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L} \tag{6.54}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\underline{V_R} &= \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}\underline{E}\\ \underline{V_L} &= \frac{\frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{j\omega}{\omega_0}}\underline{E}\end{aligned} \tag{6.55}$$

On remarque que ces expressions sont exactement identiques à celles du filtre RC, à la différence que les fonctions ont été permutées entre la résistance et l'élément réactif :

- le phaseur V_R du filtre RC correspond au phaseur $\underline{V_L}$ du filtre RL (passe-haut),
- et le phaseur V_C du filtre RC correspond au phaseur $\underline{V_R}$ du filtre RL (passe-bas).

A cette permutation près, les résultats sont donc identiques à ceux du §6.4 (en particulier figure 6.3 et figure 6.4).

6.6 Circuit RC : calcul de la réponse en fréquence

Poursuivons l'analyse fréquentielle en calculant le(s) diagramme(s) de Bode de ce circuit RC.

Dans ce circuit, on peut choisir comme signal de sortie la tension sur la résistance ou la tension sur la capacité. Le circuit possède donc deux réponses en fréquence (correspondant à deux utilisations différentes) :

$$\begin{aligned} H_R(j\omega) &= \frac{\underline{V_R}}{\underline{E}} \\ H_C(j\omega) &= \frac{\underline{V_C}}{\underline{E}} \end{aligned} \tag{6.56}$$

Leur expression se déduit des résultats précédents :

$$\begin{aligned} H_R(j\omega) &= \frac{j\omega RC}{1+j\omega RC} \\ H_C(j\omega) &= \frac{1}{1+j\omega RC} \end{aligned} \tag{6.57}$$

En utilisant la pulsation de coupure :

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} \tag{6.58}$$

ces expressions peuvent se mettre sous une forme plus générale propre aux circuits du premier ordre :

$$\begin{aligned} H_R(j\omega) &= \frac{\frac{j\omega}{\omega_0}}{1+\frac{j\omega}{\omega_0}} \\ H_C(j\omega) &= \frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_0}} \end{aligned} \tag{6.59}$$

Nous allons étudier ces fonctions dans une section suivante. Comme il s'agit des réponses en fréquence classiques pour tous les circuits du premier ordre, nous les rebaptisons :

$$\begin{aligned} H_{HP}(j\omega) &= \frac{\frac{j\omega}{\omega_0}}{1+\frac{j\omega}{\omega_0}} \\ H_{LP}(j\omega) &= \frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_0}} \end{aligned} \tag{6.60}$$

Pour le circuit RC nous obtenons donc en particulier :

$$\begin{aligned} H_R(j\omega) &= H_{HP}(j\omega) \\ H_C(j\omega) &= H_{LP}(j\omega) \end{aligned} \tag{6.61}$$

Ceci est cohérent avec ce que nous avions déjà établi dans l'analyse temporelle : la sortie sur la résistance opère un filtrage passe-haut tandis que la sortie sur la capacité opère un filtrage passe-bas. Nous retomberons bien entendu sur le même résultat dans l'analyse fréquentielle, ce qui explique les indices choisis :

- HP pour "High Pass" : filtre passe-haut,
- LP pour "Low Pass" : filtre passe-bas.

6.7 Circuit RL : calcul de la réponse en fréquence

Poursuivons l'analyse fréquentielle en calculant les réponses en fréquence de ce circuit RL.

Dans ce circuit, on peut choisir comme signal de sortie la tension sur la résistance ou la tension sur l'inductance. Le circuit possède donc deux réponses en fréquence (correspondant à deux utilisations différentes) :

$$\begin{aligned} H_R(j\omega) &= \frac{\underline{V_R}}{\underline{E}} \\ H_L(j\omega) &= \frac{\underline{V_L}}{\underline{E}} \end{aligned} \tag{6.62}$$

Leur expression se déduit des résultats précédents :

$$\begin{aligned} H_L(j\omega) &= \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \\ H_R(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega RC} \end{aligned} \tag{6.63}$$

ce qui peut se réécrire

$$\begin{aligned} H_L(j\omega) &= \frac{\frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}} \\ H_R(j\omega) &= \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}} \end{aligned} \tag{6.64}$$

en utilisant la pulsation de coupure :

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L} \tag{6.65}$$

En reprenant les notations déjà définies pour le circuit RC, nous voyons que pour le RL :

$$\begin{aligned} H_L(j\omega) &= H_{HP}(j\omega) \\ H_R(j\omega) &= H_{LP}(j\omega) \end{aligned} \tag{6.66}$$

Ceci est cohérent avec ce que nous avions déjà établi dans l'analyse temporelle : la sortie sur l'inductance opère un filtrage passe-haut tandis que la sortie sur la résistance opère un filtrage passe-bas. Nous retomberons bien entendu sur le même résultat dans l'analyse fréquentielle.

6.8 Fitre RC/RL passe-haut : tracé des courbes de Bode

6.8.1 Courbes réelles (non asymptotiques)

Traçons les courbes de Bode de la réponse en fréquence :

$$H_{HP}(j\omega) = \frac{\frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}} \tag{6.67}$$

Il est préférable d'éliminer la partie imaginaire au dénominateur. On obtient :

$$H_{HP}(j\omega) = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \tag{6.68}$$

Le module et la phase de cette réponse en fréquence valent :

$$\begin{aligned} A_{HP} &= \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \\ \varphi_{HP} &= Arctg\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \end{aligned} \tag{6.69}$$

Le diagramme de Bode correspondant est le suivant :

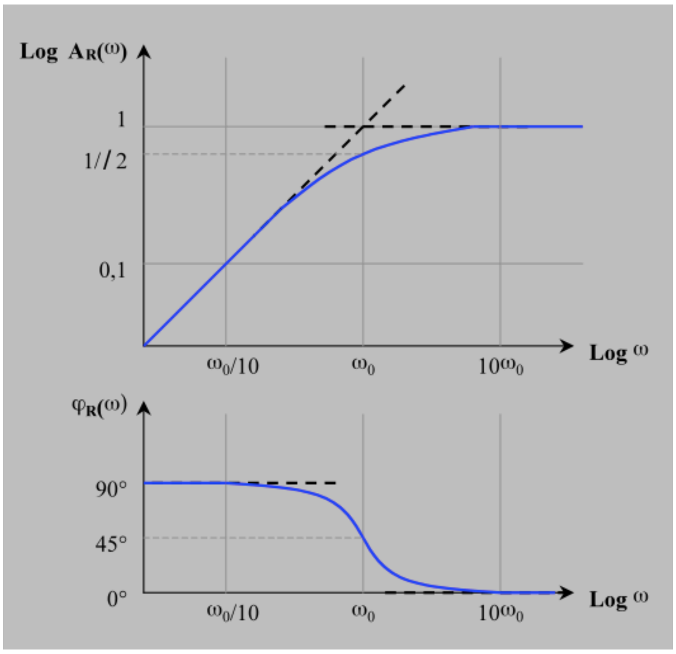

FIGURE 6.5 – courbes de Bode de la réponse en fréquence d'un filtre passe-haut du 1er ordre

Il s'agit bien d'un filtrage passe-haut puisque les hautes fréquences ne sont pas modifiées (ni en gain ni en phase) tandis que les basses fréquences sont atténuées (et déphasées).

Gain et phase à la pulsation de coupure

A la pulsation de coupure ($\omega = \omega_0$), on peut noter les valeurs remarquables :

$$\begin{aligned} A_{HP}(\omega_0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB \\ \varphi_{HP}(\omega_0) &= 45^\circ \end{aligned} \tag{6.70}$$

6.8.2 Tracé asymptotique 1re manière (approx. polynomiale)

On peut également déduire des expressions précédentes les asymptotes basse et haute fréquence via une approximation adéquate.

En basse fréquence[6] ($\omega << \omega_0$) :

$$\begin{aligned} A_{HP}(BF) &\approx \frac{\omega}{\omega_0} \\ \varphi_{HP}(BF) &= 90^\circ \end{aligned} \tag{6.71}$$

ce qui correspond à :
- gain : une droite de pente +1 (ou 20dB/décade) passant par la valeur 1 en ω_0
- phase : une droite horizontale de valeur 90°

Et en haute fréquence ($\omega >> \omega_0$) :

$$\begin{aligned} A_{HP}(HF) &\approx 1 \\ \varphi_{HP}(HF) &= 0^\circ \end{aligned} \tag{6.72}$$

ce qui correspond à la fonction unité :
- gain : une droite horizontale de valeur 1
- phase : une droite horizontale de valeur 0°

6.8.3 Tracé asymptotique 2de manière ("pôles et zéros")

Voyons maintenant comment obtenir les diagrammes de Bode de manière plus rapide, en utilisant la notion de pôles et zéros.

6. L'erreur à ne pas commettre à ce stade est de conclure que puisque ω est très petit par rapport à ω_0, le gain A_{HP} est simplement "très petit" car on alors trop peu de renseignements pour tracer l'asymptote. Il faut au contraire observer (§6.1) que l'exposant de ω vaut +1 (dans ce cas-ci) et donc que la fonction de transfert varie avec une pente de +20dB/décade. La même remarque est valable pour l'asymptote haute fréquence du gain A_{LP} (pente –1).

La réponse en fréquence est de la forme :

$$H_{HP}(j\omega) = \frac{\frac{j\omega}{\omega_0}}{1+\frac{j\omega}{\omega_0}} \tag{6.73}$$

En remplaçant[7] $j\omega$ par p, la fonction de transfert correspondante s'écrira :

$$H_{HP}(p) = \frac{\frac{p}{\omega_0}}{1+\frac{p}{\omega_0}} \tag{6.74}$$

En opérant la décomposition expliquée au §5.5, cette fonction peut être réécrite en isolant 3 facteurs :

$$H_{HP}(p) = \left(\frac{1}{\omega_0}\right)(p)\left(\frac{1}{1+\frac{p}{\omega_0}}\right) \tag{6.75}$$

en termes de pôles et de zéros, cette fonction possède donc :

- un gain en continu de valeur $1/\omega_0$ (facteur de type H_1 dans le §6.11)
- un zéro en $p = 0$ (facteur de type H_2 dans le §6.11)
- un pôle en $p = -\omega_0$ (facteur de type H_4 dans le §6.11)

Il y correspond une suite de valeur de pulsations critiques croissantes qui est : 0 (zéro à l'origine) ; ω_0 (pôle)

Celles-ci définissent deux intervalles de fréquence :

- intervalle I : $[0;\omega_0]$
- intervalle II : $[\omega_0;[$

L'analyse est la suivante, en considérant des valeurs croissantes de la pulsation :

- comme il existe un zéro à l'origine, jusqu'au premier pôle ou zéro non nul, la pente du gain vaut +1 et la phase vaut 90° ; par ailleurs en $\omega = 1$, le gain vaut le gain en continu
- on rencontre ensuite un pôle simple à la pulsation ω_0. Celui-ci diminue de 1 la pente du gain et diminue de 90° la phase, on a donc pour l'intervalle II : un gain de pente 0 (et d'ordonnée égale au gain en continu : $1/\omega_0$) et une phase de 0°

On retrouve bien entendu le graphe déjà obtenu (plus exactement : son comportement asymptotique). Mais celui-ci est cette fois obtenu de manière extrêmement rapide, puisque les asymptotes sont directement déduites de la forme de la fonction $H()$.

7. pour rappel, cette opération n'est pas indispensable. Une analyse similaire peut se faire sur la réponse en fréquence : il suffit en fait d'identifier les pôles et les zéros

Pour finir de tracer la réponse en fréquence, on peut notamment calculer la vraie valeur de la fonction à la pulsation de coupure, valeur qui vaut :

$$\begin{aligned} A_{HP}(\omega_0) &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB \\ \varphi_{HP}(\omega_0) &= 45^\circ \end{aligned} \tag{6.76}$$

Ce résultat étant toujours le même pour les circuits du premier ordre, il ne doit pas être recalculé chaque fois.

6.9 Filtre RC/RL passe-bas : tracé des courbes de Bode

6.9.1 Courbes réelles (non asymptotiques)

Traçons les courbes de Bode de la réponse en fréquence :

$$H_{LP}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}} \tag{6.77}$$

Il est préférable d'éliminer la partie imaginaire au dénominateur :

$$H_{LP}(j\omega) = \frac{1 - j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \tag{6.78}$$

Le module et la phase de cette réponse en fréquence valent :

$$\begin{aligned} A_{LP} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \\ \varphi_{LP} &= Arctg\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right) \end{aligned} \tag{6.79}$$

Le diagramme de Bode correspondant est donc le suivant :

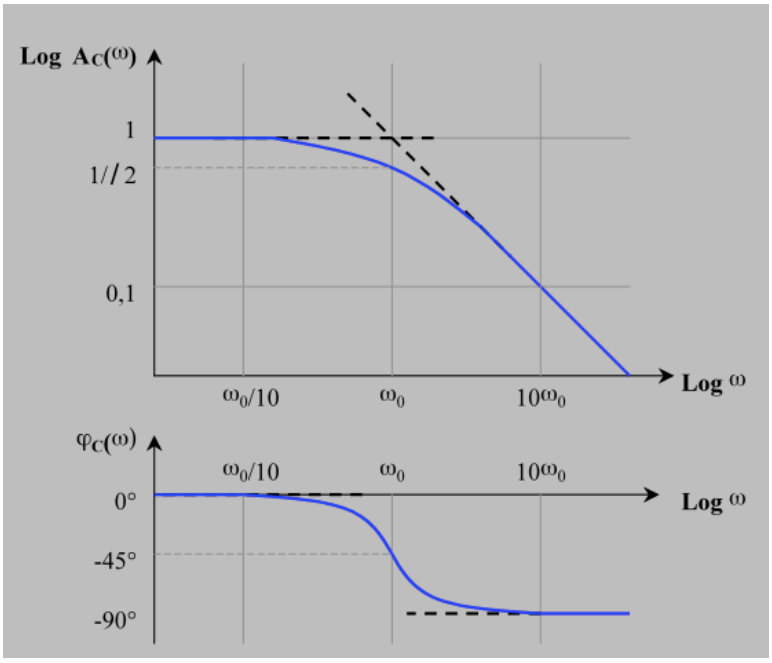

FIGURE 6.6 – Courbes de Bode de la réponse en fréquence d'un filtre passe-bas du 1er ordre

Gain et phase à la pulsation de coupure
A la pulsation de coupure ($\omega = \omega_0$), on peut noter les valeurs remarquables :

$$\begin{aligned} A_{LP}(\omega_0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB \\ \varphi_{LP}(\omega_0) &= -45^\circ \end{aligned} \tag{6.80}$$

Il s'agit bien d'un filtrage passe-bas puisque les basses fréquences ne sont pas modifiées (ni en gain ni en phase) tandis que les hautes fréquences sont atténuées (et déphasées).

On remarque que ces valeurs sont identiques à celles du filtre passe-haut. Les réponses en fréquence du filtre passe-bas et du filtre passe-haut du premier ordre se "croisent" donc en ces valeurs (ce qui est une raison suffisante de choisir la pulsation correspondante comme limite entre les "basses" et les "hautes" fréquences de chacun de ces filtres).

6.9.2 Tracé asymptotique 1re manière (approx. polynomiale)

On peut également déduire des expressions précédentes les asymptotes basse et haute fréquence via une approximation adéquate.

En basse fréquence ($\omega << \omega_0$) :

$$\begin{aligned} A_{LP}(BF) &\approx 1 \\ \varphi_{LP}(BF) &= 0^\circ \end{aligned} \tag{6.81}$$

ce qui correspond à la fonction unité :
- gain : une droite horizontale de valeur 1
- phase : une droite horizontale de valeur 0°

et en haute fréquence ($\omega >> \omega_0$) :

$$\begin{aligned} A_{LP}(HF) &\approx \frac{\omega_0}{\omega} \\ \varphi_{LP}(HF) &= -90^\circ \end{aligned} \tag{6.82}$$

ce qui correspond à :
- gain : une droite de pente -1 (ou -20dB/décade) passant par la valeur 1 en ω_0
- phase : une droite horizontale de valeur -90°

6.9.3 Tracé asymptotique 2de manière ("pôles et zéros")

La réponse en fréquence est de la forme :

$$H_{LP}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}} \tag{6.83}$$

La fonction de transfert correspondante s'écrira :

$$H_{LP}(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_0}} \tag{6.84}$$

Suivant la décomposition évoquée au §5.5, elle correspond en tant que telle à une facteur de type "H_4". Elle possède donc :

- un pôle en $p = -\omega_0$ (facteur de type H_4 dans le §6.11)

Ce pôle unique définit deux intervalles de fréquence :

- intervalle I :] ; ω_0]
- intervalle II : [ω_0 ; [

En considérant des valeurs croissantes de la pulsation :

- comme il n'y a pas de pôle ou zéro à l'origine, on a donc pour l'intervalle I : pour le gain une asymptote horizontale d'ordonnée 1 (pas de gain en continu) et pour la phase une asymptote horizontale de valeur 0°,
- on rencontre ensuite un pôle simple à la pulsation ω_0. Celui-ci diminue de 1 la pente du gain et diminue de 90° la phase, on a donc pour l'intervalle II : un gain de pente -1 et une phase de -90°

On retrouve bien entendu les courbes de Bode déjà obtenues (plus exactement : leur tracé asymptotique).

Pour finir de tracer la réponse en fréquence, on peut notamment calculer la vraie valeur de la fonction à la pulsation de coupure, valeur qui vaut :

$$\begin{aligned} A_{LP}(\omega_0) &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB \\ \varphi_{LP}(\omega_0) &= -45^\circ \end{aligned} \tag{6.85}$$

Ce résultat étant toujours le même pour les circuits du premier ordre, il ne doit pas être recalculé chaque fois.

6.10 Correspondance entre les variables p et $j\omega$

Remarque préliminaire

Dans la fonction de transfert $H(p)$, la variable p est un nombre complexe. Comme ce nombre est souvent écrit $p = \sigma + j\omega$, on pourrait croire que la pulsation ω présente dans la réponse en fréquence $H(j\omega)$ y intervient simplement comme la partie imaginaire de p. Comme on va le voir ci-dessous, ce n'est pas du tout le cas.

Analyse en $j\omega$

Considérons à titre d'exemple une fonction $H(j\omega)$ de la forme :

$$H(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{\omega_0} \tag{6.86}$$

Montrons d'abord que la valeur ω_0 apparaît comme la valeur de ω où le comportement asymptotique change. En effet :

- pour $\omega << \omega_0$, c'est-à-dire en basse fréquence par rapport à ω_0, le second terme devient négligeable et $H(j\omega)$ a pour asymptote :

  $$H_{BF}(j\omega) = 1 \tag{6.87}$$

  soit

  $$\begin{aligned} A_{BF}(\omega)] &= 1 \\ \varphi_{BF}(\omega) &= 0^\circ \end{aligned} \tag{6.88}$$

- pour $\omega >> \omega_0$, c'est-à-dire en haute fréquence par rapport à ω_0, le premier terme devient négligeable et $H(j\omega)$ a pour asymptote :

  $$H_{HF}(j\omega) = \frac{j\omega}{\omega_0} \tag{6.89}$$

  soit

  $$\begin{aligned} A_{HF}(\omega)] &= \frac{\omega}{\omega_0} \\ \varphi_{HF}(\omega) &= 90^\circ \end{aligned} \tag{6.90}$$

En conséquence, la valeur ω_0 apparaît comme une valeur pivot de ω autour de laquelle le comportement asymptotique change. En effet :

- du point de vue du gain, c'est la valeur où les asymptotes HF et BF se croisent : $A_{HF}(\omega_0) = 1$,
- du point de vue de la phase, ω_0 est la valeur pour laquelle $\varphi(\omega)$ prend la valeur exactement intermédiaire de 45° entres les deux asymptotes (qui ne se croisent jamais puisqu'elles sont horizontales).

Pour mémoire : la fonction $H(j\omega)$ en elle-même prend en $\omega = \omega_0$ les valeurs :

$$H(j\omega)|_{\omega=\xi_0} = 1 + j \tag{6.91}$$

soit

$$\begin{aligned} A(\omega)|_{\omega=\xi_0} &= \sqrt{2} \\ \varphi(\omega)|_{\omega=\xi_0} &= 45^\circ \end{aligned} \tag{6.92}$$

En toute logique, s'agissant d'une pulsation (correspondant à une fréquence physiquement mesurable), ω_0 est une valeur positive.

Analyse en p

Pour considérer maintenant la même fonction $H()$ mais sous forme de fonction de transfert, il suffit de substituer p à $j\omega$, où p est la variable de Laplace (soit un nombre complexe $p = \sigma + j\omega$) :

$$H(p) = 1 + \frac{p}{\omega_0} \tag{6.93}$$

il apparaît que la racine de cette fonction se trouve en [8] :

$$p = -\omega_0 \tag{6.94}$$

où ω_0 est la même valeur positive que précédemment.

Comparaison

Pour le facteur $H()$ considéré, la valeur ω_0 représente donc :

- *en tant que telle* (réel positif), la pulsation "pivot" à laquelle le comportement asymptotique de la réponse en fréquence $H(j\omega)$ se modifie ;
- *au signe près*, la valeur de p qui annule la fonction de transfert $H(p)$:

$$H(p)|_{p=-\omega_0} = 0 \tag{6.95}$$

Dans le vocabulaire de l'analyse complexe, on dira que la fonction $H(p)$ (ou le circuit que représente cette fonction) "possède un zéro en $-\omega_0$". Ce "zéro en $-\omega_0$ correspond bien simultanément aux deux interprétations ci-dessus, et caractérise par définition la forme mathématique de $H()$ indiquée.

8. La valeur de p provoquant cette racine peut être située dans le plan complexe : comme ω_0 est un réel positif, $-\omega_0$ est un réel négatif et apparaît donc dans le plan complexe comme un point situé dans la partie négative de l'axe des réels.

Pôle en ω_0

De la même manière, considérer une réponse en fréquence $H(j\omega)$ de la forme :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}} \tag{6.96}$$

nous aurait amené à conclure par un raisonnement similaire que le comportement asymptotique de cette fonction change également à la valeur de pulsation ω_0.

Nous aurions par ailleurs conclu que la valeur $-\omega_0$ rend *infinie* la fonction de transfert correspondante :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_0}} \tag{6.97}$$

puisqu'elle annule son dénominateur.

Pour le facteur $H()$ considéré, la valeur ω_0 représente donc :

- *en tant que telle* (réel positif), la pulsation "pivot" à laquelle le comportement asymptotique de la réponse en fréquence $H(j\omega)$ se modifie ;
- *au signe près,* la valeur de p qui rend infinie la fonction de transfert $H(p)$:

$$H(p)|_{p=-\omega_0} = \infty \tag{6.98}$$

Dans le vocabulaire de l'analyse complexe, on dira que la fonction $H(p)$ (ou le circuit que représente cette fonction) "possède un pôle en $-\omega_0$". Ce "pôle en $-\omega_0$ correspond bien simultanément aux deux interprétations ci-dessus, et caractérise par définition la forme mathématique de $H()$ indiquée.

6.11 Comportement asymptotique des facteurs élémentaires de $H()$

Introduction

Cette section vise en particulier à expliquer et justifier les règles de tracé asymptotique du §5.5 et récapitulées dans le tableau §5.5.10.

Rappelons d'abord le principe sous-jacent à cette procédure (voir §5.5.1) :

Le diagramme de Bode d'une réponse en fréquence est la *somme* des diagrammes de Bode individuels de ses différents *facteurs*

Il nous suffit donc une fois pour toute d'étudier les tracés individuels des différents facteurs possibles de $H()$ pour faciliter grandement le tracé de toutes les courbes de Bode imaginables. C'est tout l'intérêt de l'analyse en pôles et en zéros.

Or il n'existe pas beaucoup de facteurs différents possibles. Nous allons donc passer en revue le comportement asymptotique typique des différents facteurs et, sur cette base, dégager des règles de tracé générales de la fonction à partir des pôles et des zéros.

Nous envisageons successivement les facteurs suivants :

- une constante
- des pôles ou zéros nuls
- un ou des zéro(s) non nul(s)
- un ou des pôle(s) non nul(s)
- une paire de pôles (ou zéros) complexes conjugués

Rappel

Dans la réponse en fréquence $H(j\omega)$, la variable ω représente la pulsation, c'est-à-dire à un facteur 2π près, la fréquence des signaux considérés [9]. Cette pulsation s'exprime en radians par seconde (rad/s), la fréquence étant en Hertz (Hz). La pulsation comme la fréquence sont des nombre réels positifs.

$$\omega = 2\pi f \tag{6.99}$$

Gain constant

Considérons la fonction H_1 suivante, qui correspond à un facteur constant au numérateur de $H(j\omega)$, où A_0 est un réel positif :

$$H_1(j\omega) = A_0 \tag{6.100}$$

9. sous l'hypothèse du régime linéaire sinusoïdal, tous les signaux sont à une seule et même fréquence.

Le gain et la phase de cette fonction valent :

$$\begin{aligned} A_1(\omega) &= A_0 \\ \varphi_1(\omega) &= 0° \end{aligned} \tag{6.101}$$

Ces valeurs sont indépendantes de la fréquence.
En courbes de Bode, elles se traduisent graphiquement par [10] :

- pour le gain : une droite horizontale à l'ordonnée A_0
- pour la phase : une droite horizontale de valeur 0°

Lien avec le tableau §5.5.10

Ce comportement de H_1 est bien celui mentionné pour le gain et la phase dans la première ligne du tableau §5.5.10.

Les mentions additionnelles apparaissant dans cette première ligne du tableau viennent du fait que toute fonction $H()$ plus générale ne possédant pas de pôles et zéros à l'origine se réduit au facteur H_1 avant son premier pôle ou zéro non nul (comme on va le voir ci-dessous).

Pôle ou zéro à l'origine

Considérons la fonction suivante (k positif ou négatif) :

$$H_2(j\omega) = (j\omega)^k \tag{6.102}$$

Celle-ci correspond :

- si $k > 0$: à l'introduction de k zéros à l'origine ($p = 0$) dans la fonction globale $H()$
- si $k < 0$: à l'introduction de k pôles à l'origine ($p = 0$) dans la fonction globale $H()$

Le gain et la phase de cette fonction valent :

$$\begin{aligned} A_2(\omega) &= \omega^k \\ \varphi_2(\omega) &= Arg(j^k) = k.90^o \end{aligned} \tag{6.103}$$

Dans un graphe bilogarithmique, l'expression du **gain** ci-dessus amène à tracer une *droite de pente k*.

En effet, si nous prenons la valeur du gain en dB, nous obtenons :

$$20Log[A_2(\omega)] = 20Log[\omega^k] = k(20Log[\omega]) \tag{6.104}$$

Or si nous considérons des axes (X, Y) pour le diagramme de Bode qui sont les logarithmes des axes (ω, A) :

$$\begin{aligned} Y &= 20Log[A_2(\omega)] \\ X &= 20Log\omega \end{aligned} \tag{6.105}$$

10. on se reportera aux §§5.4.2 et 5.4.3 et pour savoir comment reporter de telles valeurs sur les axes selon qu'on utilise du papier millimétré ou du papier logarithmique.

l'expression précédente devient :

$$Y = k.X \tag{6.106}$$

Graphiquement, le gain du facteur H_2 se traduit donc dans un graphe bilogarithmique par une droite oblique de pente k.

Concernant la pente d'une droite de gain dans une courbe de Bode, précisons encore le vocabulaire suivant :

- une droite de pente +1 en axes bilogarithmiques ($k = 1$) provoquera, pour une augmentation de fréquence/pulsation d'un facteur 10 (= une décade), une augmentation de gain d'un facteur 10 également (=20dB) : on parlera donc indifféremment d'une pente "+1" ou d'une pente de "+20dB par décade" ;
- une droite de pente +2 ($k = 2$) provoquera, pour une augmentation de fréquence/pulsation d'un facteur 10 (= une décade), une augmentation de gain d'un facteur 100 (=40dB) : on parlera donc indifféremment d'une pente "+2" ou d'une pente "+40dB par décade" ;
- une droite de pente -1 ($k = -1$) provoquera, pour une augmentation de fréquence/pulsation d'un facteur 10 (= une décade), une diminution de gain d'un facteur 10 (= -20dB) : on parlera donc indifféremment d'une pente "-1" ou d'une pente de "-20dB par décade" ;
- etc…
- en généralisant : une droite de pente k provoquera, pour une augmentation de fréquence/pulsation d'un facteur 10 (= une décade), une variation de gain d'un facteur 10^k (= k.20dB) : on parlera donc indifféremment d'une pente "k" ou d'une pente de "k.20dB par décade".

Pour tracer la droite du gain, il est encore nécessaire d'en identifier un point de passage. Vu l'expression du gain :

$$A_2(\omega) = \omega^k \tag{6.107}$$

il est évident que la droite du gain de H_2 passe par le point $(\omega, A) = (1, 1)$.

Quant à la phase, elle sera constante, de *valeur k.90°* sur toute la plage de fréquence de H_2.

$$\varphi_2(\omega) = Arg(j^k) = k.90^o \tag{6.108}$$

Graphiquement, la phase du facteur H_2 se traduit donc dans les courbes de Bode par une droite horizontale d'ordonnée k.90°.

Lien avec le tableau §5.5.10

Ce comportement de H_2 est bien celui mentionné pour la *pente du gain* et pour la phase dans les lignes 2 et 3 du tableau.

Les mentions additionnelles apparaissant pour ces lignes dans le tableau traduisent le fait que toute fonction $H()$ plus générale possédant des pôles et zéros à l'origine se réduit au facteur H_2 (au gain constant A_0 près) avant son premier pôle ou zéro non nul (voir suite de la section).

Si précisément, dans ces conditions, la fonction $H()$ possède un gain constant A_0 *différent* de 1 (et ne se réduit donc pas strictement à H_2), nous pouvons utiliser la règle de sommation des courbes de Bode en considérant que :

$$H(j\omega) = A_0.(j\omega)^k = H_1(j\omega).H_2(j\omega) \tag{6.109}$$

Or d'après ce que nous avons vu, pour la phase :

- la phase ϕ_1 de H_1 est une droite horizontale d'ordonnée 0°
- la phase ϕ_2 de H_2 est une droite horizontale d'ordonnée 90°

La somme des deux phases est donc une droite horizontale d'ordonnée 90°.

Pour le gain :

- le gain A_1 de H_1 est une droite horizontale d'ordonnée A_0
- le gain A_2 de H_2 est une droite oblique de pente k passant par le point $(\omega, A) = (1,1)$

La somme des deux gains (en axes bilogarithmiques) est donc une droite oblique de pente k passant par le point $(\omega, A) = (1, A_0)$. En d'autres termes, le gain constant de H_1 décale d'une constante A_0 la droite oblique de H_2 vers le haut.

Ces conclusions sur le gain et la phase correspondent aux règles de tracé déjà mentionnées aux lignes 2 et 3 du tableau.

Zéro non nul (simple)

Considérons la fonction suivante :

$$H_3(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{\omega_3} \tag{6.110}$$

Cette fonction possède par définition un zéro de valeur $-\omega_3$, auquel il correspond un changement de comportement asymptotique de la réponse en fréquence à la pulsation ω_3.

Le gain et la phase de cette fonction valent :

$$\begin{aligned} A_3(\omega) &= |H_3(j\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2} \\ \varphi_3(\omega) &= Arg\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_3}\right) \end{aligned} \tag{6.111}$$

Lorsque ω est très inférieur ou très supérieur à ω_3, on peut faire les approximations suivantes :

- pour $\omega << \omega_3$:

$$\begin{aligned} A_3(\omega) &\approx 1 \\ \varphi_3(\omega) &\approx 0^\circ \end{aligned} \tag{6.112}$$

- et pour $\omega >> \omega_3$:

$$\begin{aligned} A_3(\omega) &\approx \frac{\omega}{\omega_3} \\ \varphi_3(\omega) &\approx Arg\left(\frac{j\omega}{\omega_3}\right) = 90° \end{aligned} \tag{6.113}$$

Le tracé asymptotique consistera précisément à ne retenir que les deux approximations ci-dessus pour décrire ce qui se passe "avant" et "après" le zéro sur l'axe des fréquences.

Graphiquement, chacune de ces approximations correspond à une droite :

- avant le zéro :
  - le gain est une droite horizontale d'ordonnée 1
  - la phase est une droite horizontale d'ordonnée 0°
- après le zéro :
  - le gain est une droite oblique de pente + 1 et passant par le point $(\omega, A) = (\omega_3, 1)$
  - la phase est une droite horizontale d'ordonnée 90°

On peut vérifier que les deux droites de gain se croisent au point $(\omega, A) = (\omega_3, 1)$, c'est-à-dire précisément en $\omega = \omega_3$, à l'abscisse du zéro proprement dit.

A cette même abscisse, la phase passe, elle, de 0° à 90° de manière discontinue dans le tracé asymptotique.

Pour compléter le tracé, on peut calculer les valeurs non asymptotiques de H_3 au zéro :

$$\begin{aligned} A_3(\omega_3) &= \sqrt{2} \\ \varphi_3(\omega_3) &= Arg\left(1 + j\right) = 45^o \end{aligned} \tag{6.114}$$

La pulsation ω_3 est définie comme la pulsation de coupure de cette fonction.

Lien avec le tableau §5.5.10

Pour comprendre la règle de tracé de la ligne 4 du tableau, analysons comment l'ajout d'un facteur H_3 (c'est-à-dire d'un zéro non nul) dans une fonction $H()$ modifierait les courbes de Bode de cette dernière.

Compte tenu de ce qui est dit ci-dessus :

- "avant son zéro" (c'est-à-dire pour $\omega < \omega_3$), H_3 se réduit à une fonction unité (gain de valeur 1 et phase nulle). La multiplication par H_3 ne change donc rien à $H()$;
- "après son zéro" (c'est-à-dire pour $\omega > \omega_3$), H_3 possède une pente +1 et une phase de 90°. Or on sait que les courbes de Bode de différents facteurs s'additionnent en axes logarithmiques. L'ajout d'un facteur H_3 implique une augmentation de la pente du gain d'une unité et une augmentation de la phase de 90° (dans cette gamme de fréquence et par rapport aux courbes initiales de $H()$).

La constatation qu'avant le zéro le facteur H_3 ne modifie pas la fonction $H()$ préexistante (mais possède un gain non unitaire et une phase non nulle ensuite), combinée à la propriété que les courbes de Bode de différents facteurs s'additionnent, permet de formuler l'influence du zéro comme l'*ajout* d'une unité de pente et de 90° de phase *au passage de celui-ci*[11] (si l'on parcourt les pulsations de manière croissante).

Cette règle peut donc s'écrire de manière générale :

au passage d'un zéro non nul, **la pente du gain augmente d'une unité (= de +20dB/décade)** **et la phase augmente de 90°**

C'est bien la règle de tracé mentionnée à la ligne 4 (colonne centrale) du tableau.

Zéros non nuls multiples

Le cas des zéros non nuls multiples revient simplement à considérer k facteurs H_3 identiques. Pour chacun de ces facteurs, le raisonnement précédent peut être tenu individuellement :

- "avant le zéro", l'introduction de chaque facteur ne change en rien les courbes de Bode ;
- "après le zéro", chaque facteur implique une augmentation de la pente du gain d'une unité et une augmentation de la phase de 90°.

de sorte qu'on arrive immédiatement à la règle de tracé asymptotique suivante (simple généralisation de la précédente) :

au passage de k zéros non nuls, **la pente du gain augmente de k unités (= de $+k$.20dB/décade)** **et la phase augmente de k.90°**

C'est bien la règle de tracé mentionnée à la ligne 4 (colonne de droite) du tableau.

Pôle non nul (simple)

Considérons la fonction suivante :

$$H_4(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_4}\right)} \tag{6.115}$$

Cette fonction possède par définition un pôle de valeur $-\omega_4$, auquel il correspond un changement de comportement asymptotique de la réponse en fréquence à la pulsation ω_4.

11. on parle ici en valeurs asymptotiques. Le graphe réel peut aisément être complété ensuite

Le gain et la phase de cette fonction valent :

$$A_4(\omega) = |H_4(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_4}\right)^2}} \qquad \varphi_4(\omega) = Arg\left(\frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_4}}\right) \tag{6.116}$$

Lorsque ω est très inférieur ou très supérieur à ω_4, on peut faire les approximations suivantes :

- pour $\omega << \omega_4$:

$$A_4(\omega) \approx 1 \qquad \varphi_4(\omega) \approx 0^\circ \tag{6.117}$$

- et pour $\omega >> \omega_4$:

$$A_4(\omega) \approx \frac{\omega_4}{\omega} \qquad \varphi_4(\omega) \approx Arg\left(\frac{\omega_4}{j\omega}\right) = -90^\circ \tag{6.118}$$

Le tracé asymptotique consistera précisément à ne retenir que les deux approximations ci-dessus pour décrire ce qui se passe "avant" et "après" le pôle sur l'axe des fréquences.

Graphiquement, chacune de ces approximations correspond à une droite :

- avant le pôle :
  - le gain est une droite horizontale d'ordonnée 1
  - la phase est une droite horizontale d'ordonnée 0°
- après le pôle :
  - le gain est une droite oblique de pente -1 et passant par le point $(\omega, A) = (\omega_4, 1)$
  - la phase est une droite horizontale d'ordonnée -90°

On peut vérifier que les deux droites de gain se croisent au point $(\omega, A) = (\omega_4, 1)$, c'est-à-dire précisément en $\omega = \omega_4$, à l'abscisse du pôle proprement dit.

A cette même abscisse, la phase passe, elle, de 0° à -90° de manière discontinue dans le tracé asymptotique.

Pour compléter le tracé, on peut calculer les valeurs non asymptotiques de H_4 au pôle :

$$A_4(\omega_4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \varphi_4(\omega_4) = Arg\left(\frac{1}{1+j}\right) = -45^o \tag{6.119}$$

La pulsation ω_4 est définie comme la pulsation de coupure de cette fonction.

Lien avec le tableau §5.5.10

Pour comprendre la règle de tracé de la ligne 5 du tableau, analysons comment l'ajout d'un facteur H_4 (c'est-à-dire d'un pôle non nul) dans une fonction $H()$ modifierait les courbes de Bode de cette dernière.

Compte tenu de ce qui est dit ci-dessus :

- "avant son pôle" (c'est-à-dire pour $\omega < \omega_4$), H_4 se réduit à une fonction unité (gain de valeur 1 et phase nulle). La multiplication par H_4 ne change donc rien à $H()$;
- "après son pôle" (c'est-à-dire pour $\omega > \omega_4$), H_4 possède une pente -1 et une phase de -90°. Or on sait que les courbes de Bode de différents facteurs s'additionnent en axes logarithmiques. L'ajout d'un facteur H_4 implique une diminution de la pente du gain d'une unité et une diminution de la phase de 90° (dans cette gamme de fréquence et par rapport aux courbes initiales de $H()$).

La constatation qu'avant le pôle le facteur H_4 ne modifie pas la fonction $H()$ préexistante (mais possède un gain non unitaire et une phase non nulle ensuite), combinée à la propriété que les courbes de Bode de différents facteurs s'additionnent, permet de formuler l'influence du pôle comme le *retrait* d'une unité de pente et de 90° de phase *au passage de celui-ci*[12] (si l'on parcourt les pulsations de manière croissante).

Cette règle peut donc s'écrire de manière générale :

au passage d'un pôle non nul, la pente du gain diminue d'une unité (-20dB/décade) et la phase diminue de 90°

C'est bien la règle de tracé mentionnée à la ligne 5 (colonne centrale) du tableau.

Pôles non nuls multiples

Le cas des pôles non nuls multiples revient simplement à considérer k facteurs H_4 identiques. Pour chacun de ces facteurs, le raisonnement précédent peut être tenu individuellement :

- "avant le pôle", l'introduction de chaque facteur ne change en rien les courbes de Bode ;
- "après le pôle", chaque facteur implique une diminution de la pente du gain d'une unité et une diminution de la phase de 90°.

de sorte qu'on arrive immédiatement à la règle de tracé asymptotique suivante (simple généralisation de la précédente) :

au passage de k pôles non nuls, la pente du gain diminue de k unités (-k.20dB/décade) et la phase diminue de k.90°

12. on parle ici en valeurs asymptotiques. Le graphe réel peut aisément être complété ensuite

C'est bien la règle de tracé mentionnée à la ligne 5 (colonne de droite) du tableau.

Pôles complexes conjugués

Nous avons supposé jusqu'ici que les valeurs ω_i étaient des réels positifs ou nuls. Il se peut néanmoins que la fonction $H()$, une fois factorisée contienne un facteur du second degré au dénominateur, facteur que nous notons :

$$H_5(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_5} + \left(\frac{j\omega}{\omega_5}\right)^2} = \frac{1}{1 + 2j\zeta\frac{\omega}{\omega_5} - \left(\frac{\omega}{\omega_5}\right)^2} \tag{6.120}$$

Ce facteur introduit deux pôles. Ceux-ci sont de la forme :

$$p_1, p_2 = -\omega_5\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \tag{6.121}$$

Trois scénarios sont envisageables :

- si $\zeta > 1$, les deux pôles sont réels : on retombe donc sur un cas déjà envisagé (la fonction est décomposable en deux facteurs du premier degré)
- si $\zeta = 1$, la fonction possède un pôle double en $-\omega_5$ (cas déjà envisagé également)
- si $\zeta < 1$, la fonction possède **deux pôles complexes conjugués**

Dans ce dernier cas, les deux pôles peuvent être réécrits comme :

$$p_1, p_2 = -\omega_5\left(\zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2}\right) \tag{6.122}$$

Comme pour les autres fonctions, on peut distinguer deux domaines de fréquence. Lorsque ω est très inférieur ou très supérieur à ω_5, on peut faire les approximations suivantes :

- pour $\omega << \omega_5$:

$$\begin{aligned} A_5(\omega) &\approx 1 \\ \varphi_5(\omega) &\approx 0° \end{aligned} \tag{6.123}$$

- et pour $\omega >> \omega_5$:

$$\begin{aligned} A_5(\omega) &\approx \left(\frac{\omega_5}{\omega}\right)^2 \\ \varphi_5(\omega) &\approx Arg\left(-\left(\frac{\omega}{\omega_5}\right)^2\right) = -180° \end{aligned} \tag{6.124}$$

On voit que le comportement *asymptotique* de cette paire de pôles complexes conjugués est identique à celui d'un pôle double en $-\omega_5$: en haute fréquence, la pente du module diminue de 2 et la phase de 180°.

La différence par rapport à un pôle double réel se voit dans le comportement de la réponse en fréquence (non asymptotique) autour de ω_5. En effet, en ce point :

$$H_5(j\omega)|_{\omega=\omega_5} = \frac{1}{2j\zeta} \tag{6.125}$$

La phase vaut -90° et le module prend une valeur qui dépend de $\zeta = 1$:

$$|H_5(j\omega)|_{\omega=\omega_5}| = \frac{1}{2\zeta} \tag{6.126}$$

- dans le cas d'un pôle double, $\zeta = 1$ et donc :

$$|H_5(j\omega)|_{\omega=\omega_5}| = \frac{1}{2} \tag{6.127}$$

- dans le cas d'une paire de pôles complexes conjugués, $\zeta < 1$ et donc :

$$|H_5(j\omega)|_{\omega=\omega_5}| > \frac{1}{2} \tag{6.128}$$

En particulier dans le cas où $\zeta = 0$, le gain tend vers l'infini en ω_5 : c'est le phénomène de résonance.

Zéros complexes conjugués

Il se peut encore que la fonction $H()$, une fois factorisée contienne un facteur du second degré au numérateur, facteur que nous notons :

$$H_6(j\omega) = 1 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_6} + \left(\frac{j\omega}{\omega_6}\right)^2 = 1 + 2j\zeta\frac{\omega}{\omega_6} - \left(\frac{\omega}{\omega_6}\right)^2 \tag{6.129}$$

Ce facteur introduit deux zéros. Ceux-ci sont de la forme :

$$p_1, p_2 = -\omega_6\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \tag{6.130}$$

Trois scénarios sont envisageables :

- si $\zeta > 1$, les deux zéros sont réels : on retombe donc sur un cas déjà envisagé (la fonction est décomposable en deux facteurs du premier degré)
- si $\zeta = 1$, la fonction possède un zéro double en $-\omega_6$ (cas déjà envisagé également)
- si $\zeta < 1$, la fonction possède **deux zéros complexes conjugués**

Dans ce dernier cas, les deux zéros peuvent être réécrits comme :

$$p_1, p_2 = -\omega_6\left(\zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2}\right) \tag{6.131}$$

Comme pour les autres fonctions, on peut distinguer deux domaines de fréquence. Lorsque ω est très inférieur ou très supérieur à ω_6, on peut faire les approximations suivantes :

- pour $\omega << \omega_6$:

$$\begin{aligned} A_6(\omega) &\approx 1 \\ \varphi_6(\omega) &\approx 0^\circ \end{aligned} \tag{6.132}$$

- et pour $\omega >> \omega_6$:

$$\begin{aligned} A_6(\omega) &\approx \left(\frac{\omega}{\omega_6}\right)^2 \\ \varphi_6(\omega) &\approx Arg\left(-\left(\frac{\omega}{\omega_6}\right)^2\right) = 180^\circ \end{aligned} \tag{6.133}$$

On voit que le comportement *asymptotique* de cette paire de zéros complexes conjugués est identique à celui d'un zéro double en $-\omega_6$: en haute fréquence, la pente du module augmente de 2 et la phase de 180°.

La différence par rapport à un zéro double réel se voit dans le comportement de la réponse en fréquence (non asymptotique) autour de ω_6. En effet, en ce point :

$$H_6(j\omega)|_{\omega=\omega_6} = 2j\zeta \tag{6.134}$$

La phase vaut +90° et le module prend une valeur qui dépend de $\zeta = 1$:

- dans le cas d'un zéro double, $\zeta = 1$ et donc :

$$|H_6(j\omega)|_{\omega=\omega_6}| = 2 \tag{6.135}$$

- dans le cas d'une paire de zéros complexes conjugués, $\zeta < 1$ et donc :

$$|H_6(j\omega)|_{\omega=\omega_5}| < 2 \tag{6.136}$$

En particulier dans le cas où $\zeta = 0$, le gain est nul en ω_6.

6.12 Liens entre concepts temporels et fréquentiels

	analyse temporelle		
nom	**signal temporel v(t)**	**réponse indicielle**	**réponse impulsionnelle**
définition		réponse du circuit à un signal d'entrée en forme d'échelon	réponse du circuit à un signal d'entrée en forme d'impulsion de Dirac
remarque	le signal de sortie temporel est la convolution du signal d'entrée par la réponse impulsionnelle		

	analyse fréquentielle		
nom(s)	**phaseur $\underline{V}$**	**réponse en fréquence** $H(j\omega)$ **aussi appelée transmittance isochrone aussi appelée (dans ce cours) : fonction de transfert en** $j\omega$	**fonction de transfert H(p)**
nature mathématique	nombre complexe constant	nombre complexe variable dépendant de la pulsation ω (ou de la fréquence f)	nombre complexe variable dépendant de p (variable de Laplace $p = \sigma + j\omega$)
interprétation	représentation synthétique d'un signal sinusoïdal	représente la fonction du circuit	représente la fonction du circuit
remarque	est aussi la transformée de Fourier du signal temporel si sinusoïdal)	est aussi la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle	est aussi la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle

Index

$v_C(t)$, 144
$v_L(t)$, 147
$v_R(t)$, 144, 147
[A], 36
[C], 36
[V], 36
[W], 36
électrolytes, 13
électron, 13, 36
électrons, 13, 15
électrons libres, 10, 13
énergie, 31, 33
équaliseur, 170
équipotentiel, 10
équivalence au sens de Thévenin, 112, 113
équivalent de Norton, 117
équivalent de Thévenin, 5, 68, 113, 120
équivalents, 112
état électrique, 38, 39, 61, 62
états électriques, 61, 62
à vide, 11, 126
1-port, 8
2-ports, 9

actif, 7, 31
actifs, 56, 59
adaptation d'impédance, 128
admittance, 165
agitation thermique, 13
amont, 12
ampèremètre, 14, 38
ampères, 14, 36
analyse complexe, 169, 175
analyse fréquentielle, 135
analyse temporelle, 135
arc électrique, 50
auto-induction, 49
aval, 11

bande passante, 144
biporte, 9
bobine, 46, 50
bobines, 49
borne, 10, 28
bornes, 8, 9, 19, 64
branche, 82

capacité, 8, 37, 52, 56, 57
caractériser, 37
caractéristique, 39, 40, 42, 60–62, 64, 66
champ électrique, 13, 57
champ magnétique, 48, 49, 57
chargé, 11
chargée, 136
charge, 11, 12, 34, 37, 50, 95, 120, 136, 141
charge électrique, 11, 13, 14, 36, 54–57
charges, 11, 59
circuit, 8, 9, 81
circuit du premier ordre, 143
circuit extérieur, 40, 60–62
circuit ouvert, 37, 64, 66–68, 107, 159, 163
circuits imprimés, 10
circuits intégrés, 10
circuits linéaires en régime sinusoïdal, 76, 150
comportement électrique, 38, 39
comportements électriques, 38
composant, 8–12, 15
composants, 7–10, 37
concept, 5
concepts, 5
condensateur, 52
conditions initiales, 139
conductance, 44, 166
conducteurs, 8, 10
conductivité, 46
connexion électrique, 10
connexions, 10
constante de temps, 143
continues, 34
convention, 15, 22
convention générateur, 33, 34, 50
convention graphique, 20
convention récepteur, 32, 34, 50, 57
conventions, 14
conventions de représentation, 8
coulombs, 11, 14, 36
courant, 7, 13–15, 21, 31–33, 36, 38, 44, 46–49, 53–56, 60, 62

courant électrique, 29
courant conventionnel, 15, 16, 31
courants, 21, 23
courants de branche, 84
courants de maille, 84
courbes de Bode, 135, 149, 169
court-circuit, 37, 64, 65, 67, 68, 107, 159, 163
critère d'adaptation d'impédance en courant, 130
critère d'adaptation d'impédance en tension, 129

débit, 14
décade, 193
décharge, 136, 141
décharger, 136
décibel, 170, 191
décibels, 190
démagnétiser, 145
dB, 191
ddp, 19–21, 24–27, 29, 31, 33, 38, 46, 47, 49, 51, 53–56, 59, 60, 62, 64, 82, 136, 140
ddps, 23, 25, 26, 81
deux pôles complexes conjugués, 225
deux zéros complexes conjugués, 226
diagramme de Bode, 169
différence de potentiel, 13, 19, 20, 44, 45, 136
différentiel, 29
diode, 8
dipôle, 8, 9, 38
dipôles, 8, 9, 37
dipôles idéaux, 42–44
diviseur résistif, 93
dual, 145
dualité, 62, 67
duals, 56, 63, 67

effet capacitif, 44, 52
effet inductif, 44, 46
effet Joule, 31, 45
effet résistif, 44
en avance, 159
en charge, 11
en retard, 162
entrée différentielle, 27

f.e.m., 27
farad, 52
fem, 27, 50, 59
fem à vide, 121, 122, 126
fem induite, 27, 49
filtrage, 144
filtre passe-bas, 144, 147
filtre passe-haut, 147
filtre passe-haut., 144
flux, 49, 51
flux magnétique, 48, 56
fonction de transfert, 168, 177, 179
force électromotrice, 27, 48, 59
force électromotrice *induite*, 49
force électromotrice induite, 59
force *contre*-électromotrice, 50
fréquence de coupure, 144

gain, 71, 72, 168, 169, 218
gras, 5

Henri, 46

impédance, 60, 62, 120, 127, 149, 154, 155, 160
impédance d'entrée, 127, 129, 130
impédance d'un noeud, 131
impédance de sortie, 127, 129, 130
impédances, 135
impulsion de Dirac, 168
inductance, 8, 37, 46, 47, 49, 56, 57
inductance mutuelle, 49
inductance propre, 49
inductances, 49
induction mutuelle, 49
intensité, 13–16, 33, 45
interrupteur, 67
ions, 13

lieu mathématique, 61, 62
linéaire, 167
linéaires, 37
logarithme, 170
loi, 24, 38, 39, 42, 59, 61
loi basse fréquence, 48, 54
loi court terme, 47, 53
loi d'Ohm, 24, 39, 44, 51
loi de l'effet inductif, 50
loi de Lenz, 27, 48–50, 59
loi des mailles, 83
loi des nœuds, 83
loi haute fréquence, 47, 53
loi long terme, 48, 54

magnétiser, 145
maille, 82
masse, 22–24, 26, 27, 29, 30, 81
modèles, 43
monochromatique, 167
montage, 8, 37
montages, 37
multimètre, 9, 14
mutuelle, 49

nœud, 10, 22, 29, 81
nœuds, 19
noeud, 10
noeud à basse impédance, 131
noeud à haute impédance, 131
nombre complexe, 168
non linéaires, 37

octave, 193
ohmmètre, 14
ohms, 44

pôle, 177, 178
pôles, 135, 149, 175, 178, 180, 182
pôles à l'origine, 178, 180
parallèle, 38, 82
passif, 7, 31, 44, 56
phase, 169, 219
phaseur, 149, 154, 167, 168
phaseurs, 135
pince ampèremétrique, 14
pinces ampèremétriques, 14
police particulière, 5
potentiel, 20–27, 29, 31, 81, 136, 140
potentiel électrique, 10, 19, 20, 27
potentiels, 20–26
potentiomètre, 126
puissance, 7, 34, 36, 45
puissance électrique, 33
pulsation de coupure, 144, 221, 223

quadripôle, 9
quadripôles, 9, 37

réactance, 165
référence, 27
régime linéaire sinusoïdal, 167
régime transitoire, 150
réponse en fréquence, 135, 149, 168, 177
réponse impulsionnelle, 168
réponse indicielle, 137, 168
résistance, 5, 8, 10, 31, 32, 37, 38, 44, 46, 47, 53, 56, 60, 62, 65, 66, 127, 165
résistance d'entrée, 120, 126
résistance de sortie, 68, 120–122, 126
résistances, 68
résistivité, 46
résonance, 183, 186, 226
racines complexes conjuguées, 182

série, 38, 82
schéma, 8
schémas, 7
self, 46
self saturable, 75
self-inductance, 46
semi-conducteurs, 13
sens de lecture, 11
siemens, 44
sortie différentielle, 27
source, 12, 34, 37, 50, 60, 62
source commandée, 71
source de courant, 62
source de courant commandée en courant, 72
source de courant commandée en tension, 72
source de courant idéale, 37–39, 59, 61, 63, 66, 68
source de tension, 8, 31, 60
source de tension commandée en courant, 72
source de tension commandée en tension, 71
source de tension idéale, 27, 37–39, 59, 63, 65, 68
sources, 12
sources commandées, 37
stabilité, 180
susceptance, 166

tension, 7, 24, 32, 36, 44, 59
tension de mode commun, 26
tension différentielle, 26
terre, 27–30
théorème de superposition, 68
théorème de Thévenin, 113
tracé asymptotique, 135, 149, 173
transadmittance, 72
transformateur, 9
transformateur idéal, 37
transimpédance, 72
transistor, 5, 9, 67
transistors, 59
transmittance isochrone, 168
transmittance isomorphe, 168, 179
trous, 13

valeur efficace, 135, 149
variable de Laplace, 179
voltmètre, 14, 19, 38
volts, 19, 20, 36

watts, 33, 36

zéro, 177
zéros, 135, 149, 175, 178, 180, 182
zéros à l'origine, 178, 180