

Chapitre 1 :

LE TRIPHASE

.....	1.2
1.1. NOTATIONS - CONVENTIONS	1.2
1.1.1. Conventions	1.2
1.1.2. Notations	1.3
1.2. RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS RELATIVES AUX COURANTS ALTERNATIFS	1.3
1.2.1. Représentation des fonctions sinusoïdales du temps	1.3
1.2.2. Représentation de la puissance	1.6
1.3. CARACTERISTIQUES D'UN SYSTEME POLYPHASE	1.9
1.3.1. Modes de couplage des circuits polyphasés	1.9
1.3.2. Cas particuliers de couplage : le système triphasé	1.18
1.3.3. Influence des harmoniques dans les circuits polyphasés	1.21
1.3.4. Mesure de la puissance dans les circuits polyphasés	1.24
1.3.5. Facteur de puissance	1.26
1.3.6. Mesure de la puissance dans les circuits triphasés	1.27
1.3.7. Etude vectorielle d'un système triphasé connecté en étoile	1.32
1.4. LES SYSTEMES DE COMPOSANTES	1.33
1.4.1. Introduction	1.33
1.4.2. Coordonnées (ou composantes) symétriques de Fortescue	1.37
1.4.3. Composantes d'Edith Clarke	1.48

LE TRIPHASE

1.1. NOTATIONS - CONVENTIONS

1.1.1. Conventions

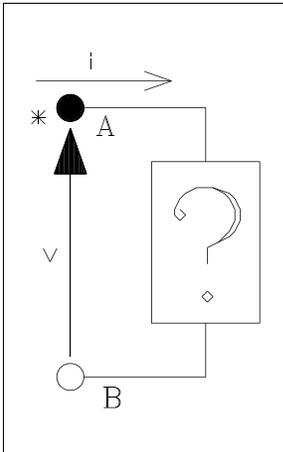


Figure 1.1-1

La convention "récepteur" est utilisée dans ce cours. On considère comme positive la puissance **absorbée** par le circuit ou la machine. Ainsi un moteur absorbe une puissance électrique positive et absorbe une puissance mécanique négative. Pour une génératrice, c'est le contraire. Pour un circuit électrique, la tension appliquée v fait circuler un courant dans le sens indiqué à la Figure 1.1-1. Le sens positif du courant est indiqué par une flèche et est conventionnellement celui des charges **positives**. La borne d'entrée d'un dipôle est marquée par un astérisque (*) et désigne celle où le courant est entrant. Dans ce cours, la borne d'entrée est indiquée par un cercle plein, alors que la borne de sortie l'est par un cercle vide. La flèche de tension désigne la borne d'entrée, c'est-à-dire celle à laquelle il faut **appliquer** une tension positive pour faire circuler un courant positif. Il faut remarquer que la convention sur le sens de la flèche de

tension n'est pas celle admise par la Commission électrotechnique internationale (C.E.I.) mais est d'usage courant en France et en Belgique francophone. Les Suisses, les Allemands, les Belges néerlandophones placent le pied de la flèche de tension à la borne d'entrée.

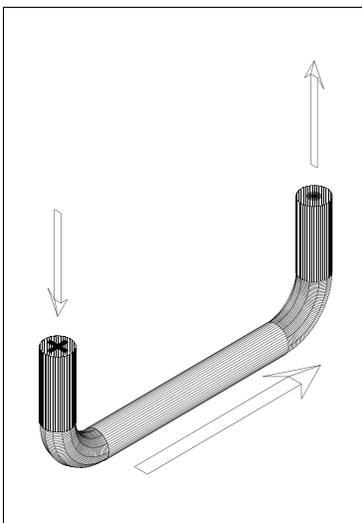


Figure 1.1-2

L'utilisation systématique de ces conventions évite bien des erreurs de calcul. Cependant, la même utilisation systématique conduirait à une multiplication de variables égales en valeur absolue mais de signe contraire et de flèches de sens opposé. Il nous arrivera de ne considérer qu'une des deux grandeurs (et de commettre une entorse aux conventions).

Le sens positif du courant dans un conducteur est donc indiqué par une flèche (Figure 1.1-2). Si on considère une section droite du conducteur, le symbole \otimes indique que le courant entre dans le conducteur alors que le symbole \ominus indique que le courant en sort.

1.1.2. Notations

$a = a(t)$: valeur instantanée

$\underline{a}(t)$: valeur instantanée complexe
 : vecteur tournant dont la projection sur un axe de référence fournit la valeur instantanée d'une grandeur cosinusoidale de pulsation ω
 : $a(t) = \text{Re}(\underline{a}(t))$

$\underline{A} = A \angle \alpha$: nombre complexe de module A et d'argument α .
 Le plus fréquemment, \underline{A} désigne un phaseur de valeur efficace A tel que $\underline{a} = \underline{A} \sqrt{2} e^{j\omega t}$

A_M : valeur de crête ou maximale dans le temps : $A_M = A \sqrt{2}$

\vec{A} : vecteur spatial de module A

A^M : valeur maximale d'une grandeur variant dans l'espace

i_{AB} : courant circulant de A vers B (flèche de A vers B)

$v_{BA} = v_A - v_B$: potentiel de A par rapport à B (flèche de B vers A)

1.2. RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS RELATIVES AUX COURANTS ALTERNATIFS

1.2.1. Représentation des fonctions sinusoidales du temps

Une grandeur fonction sinusoidale du temps, de pulsation ω (par exemple une tension), se représente par

$$\begin{aligned} v &= V_M \cos(\omega t + \xi_V) && \text{où } V_M \text{ est la valeur de crête} \\ &= V \sqrt{2} \cos(\omega t + \xi_V) && \text{où } V \text{ est la valeur efficace} \end{aligned} \quad (1.2-1)$$

On peut encore écrire :

$$\begin{aligned}
 v &= \operatorname{Re} \left(V \sqrt{2} \cos(\omega t + \xi_V) + j V \sqrt{2} \sin(\omega t + \xi_V) \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(V \sqrt{2} e^{j(\omega t + \xi_V)} \right)
 \end{aligned}
 \tag{1.2-2}$$

On définit une **valeur instantanée complexe** \underline{v} par

$$\begin{aligned}
 \underline{v} &= V \sqrt{2} e^{j(\omega t + \xi_V)} \\
 &= V e^{j \xi_V} \sqrt{2} e^{j \omega t}
 \end{aligned}
 \tag{1.2-3}$$

et le **phaseur** \underline{V} par

$$\underline{V} = V e^{j \xi_V}$$

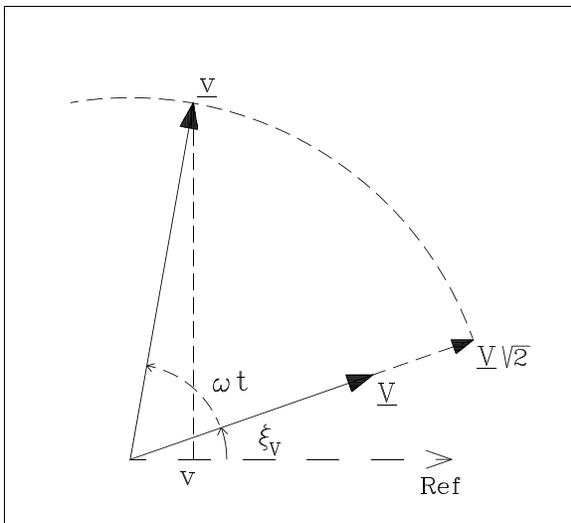


Figure 1.2-1

Dans le plan complexe de Gauss (représentation de Fresnel), le phaseur \underline{V} a donc un module égal à la valeur efficace de la grandeur et un argument égal à ξ_V par rapport à l'axe de référence. C'est un vecteur **fixe**.

La valeur instantanée complexe \underline{v} a un module égal à $V \sqrt{2}$ et est décalée de ωt par rapport à \underline{V} . C'est un vecteur **tournant** à la vitesse de rotation ω .

La valeur instantanée de la grandeur est obtenue par projection de la valeur instantanée complexe sur l'axe réel :

$$v = \operatorname{Re}(\underline{v}) \tag{1.2-4}$$

Cette dernière relation s'écrit encore :

$$v = \frac{\underline{v} + \underline{v}^*}{2} \tag{1.2-5}$$

où \underline{v}^* est le complexe conjugué de \underline{v} . C'est un vecteur tournant **en sens inverse**.

Dans ce qui suit, les nombres complexes seront représentés soit par leur module et leur argument, soit par leurs parties réelle et imaginaire.

On peut représenter dans un même diagramme des phaseurs relatifs à des grandeurs de nature

différentes : tensions, courants, flux, à condition qu'elles aient la **même pulsation**.

Pour les distinguer, nous utiliserons dans ce cours les symboles suivants :

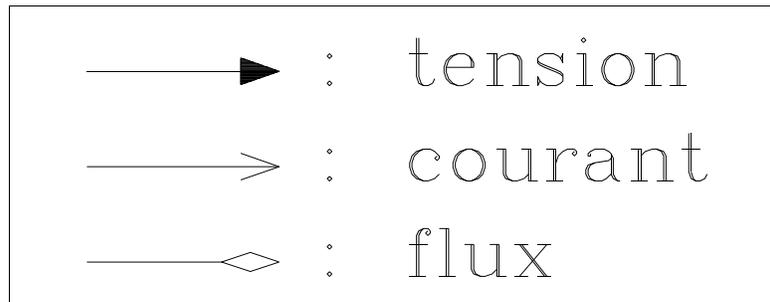


Figure 1.2-2

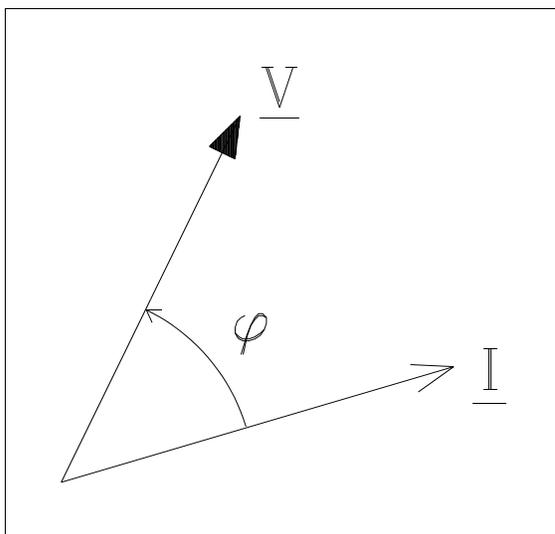


Figure 1.2-3

Les déphasages entre grandeurs de même pulsation sont constants et il est usuel de prendre une des grandeurs comme référence et de définir les phases par rapport à elle. L'habitude a ainsi été prise en électrotechnique de considérer le courant comme référence et de définir l'argument de la tension par rapport à celui-ci. C'est ce que l'on désigne par " **angle de charge** " : φ .

Ce choix peut apparaître comme peu rationnel, puisque la distribution d'électricité est assurée par des systèmes à tension pratiquement constante. Dans un réseau, qu'il soit industriel ou domestique, la tension existe toujours et est pratiquement constante alors que le courant est

évidemment variable avec la charge et peut être nul. La seule raison avancée pour "expliquer" cette convention est d'ordre commercial. Comme les charges des consommateurs sont inductives et que le distributeur pénalise les valeurs trop importantes de l'angle de charge, il n'a pas paru acceptable à certains que la pénalisation soit relative à des valeurs négatives de φ .

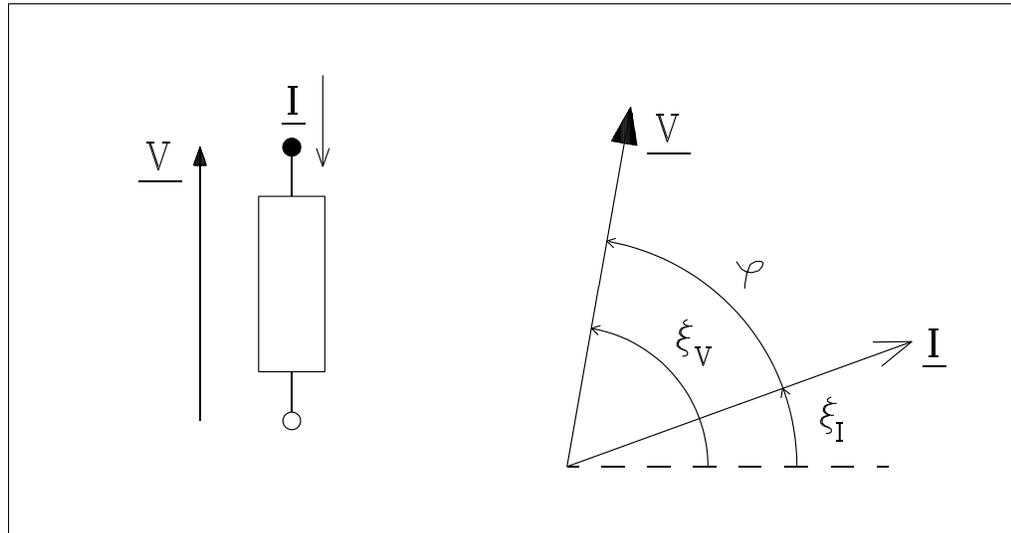


Figure 1.2-4

Si la tension $\underline{V} = V \angle \xi_V$ est appliquée à une impédance $\underline{Z} = R + jX = Z \angle \zeta$, le courant qui circule vaut :

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} = \frac{V}{Z} \angle \xi_V - \zeta \quad (1.2-6)$$

Cette relation utilise simplement les propriétés des nombres complexes.

On constate que l'argument du courant vaut $\xi_I = \xi_V - \zeta$, c'est-à-dire qu'une impédance inductive ($X > 0$; $\zeta > 0$) déphase le courant en arrière par rapport à la tension $\xi_I < \xi_V$ (mais $\zeta = \varphi > 0$), alors qu'une impédance capacitive ($X < 0$; $\zeta < 0$) déphase le courant en avant par rapport à la tension $\xi_I > \xi_V$ (mais $\zeta = \varphi < 0$).

Il faut être très attentif pour ne pas commettre d'erreur grossière lorsqu'on mélange dans le même diagramme des grandeurs de pulsations différentes.

1.2.2. Représentation de la puissance

Puissance active

Soit à calculer la puissance transmise de **A** vers **B**, au point **X** du circuit de la Figure 1.2-5-a c'est-à-dire, celle correspondant à la tension \underline{V} et au courant \underline{I} (Figure 1.2-5-b).

$$\begin{aligned} v &= V_M \cos(\omega t + \xi_V) \\ i &= I_M \cos(\omega t + \xi_I) \end{aligned} \quad (1.2-7)$$

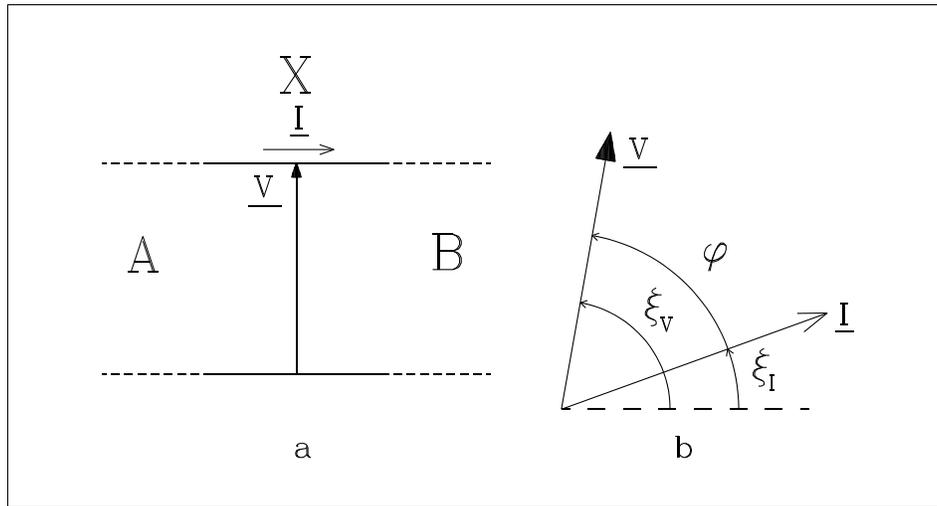


Figure 1.2-5

La valeur instantanée de la puissance vaut :

$$\begin{aligned} p &= v i \\ &= V_M I_M \cos(\omega t + \xi_V) \cos(\omega t + \xi_I) \\ &= \frac{V_M I_M}{2} \left(\cos(\xi_V - \xi_I) + \cos(2\omega t + \xi_V + \xi_I) \right) \\ &= V I \cos \varphi + V I \cos(2\omega t + \xi_V + \xi_I) \end{aligned} \quad (1.2-8)$$

La puissance instantanée comporte deux termes :

- un terme constant $P = V I \cos \varphi$, c'est la valeur moyenne de p . On l'appelle **puissance active**.
- un terme à fréquence double, dont la moyenne sur un nombre entier de périodes est nulle. Ce terme ne contribue pas à l'échange moyen entre **A** et **B** mais son existence ne doit pas être oubliée car il peut être la cause de vibrations indésirables.

La puissance utile, celle qui correspond à un **travail effectué**, est donnée par :

$$P = V I \cos \varphi \quad (1.2-9)$$

Elle est positive pour $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Elle est négative, c'est-à-dire qu'elle s'écoule de **B** vers

A pour $3\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Pour les charges habituelles, c'est-à-dire inductives : $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

(ou si la puissance s'écoule de **B** vers **A** : $\pi \leq \varphi \leq 3\pi/2$).

Puissance apparente

Par définition

$$\begin{aligned} \underline{S} &\triangleq \underline{V} \underline{I}^* \\ &= V I \angle \xi_V - \xi_I \\ &= V I \angle \varphi \end{aligned} \quad (1.2-10)$$

Dans un système à tension constante, la puissance apparente est proportionnelle au courant. La relation (1.2-10) s'écrit encore :

$$\underline{S} = V I \cos \varphi + j V I \sin \varphi \quad (1.2-11)$$

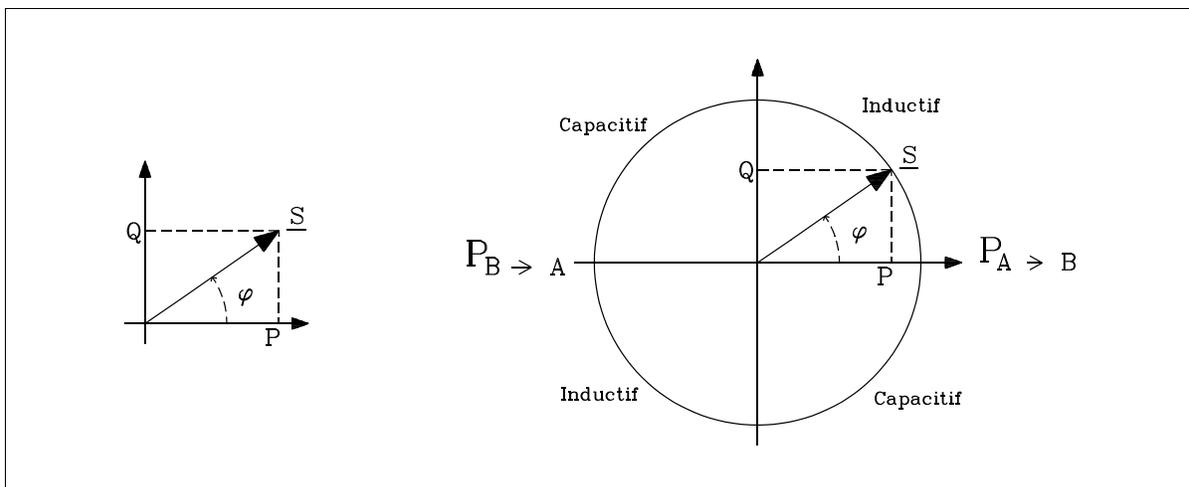


Figure 1.2-6

Puissance réactive

Dans l'expression (1.2-11) : $P = V I \cos \varphi = \text{Re}(\underline{S})$.

On définit la puissance réactive :

$$Q = V I \sin \varphi = \text{Im}(\underline{S}) \quad (1.2-12)$$

De sorte que :

$$\underline{S} = P + j Q \quad (1.2-13)$$

Lorsque P est positif,

Q est positive si φ est positif, c'est-à-dire si la charge est inductive.

Q est négative si φ est négatif, c'est-à-dire si la charge est capacitive.

La notion de puissance réactive est sans doute difficile à saisir. **Elle ne correspond à aucun travail effectif, cependant sa circulation dans les lignes d'un réseau amène des pertes et des chutes de tension.**

Elle n'apparaît que si la charge est réactive, c'est-à-dire comporte une possibilité de stockage d'énergie. On peut tenir compte de cette réflexion pour présenter une image *intuitive* de la puissance réactive.

Reprenons l'expression de la puissance instantanée :

$$\begin{aligned} p &= V I (\cos(\xi_V - \xi_I) + \cos(2\omega t + \xi_V + \xi_I)) \\ &= V I (\cos \varphi + \cos(2\omega t + 2 \xi_V - \varphi)) \\ &= V I (\cos \varphi + \cos \varphi \cos(2\omega t + 2 \xi_V) + \sin \varphi \sin(2\omega t + 2 \xi_V)) \\ &= V I \cos \varphi (1 + \cos(2\omega t + 2 \xi_V)) + V I \sin \varphi \sin(2\omega t + 2 \xi_V) \\ &= P (1 + \cos(2\omega t + 2 \xi_V)) + Q \sin(2\omega t + 2 \xi_V) \end{aligned} \quad (1.2-14)$$

Le terme qui affecte P est toujours positif. Son produit avec P représente la puissance qui s'écoule toujours dans le même sens. Le terme qui affecte Q est alternatif. Son produit avec Q représente la puissance qui est échangée *alternativement dans les deux sens* entre la source et la charge.

1.3. CARACTERISTIQUES D'UN SYSTEME POLYPHASE

1.3.1. Modes de couplage des circuits polyphasés

Considérons un ensemble de m sources électriquement indépendantes $S_1, S_2, S_3, \dots, S_m$. Les tensions de même valeur efficace et déphasées d'un angle $2\pi/m$ constituent un système m -phasé équilibré d'ordre direct, c'est-à-dire

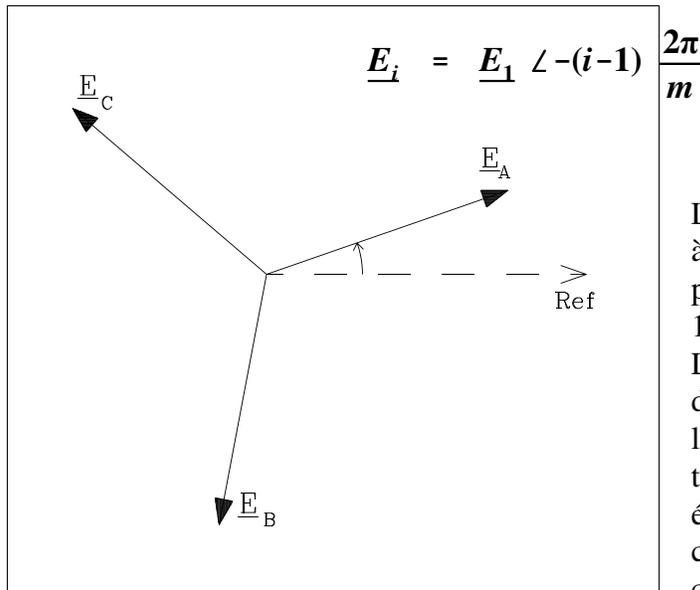


Figure 1.3-1

L'ordre de numérotation des phases est à priori quelconque. Par convention, la phase 2 est située en arrière de la phase 1, et la phase 3 en arrière de la phase 2. Le terme en arrière signifiant en arrière dans le temps. Le système triphasé est le plus répandu et les phaseurs de tensions d'un système triphasé équilibré d'ordre direct se présente comme à la figure 1.3.-1. En ce qui concerne les notations des phases, on trouve aussi A,B,C ou R,S,T ou 1,2,4,8.

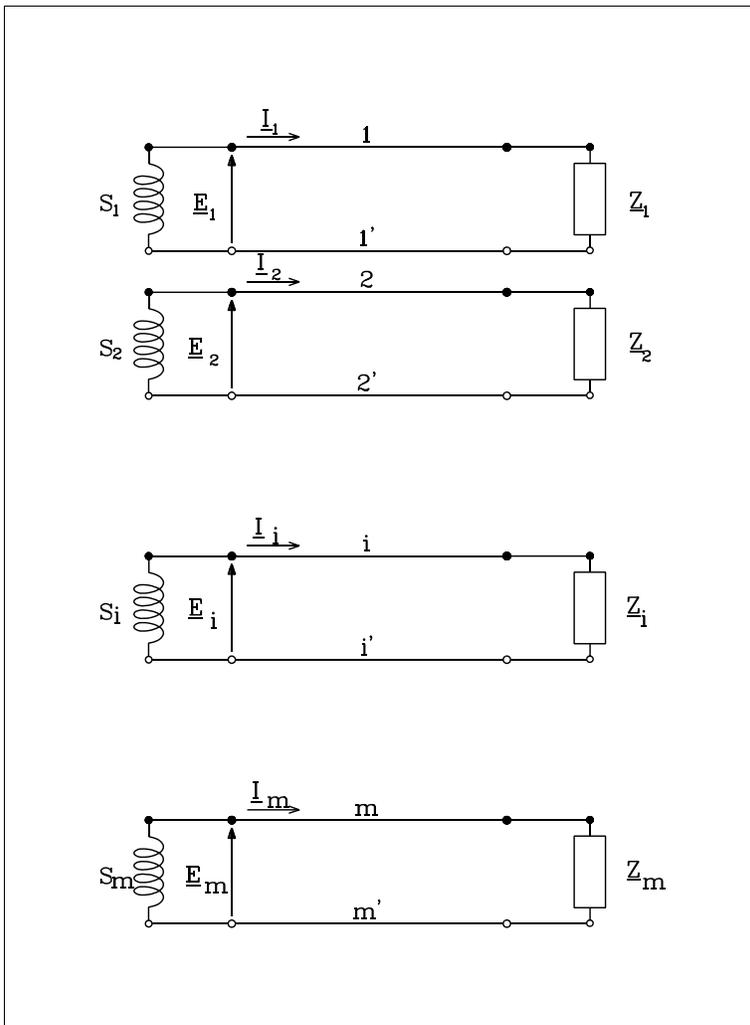


Figure 1.3-2

Les sources peuvent débiter individuellement dans des circuits d'utilisateurs appropriés d'impédances $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3, \dots, \underline{Z}_m$ selon le schéma de la figure 1.3-2 : les utilisateurs sont distants d'une longueur l des sources mais les liaisons sont supposées sans impédance.

Le courant dans chaque circuit vaut :

$$\underline{I}_i = \frac{\underline{E}_i}{\underline{Z}_i} \quad (1.3-2)$$

Si les impédances sont **égales**, le système des courants est également ***m***-phasé équilibré.

Comme le montre la Figure 1.3-2, chacun des enroulements d'induit étant raccordé par deux fils à l'utilisation correspondante, une distribution d'énergie électrique établie suivant ces principes exigerait ***2m*** conducteurs de section suffisante pour porter le courant maximal absorbé par une utilisation. Si ***S*** est la section de cuivre nécessaire pour transporter à une distance ***l*** commune à toutes les sources le courant maximum que peut débiter une source, il faudra immobiliser un poids de cuivre proportionnel à ***2mS***. On voit de suite qu'il existe deux moyens pour économiser le métal conducteur

a. Couplage en étoile avec fil neutre

L'un des procédés consiste à utiliser un conducteur de retour commun à tous les circuits en réunissant, aux sources comme aux utilisations les extrémités homologues. Le fil commun ***O*** appelé fil neutre est ainsi parcouru par la somme des courants débités par toutes les sources. Même s'il est très généralement connecté à la terre, ce conducteur de neutre ne doit pas être confondu avec le conducteur de terre distribué pour des raisons de sécurité.

Cette disposition est très utilisée. Elle ne nécessite que ***m + 1*** fils de ligne. Elle est connue sous le nom de couplage *étoilé avec fil neutre*. Comme on le voit aisément, les phases gardent une très grande indépendance.

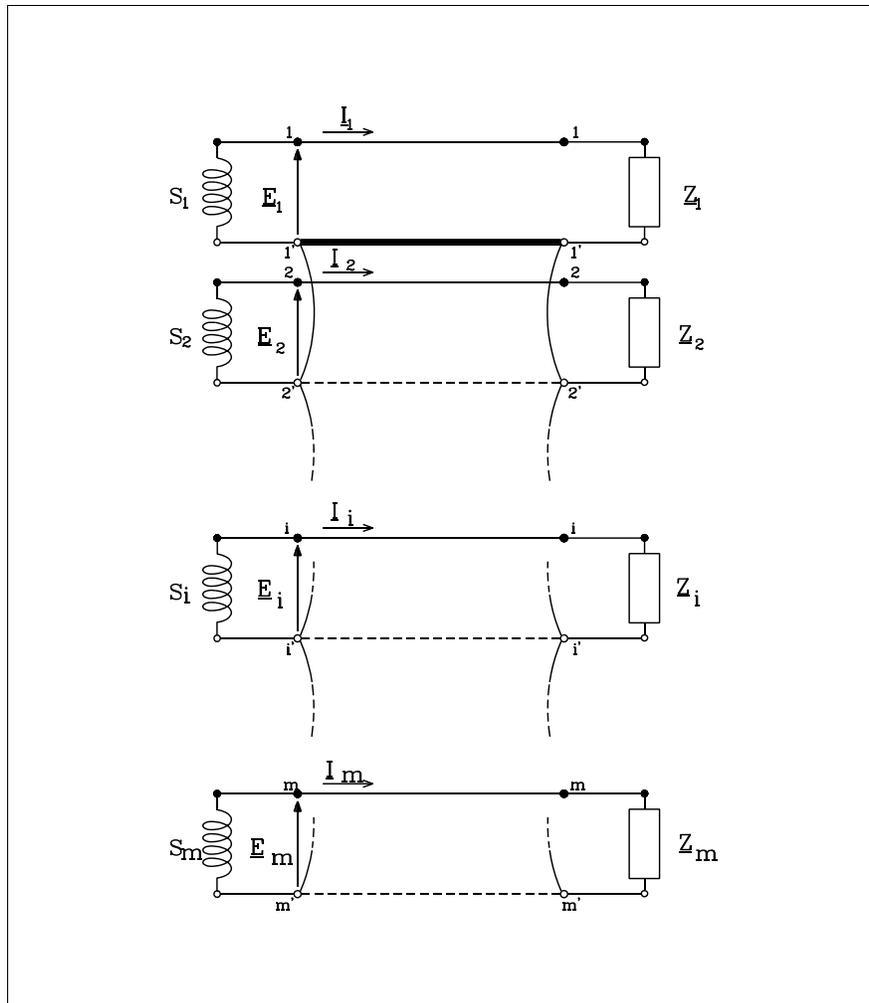


Figure 1.3-3

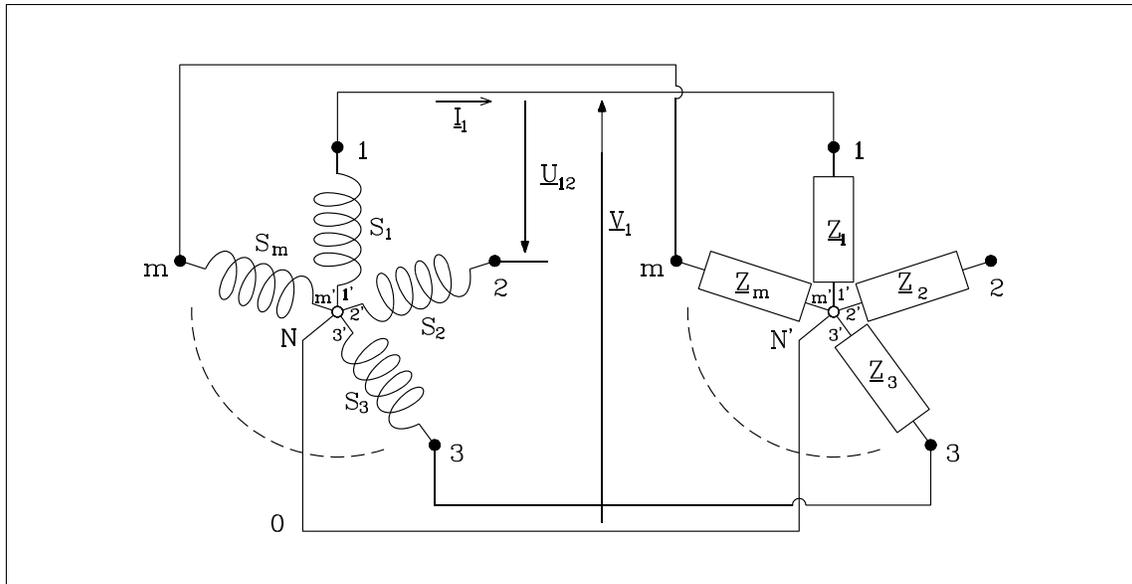


Figure 1.3-4

Nous définissons la tension **simple** ou **de phase** d'un conducteur comme la différence de potentiel entre ce conducteur et le neutre. Elle sera désignée par la lettre V .

$$ex. : \underline{V}_1 = \underline{V}_1 - \underline{V}_0 \quad (1.3-3)$$

Nous définissons la tension **composée** ou **entre phases** comme la différence de potentiel entre deux conducteurs. Elle sera désignée par la lettre U .

$$ex. : \underline{U}_{12} = \underline{V}_2 - \underline{V}_1 \quad (1.3-4)$$

b. Couplage en étoile sans fil neutre

Si les impédances d'utilisation sont toutes identiques, on a affaire à un circuit équilibré et la somme des courants de ligne est nulle

$$\sum_{i=1}^m i_i = 0 \quad (1.3-5)$$

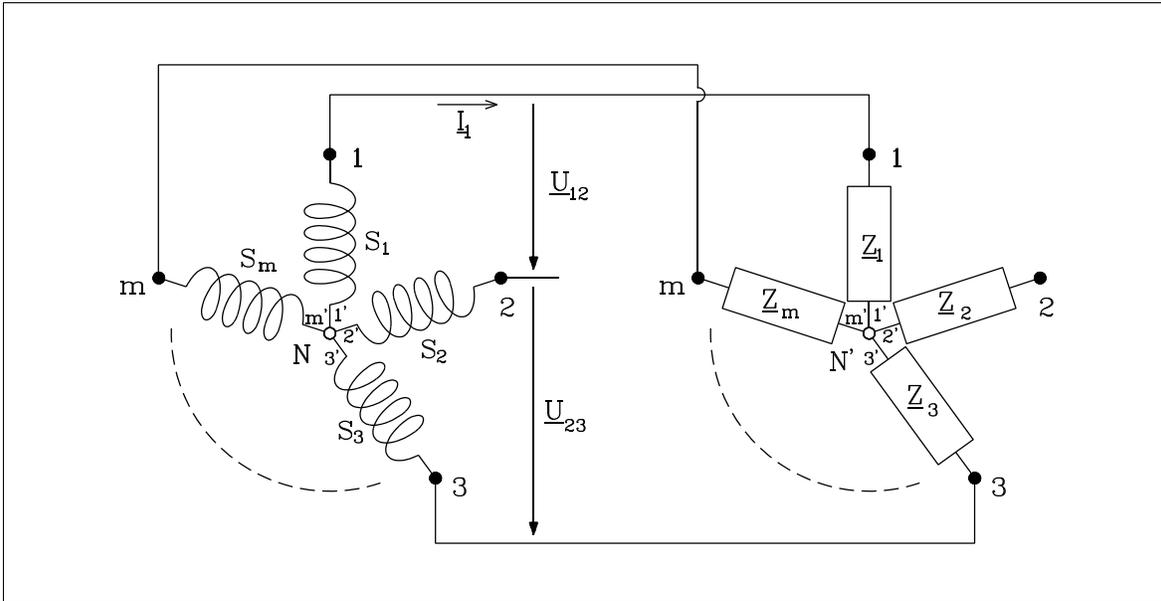


Figure 1.3-5

Le fil neutre n'étant plus parcouru par un courant devient alors inutile et on peut le supprimer, ce qui conduit au couplage étoilé sans fil neutre représenté par la Figure 1.3-5

Dans ce cas, le point commun N' des impédances d'utilisation reconstitue un point neutre au point d'utilisation de l'énergie électrique. Ce point N' dont le potentiel est, par raison de symétrie, identique à celui du point N est dit point neutre artificiel. Une telle installation de transport d'énergie électrique nécessite seulement m fils de ligne dont le poids total est proportionnel à mS .

Le couplage en étoile sans fil neutre peut encore être conservé si les charges sont déséquilibrées mais dans ce cas, comme on le verra plus loin, le potentiel du point N' n'est plus égal à celui du point N et les valeurs efficaces des tensions entre N' et les fils de ligne ne sont plus égales.

Recherchons maintenant les relations qui lient les tensions mesurées respectivement dans les phases et entre les phases dans le cas d'un circuit étoilé équilibré.

Soient \underline{V}_1 et \underline{V}_2 les tensions mesurées entre neutre et chacune des phases consécutives 1 et 2 .

Par raison de symétrie, ces tensions sont égales en valeur efficace mais sont déphasées de $2\pi/m$ radians. On peut les représenter par deux phaseurs \underline{V}_1 et \underline{V}_2 égaux en grandeur mais faisant entre eux l'angle $2\pi/m$. Si on considère \underline{V}_1 comme référence, on peut écrire :

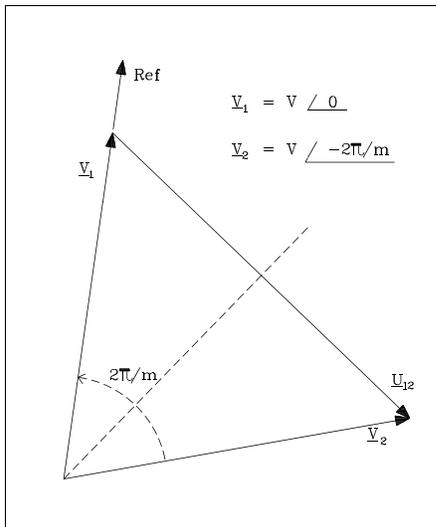


Figure 1.3-6

voit que :

$$\underline{U}_{12} = 2 V_1 \sin \frac{\pi}{m} \quad (1.3-8)$$

$$\text{et } \underline{U}_{12} = 2 \underline{V}_1 \sin \frac{\pi}{m} e^{-j \left(\frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{2} \right)} \quad (1.3-8)$$

Cas particulier : pour $m = 3$, on obtient

$$\underline{U}_{12} = \sqrt{3} \underline{V}_1 e^{-j \frac{5\pi}{6}} \quad (1.3-9)$$

La puissance transportée par une ligne équilibrée aura pour valeur, en vertu de (1.2-11) :

$$P = \operatorname{Re}(m \underline{V}_1 \underline{I}_1^*) = m V_1 I_1 \cos \varphi \quad (1.3-10)$$

Si le point neutre n'est pas accessible, la seule tension mesurable en ligne est \underline{U}_{12} et ses homologues. Remplaçons dans l'expression de P , V_1 par sa valeur tirée de \underline{U}_{12} plus haut :

$$P = \frac{m}{2 \sin \frac{\pi}{m}} U_{12} I_1 \cos \varphi \quad (1.3-11)$$

Cas particulier : pour $m = 3$, on obtient

$$P = \sqrt{3} U I \cos \varphi \quad (1.3-12)$$

Il faut être attentif que φ représente le **déphasage entre tension simple et courant** (c'est-à-dire **l'argument des impédances**) et en aucune façon le déphasage entre tension composée et courant.

c. Couplage en polygone

Un autre mode de couplage consiste à connecter la sortie de chacune des phases du générateur à l'entrée de la phase contiguë. On peut opérer de même au récepteur.

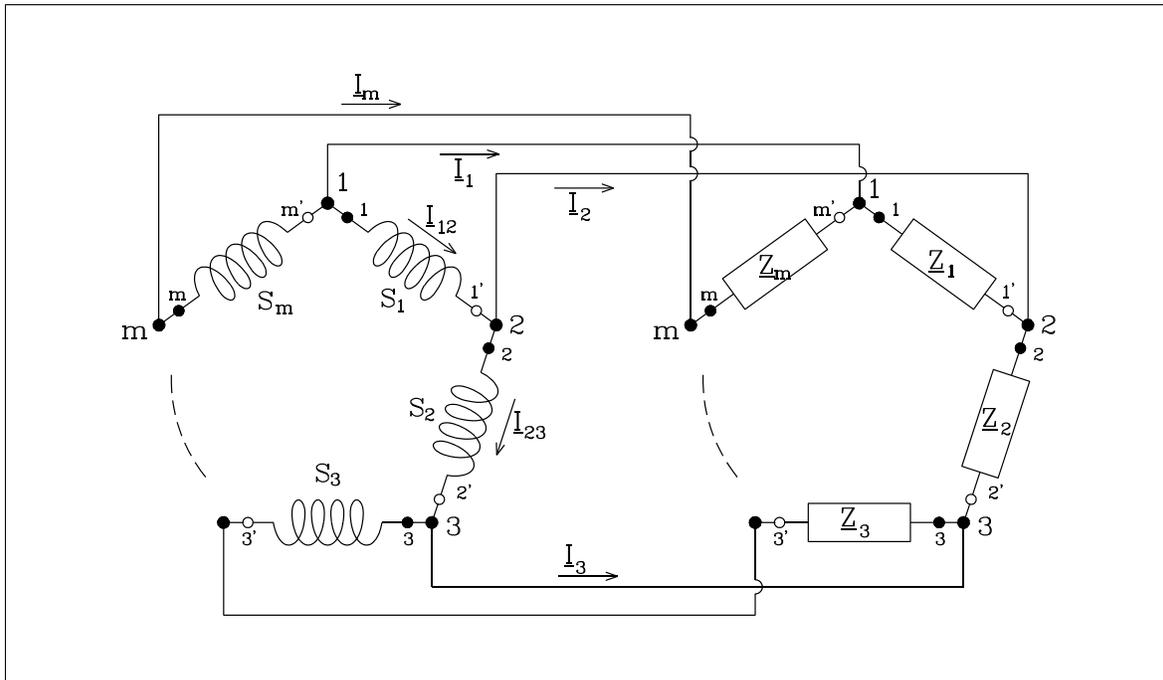


Figure 1.3-7

La somme des f.e.m. alternatives équilibrées engendrées dans les phases du générateur étant nulle à chaque instant, on peut connecter toutes ces phases en série en constituant ainsi un **polygone fermé**, sans qu'il puisse en résulter la circulation d'un courant. Dans ces conditions il ne faut que m conducteurs de ligne distincts, chacun de ceux-ci étant commun à deux phases consécutives (Figure 1.3-7). Bien entendu, les courants qui circulent dans les fils de ligne ne sont plus égaux aux courants qui circulent dans les phases.

Proposons-nous de calculer le rapport qui existe entre ces courants dans le cas où le circuit polyphasé est équilibré.

Soient \underline{I}_{12} et \underline{I}_{23} les courants qui circulent dans deux phases consécutives du générateur et soit \underline{I}_2 le courant traversant la ligne commune à ces deux phases. La loi de Kirchhoff appliquée au noeud 2 donne vectoriellement :

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{23} \quad (1.3-13)$$

Or, par raison de symétrie, \underline{I}_{12} et \underline{I}_{23} sont deux phaseurs égaux en grandeur et faisant entre eux l'angle $2\pi/m$. La relation (1.3-13) se traduit vectoriellement par la Figure 1.3-8 où l'on voit

aisément que :

$$\underline{I}_2 = 2 \underline{I}_{12} \sin \frac{\pi}{m} e^{-j \left(\frac{\pi}{m} - \frac{\pi}{2} \right)} \quad (1.3-14)$$

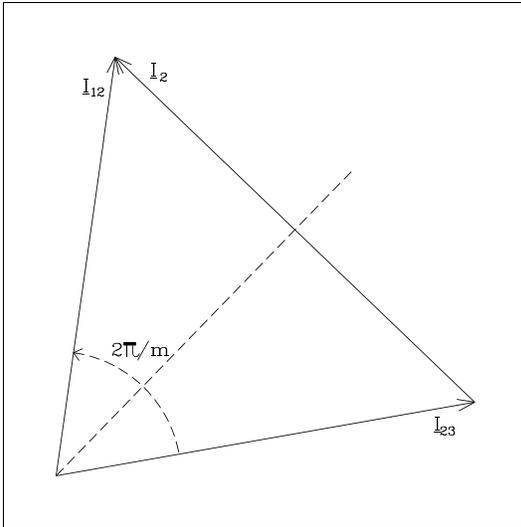


Figure 1.3-8

Le rapport entre valeurs efficaces des courants circulant respectivement dans les lignes et dans les phases a donc pour valeur $2 \sin (\pi/m)$.

Les tensions entre phases $U_{12}, U_{23}, \dots, U_{m1}$, sont évidemment égales entre elles dans ce cas, de même que les tensions simples V_1, V_2, \dots, V_m .

d. Puissance électrique transportée par la ligne

La puissance transportée par la ligne s'exprime par la formule :

$$P = \operatorname{Re}(m \underline{U}_{12} \underline{I}_{12}^*) = m U_{12} I_{12} \cos \varphi \quad (1.3-15)$$

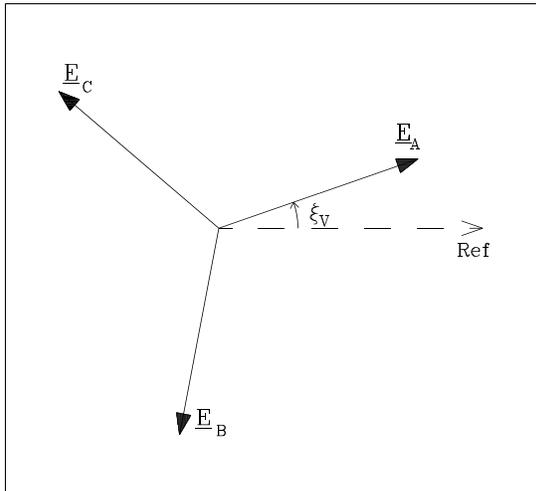
qui peut se mettre sous la forme suivante, en tenant compte de la relation (1.3-14):

$$P = \frac{m}{2 \sin \frac{\pi}{m}} U_{12} I_1 \cos \varphi \quad (1.3-16)$$

qui, comparée à (1.3-11) montre, comme il fallait s'y attendre, que l'expression de la puissance transmise par une ligne polyphasée est indépendante du mode de couplage du générateur et du récepteur. Il va sans dire que le générateur peut être couplé en étoile et le récepteur en polygone et inversement.

Le poids de cuivre nécessaire est donc dans le cas du couplage polygonal identique, à même tension entre phases, à celui qui est nécessaire pour le couplage en étoile sans fil neutre.

1.3.2. Cas particuliers de couplage : le système triphasé



Comme cela a été exposé, les 3 tensions sont égales dans les trois phases mais décalées entre elles de $2\pi/3$. Elles pourront s'exprimer sous la forme :

Figure 1.3-9

$$\begin{aligned}
 e_A &= E \sqrt{2} \cos(\omega t + \xi_V) & \text{ou } \underline{E}_A &= E \angle \xi_V \\
 e_B &= E \sqrt{2} \cos(\omega t + \xi_V - \frac{2\pi}{3}) & \text{ou } \underline{E}_B &= \underline{E}_A \angle -\frac{2\pi}{3} = E \angle \xi_V - \frac{2\pi}{3} \\
 e_C &= E \sqrt{2} \cos(\omega t + \xi_V + \frac{2\pi}{3}) & \text{ou } \underline{E}_C &= \underline{E}_B \angle -\frac{2\pi}{3} = E \angle \xi_V + \frac{2\pi}{3}
 \end{aligned} \quad (1.3-17)$$

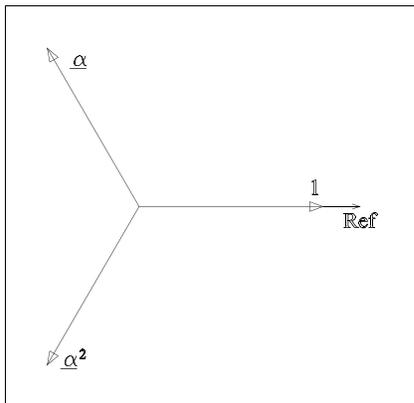


Figure 1.3-10

On définit l'opérateur de déphasage:

$$\begin{aligned}
 \underline{\alpha} &= \angle \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \text{le sorte que } \underline{E}_B &= \underline{\alpha}^2 \underline{E}_A \\
 \underline{E}_C &= \underline{\alpha} \underline{E}_A
 \end{aligned} \quad (1.3-18)$$

Il est intéressant de noter les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1} + \underline{\alpha} + \underline{\alpha}^2 &= \mathbf{0} & ; & & \underline{\alpha}^* &= \underline{\alpha}^2 & ; & & (\underline{\alpha}^2)^* &= \underline{\alpha} \\
 \mathbf{1} + \underline{\alpha} &= -\underline{\alpha}^2 = \angle \frac{\pi}{3} & ; & & \mathbf{1} - \underline{\alpha} &= \sqrt{3} \angle -\frac{\pi}{6} \\
 \underline{\alpha} + \underline{\alpha}^2 &= -\mathbf{1} = \angle \pi & ; & & \underline{\alpha} - \underline{\alpha}^2 &= \sqrt{3} \angle \frac{\pi}{2} \\
 \underline{\alpha}^2 + \mathbf{1} &= -\underline{\alpha} = \angle \frac{5\pi}{3} & ; & & \underline{\alpha}^2 - \mathbf{1} &= \sqrt{3} \angle \frac{7\pi}{6}
 \end{aligned}
 \tag{1.3-19}$$

Couplage en étoile

Les bornes A' , B' , C' des trois phases sont reliées entre elles pour constituer le point neutre N . Les bornes A , B , C sont les sorties de l'alternateur raccordé aux fils de lignes.

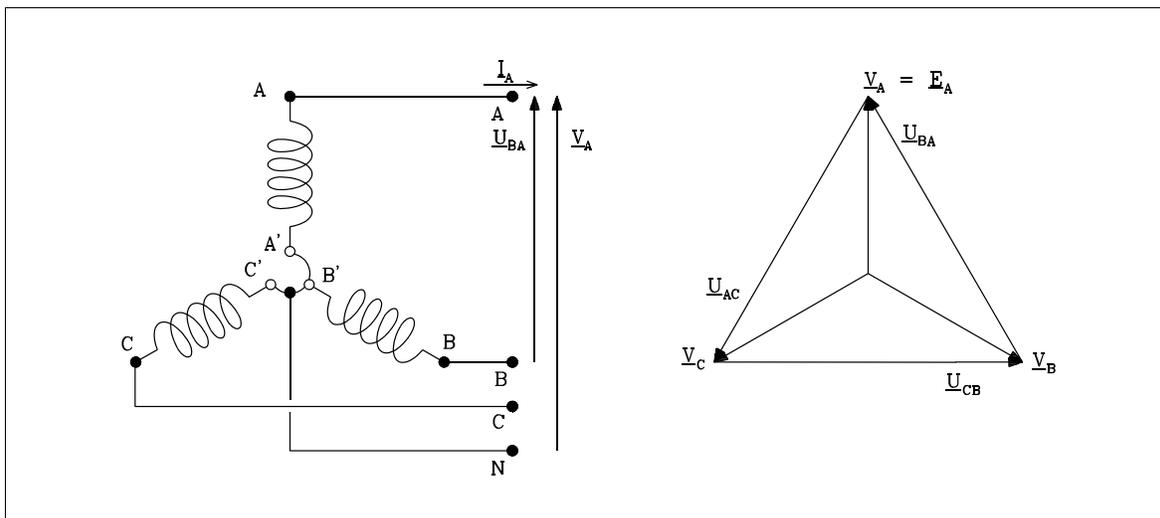


Figure 1.3-11

Les tensions sont égales aux f.e.m. engendrées et constituent également un système triphasé équilibré :

$$\begin{aligned}
 \underline{V}_A &= \underline{E}_A \\
 \underline{V}_B &= \underline{E}_B \\
 \underline{V}_C &= \underline{E}_C
 \end{aligned}
 \tag{1.3-20}$$

Les courants de lignes sont égaux aux courants de phases.

Les tensions composées s'obtiennent par composition vectorielle des tensions simples:

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{BA} &= \underline{V}_A - \underline{V}_B = \underline{V}_A (1 - \underline{\alpha}^2) = \underline{V}_A \sqrt{3} \angle \frac{\pi}{6} \\
 \underline{U}_{CB} &= \underline{V}_B - \underline{V}_C = \underline{V}_A (\underline{\alpha}^2 - \underline{\alpha}) = \underline{V}_A \sqrt{3} \angle -\frac{\pi}{2} \\
 \underline{U}_{AC} &= \underline{V}_C - \underline{V}_A = \underline{V}_A (\underline{\alpha} - 1) = \underline{V}_A \sqrt{3} \angle \frac{5\pi}{6}
 \end{aligned}
 \tag{1.3-21}$$

donc $U = V \sqrt{3}$

La puissance est donnée par la relation :

$$P = 3 V I \cos \varphi = \sqrt{3} U I \cos \varphi \tag{1.3-22}$$

Couplage en triangle

La borne C' de la phase C est reliée à la borne A de la phase A pour constituer la borne A de la ligne. De même pour les autres par permutation tournante

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{BA} &= \underline{E}_A \\
 \underline{U}_{CB} &= \underline{E}_B \\
 \underline{U}_{AC} &= \underline{E}_C
 \end{aligned}
 \tag{1.3-23}$$

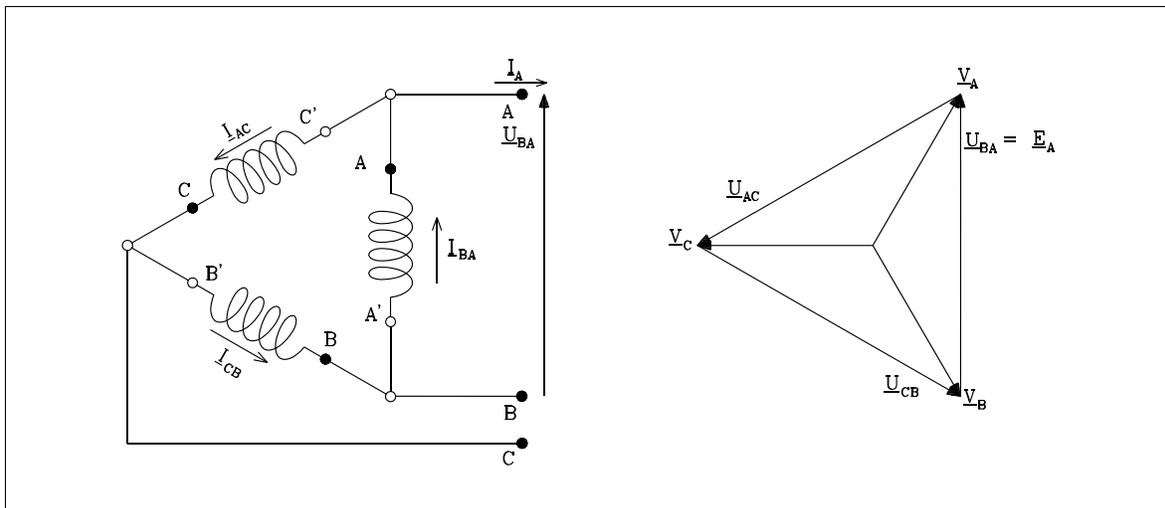


Figure 1.3-12

Le centre de gravité du triangle des tensions peut représenter le potentiel d'un neutre fictif N de manière à définir un système de tension simple:

$$\begin{aligned}\underline{V}_A &= \frac{U_{BA}}{\sqrt{3}} \angle -\frac{\pi}{6} \\ \underline{V}_B &= \frac{U_{BA}}{\sqrt{3}} \angle \frac{7\pi}{6} \\ \underline{V}_C &= \frac{U_{BA}}{\sqrt{3}} \angle \frac{\pi}{2}\end{aligned}\quad (1.3-24)$$

En supposant que les courants débités par les phases constituent un système triphasé équilibré, il en est de même pour les courants de lignes

$$\begin{aligned}\underline{I}_A &= \underline{I}_{BA} - \underline{I}_{AC} = \underline{I}_{BA} (1 - \underline{\alpha}) = \underline{I}_{BA} \sqrt{3} \angle -\frac{\pi}{6} \\ \underline{I}_B &= \underline{I}_{CB} - \underline{I}_{BA} = \underline{I}_{CB} (1 - \underline{\alpha}) = \underline{I}_{CB} \sqrt{3} \angle -\frac{\pi}{6} \\ &= \underline{I}_{BA} \sqrt{3} \angle -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \\ \underline{I}_C &= \underline{I}_{AC} - \underline{I}_{CB} = \underline{I}_{AC} (1 - \underline{\alpha}) = \underline{I}_{AC} \sqrt{3} \angle -\frac{\pi}{6} \\ &= \underline{I}_{BA} \sqrt{3} \angle \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\end{aligned}\quad (1.3-25)$$

La puissance est donnée par la relation :

$$P = 3 U_{BA} I_{BA} \cos \varphi = \sqrt{3} U_{BA} I_A \cos \varphi \quad (1.3-26)$$

1.3.3. Influence des harmoniques dans les circuits polyphasés

Tout ce qui précède suppose que les tensions développées dans les phases sont rigoureusement sinusoïdales. Il n'en est évidemment pas toujours ainsi et il convient d'examiner ce qu'il advient lorsque la tension comporte des composantes harmoniques.

On sait qu'une courbe périodique quelconque peut se décomposer en une somme de fonctions sinusoïdales de pulsations multiples de la pulsation fondamentale.

En électrotechnique, les fonctions du temps que l'on est amené à considérer présentent toujours deux alternances identiques au signe près, c'est-à-dire superposables par retournement.

En d'autres termes, si $y = f(t)$ est la fonction considérée qui jouit de cette propriété, on a :

$$f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t) \quad (1.3-27)$$

On sait également qu'une fonction qui satisfait cette condition ne comporte dans son développement en série de Fourier que des harmoniques d'ordres impairs.

Bornons-nous à examiner le cas le plus important, celui du triphasé.

Supposons que la f.e.m. instantanée e_A de la phase puisse se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} e_A &= A_1 \cos(\omega t + \xi_1) + A_3 \cos(3\omega t + \xi_3) + A_5 \cos(5\omega t + \xi_5) + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos(i\omega t + \xi_i) \quad \text{avec } i \text{ impair} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos((2j-1)\omega t + \xi_j) \quad \text{avec } j \text{ entier quelconque} \end{aligned} \quad (1.3-28)$$

Les f.e.m. développées par les phases e_B et e_C s'obtiennent en remplaçant ωt respectivement par $\omega t - 2\pi/3$ et $\omega t + 2\pi/3$.

Il vient successivement,

$$\begin{aligned} e_B &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos\left(i\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \xi_i\right) \\ e_C &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos\left(i\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + \xi_i\right) \end{aligned} \quad (1.3-29)$$

Couplage triangle

Les tensions entre phases sont évidemment les tensions des phases données par les relations précédentes. Si on ouvre le triangle, la tension que l'on recueille dans le circuit triangle est la somme des f.e.m. $e_A + e_B + e_C$, c'est-à-dire :

$$e_A + e_B + e_C = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left(\cos [i\omega t + \xi_i] + \cos [i(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + \xi_i] + \cos [i(\omega t + \frac{2\pi}{3}) + \xi_i] \right) \quad (1.3-30)$$

qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left(\cos (i\omega t + \xi_i) + 2 (\cos (i\omega t + \xi_i) \cos (i\frac{2\pi}{3})) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos (i\omega t + \xi_i) \left(1 + 2 \cos (i\frac{2\pi}{3}) \right) \end{aligned} \quad (1.3-31)$$

En tenant compte de ce que $\cos (i2\pi/3) = -1/2$ pour toutes les valeurs de i qui ne sont pas multiples de 3, on constate que la somme des harmoniques des f.e.m. correspondantes est nulle.

Au contraire, pour les valeurs de i multiples de 3, $\cos i2\pi/3 = 1$ et la f.e.m. recueillie aux bornes du triangle ouvert (Figure 1.3-13) n'est plus nulle (si i est évidemment impair); elle vaut :

$$\sum_{i=1}^{\infty} 3 A_i \cos (i\omega t + \xi_i) \quad (1.3-32)$$

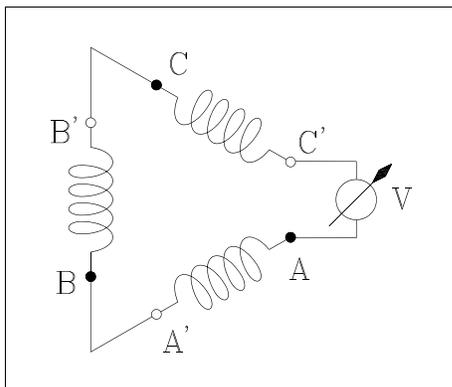


Figure 1.3-13

Dans cette expression, seules sont à considérer les valeurs de i multiples de 3 (et impaires). Un voltmètre introduit en série dans le triangle ouvert mesure donc trois fois la valeur efficace, résultant de la somme des harmoniques trois et multiples de trois.

Il en résulte que dans un alternateur couplé en triangle circule un courant d'harmonique trois et multiple de trois dont la valeur est déterminée par l'impédance résultante des trois phases en série.

Ces courants sont en général peu gênants car ils engendrent, par induction dans les tôles ou dans la masse des pôles des machines synchrones, des courants induits qui, en vertu de la loi de Lenz, tendent à **étouffer les flux** qui les ont produits, ce qui est même bénéfique.

Couplage étoile

Examinons maintenant le cas où les enroulements triphasés connectés en étoile, développent des tensions e_A , e_B , e_C , de la forme donnée par les formules (1.3-28) et (1.3-29). Proposons-nous de trouver l'expression de la tension recueillie à vide entre phases **B** et **C** soit $e_{BC} = e_C - e_B$.

Il vient,

$$e_{BC} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left(\cos \left[i(\omega t + \frac{2\pi}{3}) + \xi_i \right] - \cos \left[i(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + \xi_i \right] \right) \quad (1.3-33)$$

ce qui peut s'écrire:

$$e_{BC} = - \sum_{i=1}^{\infty} 2 A_i \left(\sin (i\omega t + \xi_i) \sin (i\frac{2\pi}{3}) \right) \quad (1.3-34)$$

On voit que pour toutes les valeurs de i multiples de 3, les termes de cette somme s'annulent. Le couplage en étoile présente par conséquent la propriété de supprimer les composantes d'harmonique trois et multiples de trois de la tension entre phases. C'est notamment cet avantage qui fait en général préférer ce mode de couplage dans les alternateurs triphasés, qui sont alors connectés au réseau par un transformateur triangle-étoile (voir chapitre 3).

1.3.4. Mesure de la puissance dans les circuits polyphasés

Méthode des m wattmètres - Circuit sans fil neutre

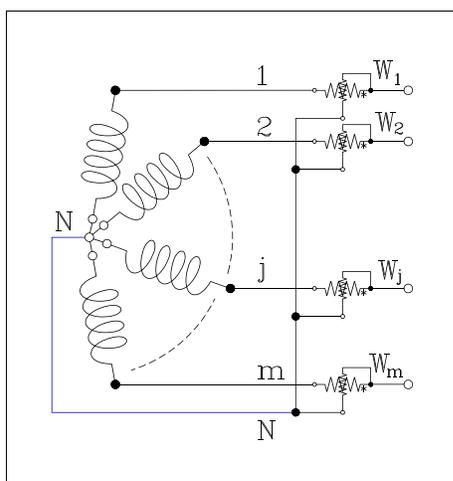


Figure 1.3-14

Soit un circuit polyphasé à m phases, équilibré ou non, **sans fil neutre**, c'est-à-dire comportant m conducteurs de ligne. Supposons d'abord que le générateur soit connecté en étoile et qu'il comporte un neutre accessible.

Pour mesurer la puissance polyphasée, on peut traiter les phases séparément en introduisant en série dans chaque ligne la bobine d'intensité d'un wattmètre dont la bobine de tension serait raccordée aux bornes de la phase correspondante, c'est-à-dire entre la phase considérée et le neutre N (Figure 1.3-14).

De cette manière, chaque wattmètre mesure la puissance débitée par la phase à laquelle il est raccordé

et la puissance totale débitée par le circuit polyphasé s'obtient en additionnant les lectures effectuées aux m wattmètres utilisés. Si le circuit est équilibré, tous les wattmètres indiquent la même lecture et il suffit, pour mesurer la puissance, d'un seul wattmètre introduit dans une seule phase dont la lecture sera multipliée par le nombre m de phases.

La lecture W_j d'un wattmètre indique la puissance moyenne mais les développements qui suivent sont valables en valeur instantanée.

La puissance débitée vaut:

$$p = \sum_{j=1}^m W_j = \sum_{j=1}^m (v_j - v_N) i_j \quad (1.3-35)$$

où v_N représente le potentiel du point neutre.

Cette relation peut encore s'écrire:

$$p = \sum_1^m v_j i_j - v_N \sum_1^m i_j \quad (1.3-36)$$

Si le neutre n'est pas connecté, la somme des courants est nulle. Dans la relation (1.3-36), le potentiel du point N peut être remplacé par celui d'un point quelconque. Les indications de chaque wattmètre seront modifiées mais pas leur somme. On peut par exemple laisser flotter le potentiel du point N' , borne commune des circuits tension des wattmètres.

Ce mode d'utilisation des wattmètres, dit méthode des m wattmètres, permet la mesure de la puissance totale quel que soit le couplage du générateur ou de l'utilisation.

Méthode des $m - 1$ wattmètres (Figure 1.3-15)

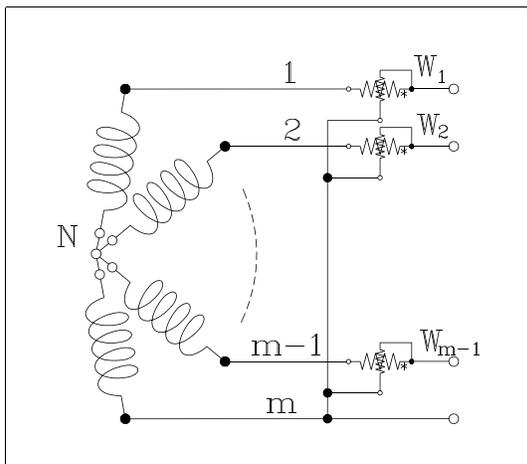


Figure 1.3-15

Puisqu'il est possible de choisir le point N' à volonté, portons le retour des bobines de tension des wattmètres sur une des phases, la $m^{\text{ième}}$ par exemple. Dans ces conditions, le wattmètre m ne donne plus aucune indication puisque la tension aux bornes de sa bobine de tension est annulée. La somme des lectures aux $m-1$ wattmètres restants est donc proportionnelle à la puissance polyphasée. Cette méthode, dite des $m - 1$ wattmètres, donne donc la puissance qui circule dans un circuit polyphasé sans neutre quel qu'en soit l'état électrique d'équilibre ou de déséquilibre.

En vertu de ce qui précède, il faudra utiliser m wattmètres pour mesurer la puissance d'un circuit polyphasé à m phases déséquilibrées **avec** fil neutre.

1.3.5. Facteur de puissance

Le facteur de puissance d'un circuit polyphasé n'est défini initialement que si les phases sont équilibrées. Dans ce cas, le facteur de puissance n'est autre que le $\cos \varphi$ d'un des circuits élémentaires ou phase du circuit polyphasé. On peut le calculer à partir de la puissance P_A débitée par cette phase, de la tension V_A à ses bornes et du courant efficace I_A qui la traverse :

$$P_A = V_A I_A \cos \varphi \quad (1.3-37)$$

La puissance totale débitée par le circuit polyphasé est alors

$$P = m P_A = m V_A I_A \cos \varphi \quad (1.3-38)$$

Lorsque les phases sont déséquilibrées, la puissance totale P peut toujours se mettre sous la forme d'une somme de puissances élémentaires dans les phases

$$P = \sum_1^m V_j I_j \cos \varphi_j \quad (1.3-39)$$

L'angle φ_j pouvant être différent dans chacune des phases, il n'est plus possible de définir un $\cos \varphi$ global mais on définit encore un facteur de puissance par la relation:

$$FP = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \quad (1.3-40)$$

Le FP est souvent appelé improprement le $\cos \varphi$.

Il est de plus en plus fréquent de caractériser une charge, non par son $\cos \varphi$ mais par son

$$tg \varphi = \frac{Q}{P} \quad (1.3-41)$$

1.3.6. Mesure de la puissance dans les circuits triphasés

a. Circuit triphasé étoilé avec fil neutre

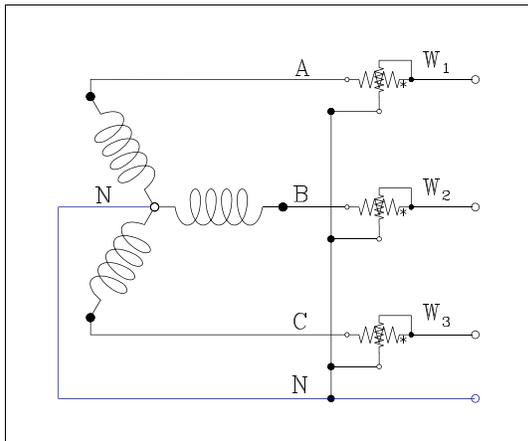


Figure 1.3-16

Soit un alternateur triphasé connecté en étoile avec neutre sorti N (Figure 1.3-16), débitant sur un circuit triphasé étoile ou triangle non représenté, dont on désire mesurer la puissance absorbée.

On sait que, quel que soit le déséquilibre du circuit, la puissance sera donnée par la somme des lectures des trois wattmètres W_1 , W_2 , W_3 , dont les bobines d'intensité sont insérées respectivement dans les fils de ligne A , B , C et dont les bobines de tension sont raccordées entre la phase correspondante d'une part et le fil neutre d'autre part. Le facteur de puissance est dans ces

conditions le rapport entre la puissance totale mesurée et la puissance apparente donnée par la somme des produits $V_i I_i$, V_i étant la tension entre phases et neutre et I_i le courant de ligne.

Dans certains circuits qui, de par leur nature particulière sont toujours équilibrés, on pourra se contenter d'un seul wattmètre raccordé entre une phase et le neutre, à condition de graduer l'échelle de cet unique wattmètre de façon qu'il indique trois fois la puissance qu'il mesure.

b. Circuit triphasé sans fil neutre

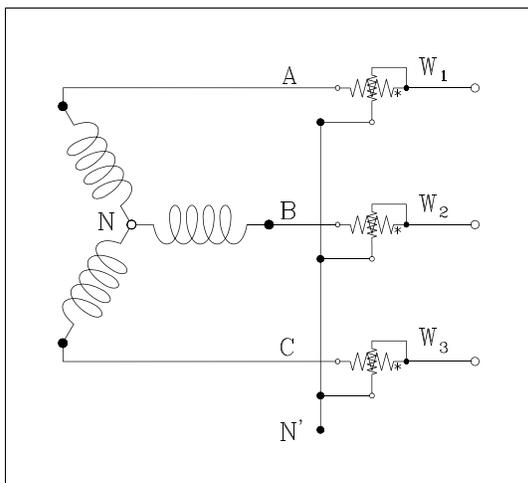


Figure 1.3-17

Soit un alternateur triphasé sans point neutre sorti, connecté en triangle ou en étoile, débitant sur un circuit d'utilisation quelconque, non représenté sur la Figure 1.3-17.

La puissance peut être mesurée par la méthode des trois wattmètres, les bornes d'entrée des bobines de tension étant connectées chacune à un fil de ligne et les bornes de sortie connectées ensemble de façon à former un neutre artificiel N' . Si les wattmètres sont identiques, ce qui n'est pas indispensable, le point neutre N' est au potentiel du point neutre théorique N .

Dans le cas contraire, le point N' se trouve porté à un potentiel quelconque, mais on sait néanmoins que la puissance absorbée par le circuit d'utilisation est toujours donnée par la somme des lectures aux wattmètres.

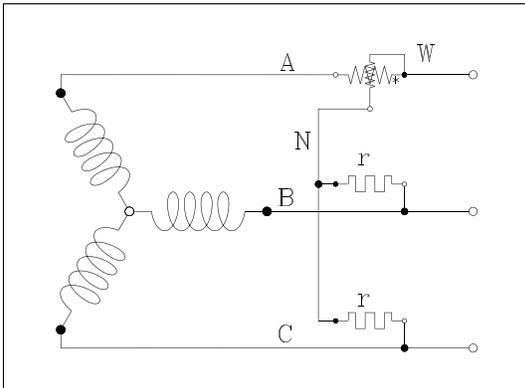


Figure 1.3-18

Si de par sa nature le circuit est toujours équilibré, on peut se contenter d'un seul wattmètre dont la bobine d'intensité serait insérée dans un fil de ligne et dont la bobine de tension, de résistance r raccordée par son entrée à la phase considérée, serait connectée en étoile avec deux résistances auxiliaires r de même valeur, de façon à constituer un point neutre N (Figure 1.3-18). Le wattmètre unique indiquera la puissance équilibrée triphasée à la condition que son échelle soit graduée en conséquence.

Méthode des deux wattmètres : la méthode la plus utilisée pour mesurer la puissance d'un circuit triphasé sans neutre est la méthode des deux wattmètres (Figure 1.3-19).

Les bobines de courant des deux wattmètres, W_1 et W_2 , sont insérées dans les lignes A et B . Les bobines de tension sont raccordées par leurs bornes d'entrée à la phase correspondante A ou B et leur sortie à la phase C .

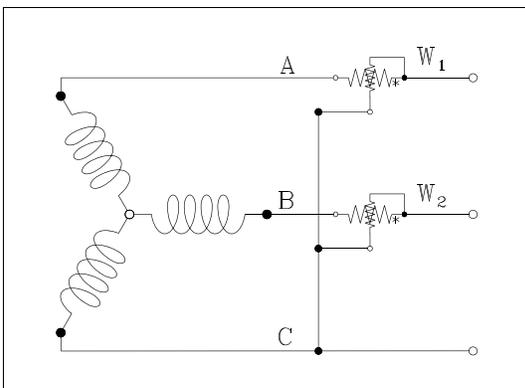


Figure 1.3-19

Supposons d'abord que le circuit soit parfaitement équilibré d'ordre *direct*, c'est-à-dire : la tension de la phase C retarde de $2\pi/3$ sur la tension de la phase B qui elle-même retarde de $2\pi/3$ sur la tension de la phase A .

Soient $\underline{V}_A, \underline{V}_B, \underline{V}_C$ les phaseurs représentatifs des tensions étoilées appliquées au circuit d'utilisation. Soient $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$ les phaseurs représentatifs des tensions composées mesurées entre phases.

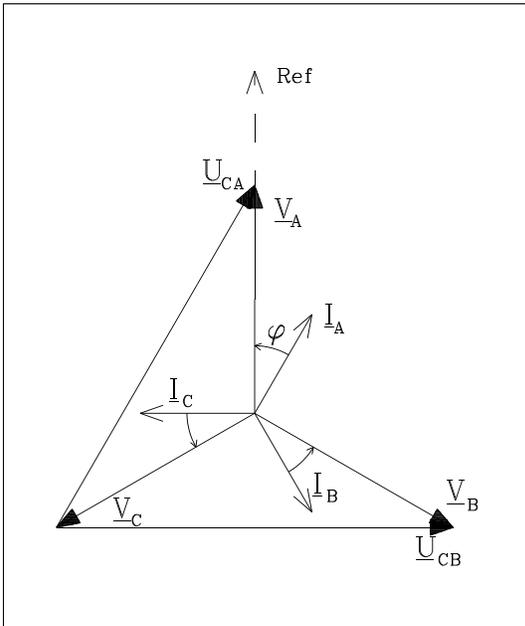


Figure 1.3-20

La Figure 1.3-20 représente les différents phaseurs tension et courant de ce système équilibré. Pour fixer les idées, prenons le phaseur \underline{V}_A comme référence.

On écrit aisément les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \underline{V}_A &= V \angle 0 \\
 \underline{V}_B &= V \angle -\frac{2\pi}{3} \\
 \underline{V}_C &= V \angle \frac{2\pi}{3} \\
 \underline{I}_A &= I \angle -\varphi \\
 \underline{I}_B &= I \angle -\varphi - \frac{2\pi}{3} \\
 \underline{I}_C &= I \angle -\varphi + \frac{2\pi}{3} \\
 \underline{U}_{CA} &= \underline{V}_A - \underline{V}_C = V \sqrt{3} \angle -\frac{\pi}{6} \\
 \underline{U}_{CB} &= \underline{V}_B - \underline{V}_C = V \sqrt{3} \angle -\frac{\pi}{2}
 \end{aligned}
 \tag{1.3-42}$$

Dans le système à deux wattmètres, leurs indications sont respectivement égales à :

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \operatorname{Re} (\underline{U}_{CA} \underline{I}_A^*) = U I \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \varphi\right) \\
 W_2 &= \operatorname{Re} (\underline{U}_{CB} \underline{I}_B^*) = U I \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi + \frac{2\pi}{3}\right) \\
 &= U I \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right)
 \end{aligned}
 \tag{1.3-43}$$

La puissance totale vaut bien entendu :

$$\begin{aligned}
 P &= W_1 + W_2 = U I \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \varphi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) \right) \\
 &= 2 U I \cos \frac{\pi}{6} \cos \varphi \\
 &= \sqrt{3} U I \cos \varphi \quad \text{évident !}
 \end{aligned}
 \tag{1.3-44}$$

Facteur de puissance

Il est aisé de déterminer le facteur de puissance d'un circuit triphasé équilibré **d'ordre direct** à l'aide uniquement des lectures observées aux wattmètres.

En effet, si nous posons $a = W_2 / W_1$, il vient d'après (1.3-43) :

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)} = \frac{\cos\frac{\pi}{6} \cos\varphi - \sin\frac{\pi}{6} \sin\varphi}{\cos\frac{\pi}{6} \cos\varphi + \sin\frac{\pi}{6} \sin\varphi} \\
 &= \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3} + \operatorname{tg}\varphi}
 \end{aligned} \tag{1.3-45}$$

d'où l'on tire:

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} \frac{1 - a}{1 + a} = \sqrt{3} \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} \tag{1.3-46}$$

Discussion

De ce qui précède, on peut conclure, en supposant $W_1 + W_2 \geq 0$:

si $W_1 = W_2$, on a $\cos\varphi = 1$ ou $\varphi = 0$

si $W_1 > W_2$, la charge est inductive

si $W_1 < W_2$, la charge est capacitive

si $W_1 = 0$, on a $\varphi = \pi/2 + \pi/6$

si $W_2 = 0$, on a $\varphi = \pi/2 - \pi/6$

si $W_1 = -W_2 > 0$, on a $P = 0$ et $\varphi = \pi/2$ inductif pur

si $W_1 = -W_2 < 0$, on a $P = 0$ et $\varphi = -\pi/2$ capacitif pur

La formule 1.3-46 permet de calculer :

$$\cos\varphi = \frac{1 + a}{2\sqrt{1 - a + a^2}} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}(1 - a)}{2\sqrt{1 - a + a^2}} \tag{1.3-47}$$

Circuit déséquilibré

On sait que la méthode des deux wattmètres est d'application tout à fait générale puisqu'elle donne la puissance d'un circuit triphasé sans fil neutre quel que soit son déséquilibre, même si celui-ci porte sur les tensions, ce qui est d'ailleurs plus rare en pratique. Toutefois, il ne faut jamais perdre de vue que dans le cas où le circuit est déséquilibré, l'angle φ que l'on déduirait

du rapport $a = W_2 / W_1$ n'a plus aucun sens physique.

Puissance réactive

La puissance réactive d'un circuit triphasé équilibré s'exprime par le produit :

$$Q = U I \sqrt{3} \sin \varphi \quad (1.3-48)$$

Elle peut se déduire aisément à partir des lectures aux wattmètres qui permettent de calculer $\sin \varphi$.

Toutefois, lorsque les circuits sont toujours équilibrés de par leur nature, il est possible de connecter un wattmètre de façon que ces indications soient proportionnelles à la puissance réactive, quitte à graduer son échelle en conséquence.

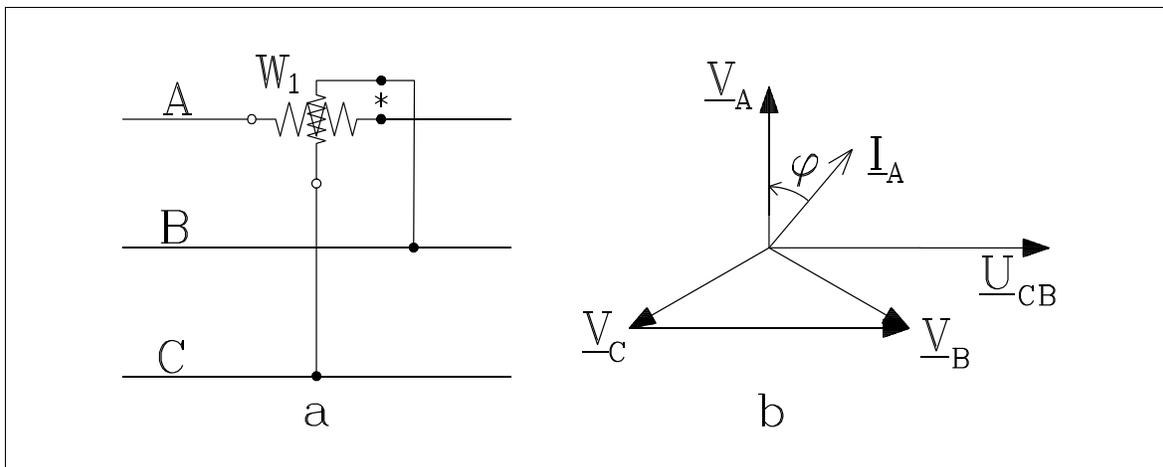


Figure 1.3-21

Soit en effet un circuit triphasé équilibré de tensions étoilées \underline{V}_A , \underline{V}_B , \underline{V}_C débitant un courant équilibré I par phase déphasée d'un angle φ par rapport à la tension correspondante.

Il nous suffit de raccorder en série dans la ligne A (Figure 1.3-21) la bobine d'intensité d'un wattmètre dont la bobine de tension soit raccordée entre les phases C et B . Le wattmètre indiquera une puissance donnée par l'expression

$$\begin{aligned} W_1 &= \operatorname{Re} (\underline{U}_{CB} \underline{I}_A^*) \\ &= U I \cos (-\frac{\pi}{2} + \varphi) \\ &= U I \sin \varphi \\ &= \frac{Q}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (1.3-49)$$

Si le circuit est déséquilibré, il faut utiliser des varmètres au lieu de wattmètres.

1.3.7. Etude vectorielle d'un système triphasé connecté en étoile

Recherche du potentiel du point neutre

Soit un récepteur triphasé composé de trois impédances \underline{Z}_A , \underline{Z}_B , \underline{Z}_C connectées en étoile aux bornes d'un système de distribution équilibré en tension.

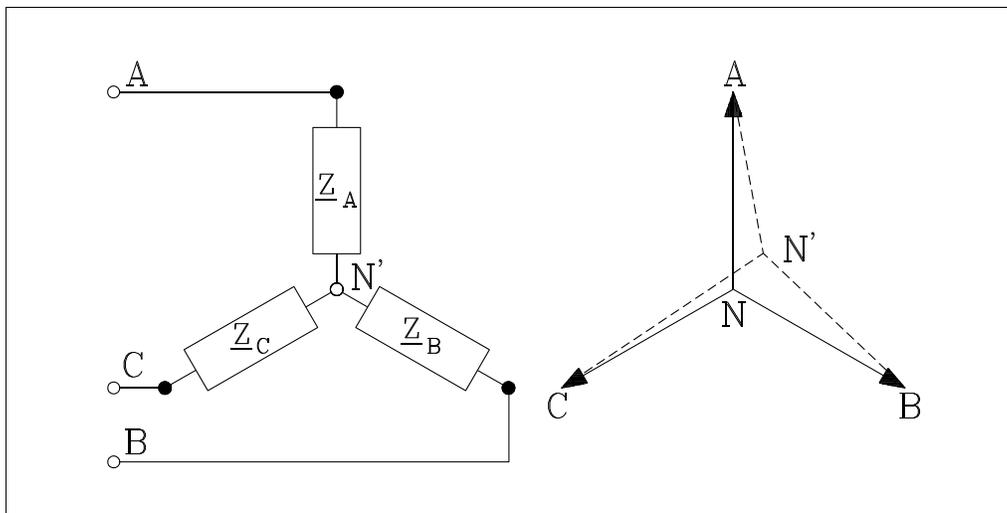


Figure 1.3-22

Si les trois impédances \underline{Z}_A , \underline{Z}_B , \underline{Z}_C sont identiques, les courants des lignes constituent un système équilibré et le potentiel du point neutre de la charge N' est égal à celui de la source N .

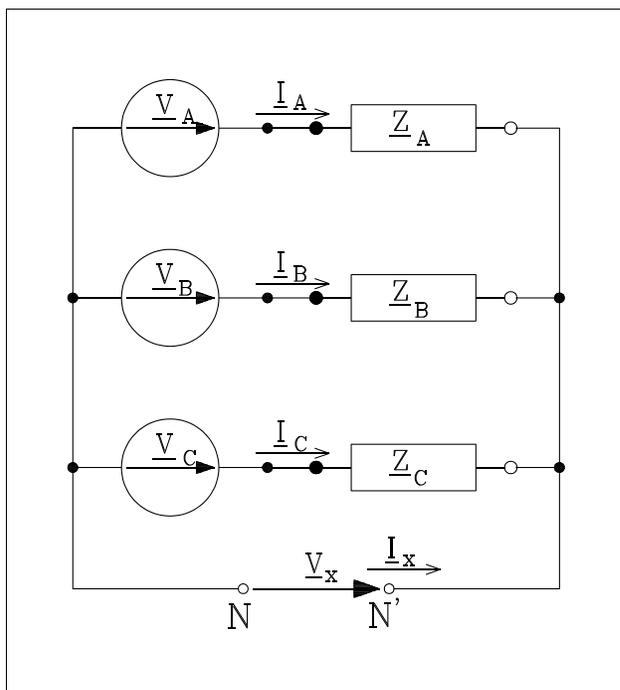


Figure 1.3-23

Si les trois impédances ne sont pas égales, le potentiel du point N' est différent de celui du point N . Il est possible de calculer ce "déplacement du neutre" $\underline{V}_x = \underline{V}_{NN'}$ en appliquant le *principe de superposition*.

En effet, appliquons entre N et N' , une source de tension exactement égale à \underline{V}_x telle que le courant \underline{I}_x reste nul. Ce courant est la superposition des courants causés par quatre sources \underline{V}_A , \underline{V}_B , \underline{V}_C et \underline{V}_x .

$$\mathbf{0} = \underline{I}_x = -\frac{\underline{V}_A}{\underline{Z}_A} - \frac{\underline{V}_B}{\underline{Z}_B} - \frac{\underline{V}_C}{\underline{Z}_C} + \frac{\underline{V}_x}{\underline{Z}_A // \underline{Z}_B // \underline{Z}_C} \quad (1.3-50)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \underline{V}_x &= \left(\underline{Z}_A // \underline{Z}_B // \underline{Z}_C \right) \left(\frac{\underline{V}_A}{\underline{Z}_A} + \frac{\underline{V}_B}{\underline{Z}_B} + \frac{\underline{V}_C}{\underline{Z}_C} \right) \\ &= \underline{V}_A \frac{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{\underline{a}^2}{\underline{Z}_B} + \frac{\underline{a}}{\underline{Z}_C}}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} \end{aligned} \quad (1.3-51)$$

1.4. LES SYSTEMES DE COMPOSANTES

1.4.1. Introduction

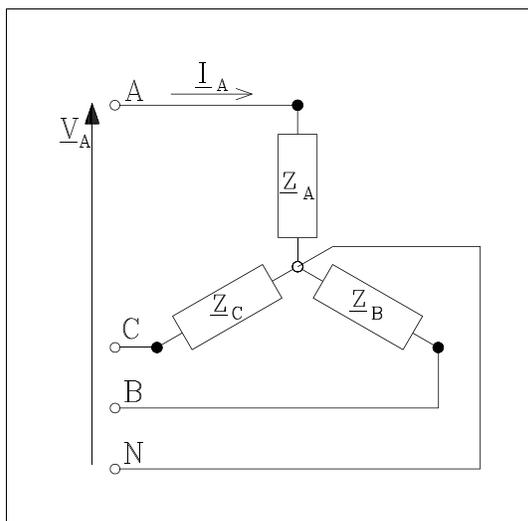


Figure 1.4-1

Considérons un récepteur triphasé simple constitué de trois impédances \underline{Z}_A , \underline{Z}_B , \underline{Z}_C dont le neutre est relié à la source.

Si le neutre est connecté, les trois phases sont *indépendantes*, ce qui signifie que la modification d'une impédance n'exerce une influence que sur le courant de la phase correspondante.

$$\begin{aligned} \underline{V}_A &= \underline{Z}_A \underline{I}_A \\ \underline{V}_B &= \underline{Z}_B \underline{I}_B \\ \underline{V}_C &= \underline{Z}_C \underline{I}_C \end{aligned} \quad (1.4-1)$$

Le système triphasé, n'est en fait que la juxtaposition de trois systèmes monophasés indépendants. Ces relations s'écrivent plus aisément sous forme matricielle.

$$\left[\underline{V}_T \right] = \left[\underline{Z}_T \right] \left[\underline{I}_T \right] \quad (1.4-2)$$

avec

$$\left[\underline{V}_T \right] = \begin{bmatrix} \underline{V}_A \\ \underline{V}_B \\ \underline{V}_C \end{bmatrix}, \quad \left[\underline{I}_T \right] = \begin{bmatrix} \underline{I}_A \\ \underline{I}_B \\ \underline{I}_C \end{bmatrix} \quad (1.4-3)$$

et

$$\left[\underline{Z}_T \right] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{Z}_B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{Z}_C \end{bmatrix} \quad (1.4-4)$$

La matrice $\left[\underline{Z}_T \right]$ est **diagonale**. Ceci est une caractéristique liée à l'indépendance des trois phases. La résolution du problème habituel où les tensions sont données et où il faut calculer les courants est simple puisqu'il suffit d'effectuer 3 divisions par un nombre complexe.

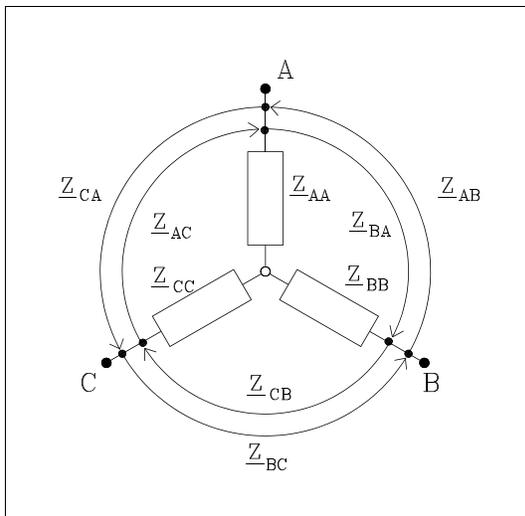


Figure 1.4-2

Considérons maintenant un système linéaire où existerait des couplages magnétiques entre les différentes phases (Figure 1.4-2). On notera \underline{Z}_{AB} l'influence sur la tension de la phase **A** du courant circulant dans la phase **B**. Par souci de généralité, on supposera que \underline{Z}_{AB} peut être différent de \underline{Z}_{BA} .

Il vient :

$$\begin{aligned} \underline{V}_A &= \underline{Z}_{AA} \underline{I}_A + \underline{Z}_{AB} \underline{I}_B + \underline{Z}_{AC} \underline{I}_C \\ \underline{V}_B &= \underline{Z}_{BA} \underline{I}_A + \underline{Z}_{BB} \underline{I}_B + \underline{Z}_{BC} \underline{I}_C \\ \underline{V}_C &= \underline{Z}_{CA} \underline{I}_A + \underline{Z}_{CB} \underline{I}_B + \underline{Z}_{CC} \underline{I}_C \end{aligned} \quad (1.4-5)$$

ou encore :

$$\left[\underline{V}_T \right] = \left[\underline{Z}_T \right] \left[\underline{I}_T \right] \quad (1.4-6)$$

avec :

$$\left[\underline{Z}_T \right] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{AA} & \underline{Z}_{AB} & \underline{Z}_{AC} \\ \underline{Z}_{BA} & \underline{Z}_{BB} & \underline{Z}_{BC} \\ \underline{Z}_{CA} & \underline{Z}_{CB} & \underline{Z}_{CC} \end{bmatrix} \quad (1.4-7)$$

La relation (1.4-6) est identique à la relation (1.4-2) si ce n'est, et la différence est importante, que la matrice $\left[\underline{Z}_T \right]$ est complète, c'est-à-dire que la modification d'une grandeur d'une phase influence les deux autres.

La résolution du problème habituel où les tensions sont données et où il faut calculer les courants nécessite l'inversion d'une matrice 3×3 à coefficients complexes. Comme cette opération est largement plus difficile que celle requise pour un circuit à 3 impédances indépendantes, l'idée vient naturellement de diagonaliser la matrice $\left[\underline{Z}_T \right]$ par une **transformation linéaire**.

On définit un nouveau système triphasé de tension et de courant :

$$\left[\underline{V}_M \right] = \begin{bmatrix} \underline{V}_x \\ \underline{V}_y \\ \underline{V}_z \end{bmatrix}, \quad \left[\underline{I}_M \right] = \begin{bmatrix} \underline{I}_x \\ \underline{I}_y \\ \underline{I}_z \end{bmatrix} \quad (1.4-8)$$

qui est lié au système triphasé par :

$$\left[\underline{V}_T \right] = \left[\underline{M}_V \right] \left[\underline{V}_M \right] \quad \text{et} \quad \left[\underline{I}_T \right] = \left[\underline{M}_I \right] \left[\underline{I}_M \right] \quad (1.4-9)$$

Les 2 matrices 3×3 \underline{M}_V et \underline{M}_I à coefficients complexes sont supposées régulières de sorte que l'on peut écrire :

$$\left[\underline{V}_M \right] = \left[\underline{M}_V \right]^{-1} \left[\underline{V}_T \right] \quad \text{et} \quad \left[\underline{I}_M \right] = \left[\underline{M}_I \right]^{-1} \left[\underline{I}_T \right] \quad (1.4-10)$$

La relation (1.4-6) devient :

$$\left[\underline{V}_M \right] = \left[\underline{M}_V \right]^{-1} \left[\underline{Z}_T \right] \left[\underline{M}_I \right] \left[\underline{I}_M \right] \quad (1.4-11)$$

Si l'on pose

$$\left[\underline{Z}_M \right] = \left[\underline{M}_V \right]^{-1} \left[\underline{Z}_T \right] \left[\underline{M}_I \right] \quad (1.4-12)$$

la relation s'écrit simplement :

$$\left[\underline{V}_M \right] = \left[\underline{Z}_M \right] \left[\underline{I}_M \right] \quad (1.4-13)$$

La diagonalisation de la matrice $\left[\underline{Z}_T \right]$ est liée à la recherche des **modes** (valeurs et vecteurs propres). La théorie générale ne sera pas vue ici mais uniquement deux exemples particuliers.

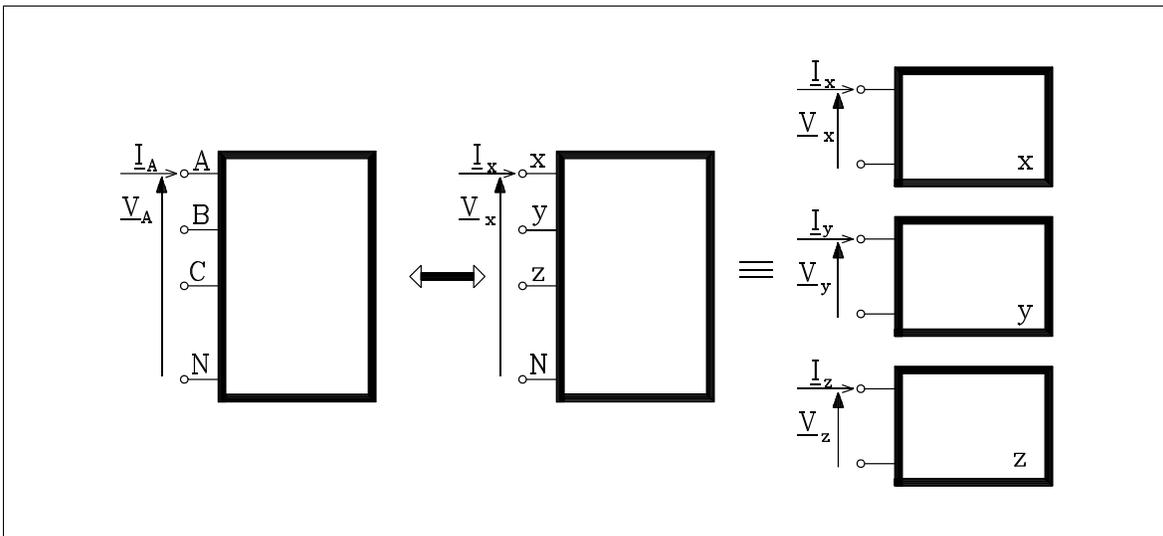


Figure 1.4-3

Les transformations indiquées (Figure 1.4-3) transposent un circuit triphasé complet (A , B , C) en un autre circuit triphasé (x , y , z) mais qui peut se décomposer en trois circuits monophasés.

Puissance

La puissance apparente absorbée par le circuit modifié est donnée par :

$$\underline{S}_M = \left[\underline{V}_M \right]^T \left[\underline{I}_M \right]^* = \left[\underline{V}_T \right]^T \left[\underline{M}_V \right]^{T,-1} \left[\underline{M}_I \right]^{*, -1} \left[\underline{I}_T \right]^* \quad (1.4-14)$$

Pour que la puissance se conserve, il faut que le produit $\left[\underline{M}_V \right]^{T,-1} \left[\underline{M}_I \right]^{*, -1}$ soit égal à la matrice unité. Ce n'est pas nécessairement vérifié dans les systèmes usuels.

1.4.2. Coordonnées (ou composantes) symétriques de Fortescue

Définitions

Le système de Fortescue est le plus utilisé dans l'étude des machines électriques. Les 3 composantes s'appellent respectivement :

$$\left[\underline{A}_F \right] = \begin{bmatrix} \underline{A}_o \\ \underline{A}_d \\ \underline{A}_i \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \underline{A}_o : \textit{composante homopolaire} \\ \underline{A}_d : \textit{composante directe} \\ \underline{A}_i : \textit{composante inverse} \end{array} \quad (1.4-15)$$

Dans la littérature anglo-saxonne, les composantes A_o , A_d , A_i sont désignées respectivement par A_0 , A_1 , A_2 .

La transformation est identique pour les courants et les tensions et vaut :

$$\left[\underline{E} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \underline{\alpha}^2 & \underline{\alpha} \\ \mathbf{1} & \underline{\alpha} & \underline{\alpha}^2 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \underline{\alpha} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1.4-16)$$

de sorte que

$$\left[\underline{A}_T \right] = \left[\underline{E} \right] \left[\underline{A}_F \right] \quad (1.4-17)$$

De même pour la transformée inverse :

$$\left[\underline{E} \right]^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \underline{\alpha} & \underline{\alpha}^2 \\ \mathbf{1} & \underline{\alpha}^2 & \underline{\alpha} \end{bmatrix} \quad (1.4-18)$$

de sorte que

$$\left[\underline{A}_F \right] = \left[\underline{E} \right]^{-1} \left[\underline{A}_T \right] \quad (1.4-19)$$

La relation (1.4-19) montre que pour obtenir la composante homopolaire, il suffit de prendre le tiers de la somme (vectorielle) des phaseurs de chaque phase.

Pour obtenir la composante directe, il suffit de prendre le tiers de la somme des composantes de la phase **A**, de la phase **B** décalée en avant de $2\pi/3$ et de la phase **C** décalée en arrière de

$2\pi/3$.

Pour obtenir la composante inverse, il suffit de prendre le tiers de la somme des composantes de la phase **A**, de la phase **B** décalée en arrière de $2\pi/3$ et de la phase **C** décalée en avant de $2\pi/3$.

La relation (1.4-17) montre que pour obtenir la composante de la phase **A**, il suffit de faire la somme des trois composantes de Fortescue.

Pour obtenir la composante de la phase **B**, il suffit de faire la somme de la composante homopolaire, de la composante directe décalée en arrière de $2\pi/3$ et de la composante inverse décalée en avant de $2\pi/3$.

Pour obtenir la composante de la phase **C**, il suffit de faire la somme de la composante homopolaire, de la composante directe décalée en avant de $2\pi/3$ et de la composante inverse décalée en arrière de $2\pi/3$.

Puissance :

On vérifiera que $\underline{S}_F = 1/3 \underline{S}_T$

Superposition :

Prenons l'exemple d'un système triphasé déséquilibré de courant.

La relation (1.4-17) s'écrit :

$$\begin{aligned}\underline{I}_A &= \underline{I}_o + \underline{I}_d + \underline{I}_i \\ \underline{I}_B &= \underline{I}_o + \underline{\alpha}^2 \underline{I}_d + \underline{\alpha} \underline{I}_i \\ \underline{I}_C &= \underline{I}_o + \underline{\alpha} \underline{I}_d + \underline{\alpha}^2 \underline{I}_i\end{aligned}\quad (1.4-20)$$

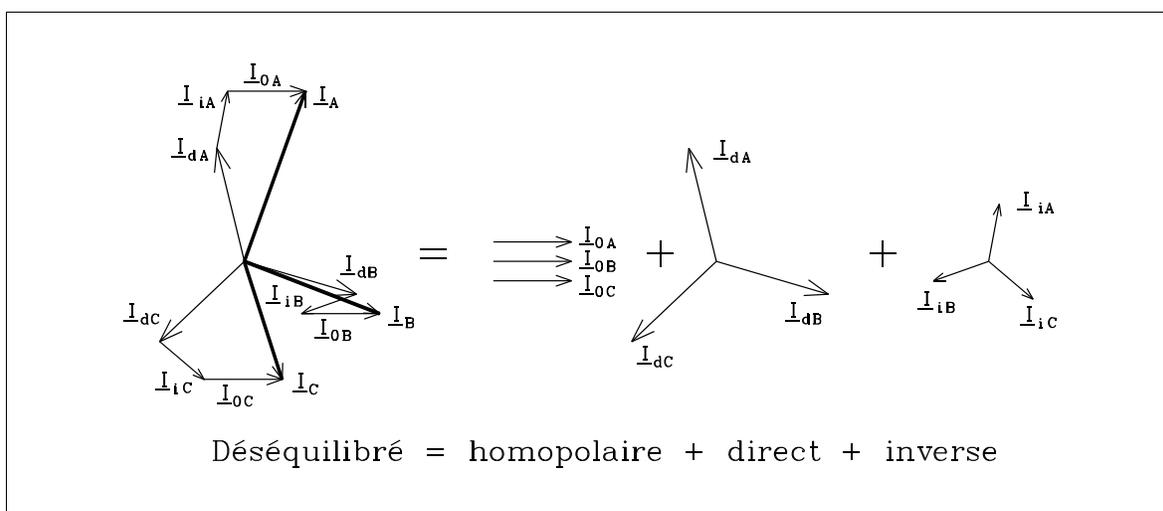


Figure 1.4-4

Un système triphasé déséquilibré est la superposition :

- d'un système triphasé **homopolaire**, c'est-à-dire où des courants égaux (en phase et en module) circulent dans chaque phase.
- d'un système triphasé équilibré d'ordre **direct**, c'est-à-dire où des courants égaux en modules, mais décalés de $2\pi/3$ circulent dans chaque phase.
- d'un système triphasé équilibré d'ordre **inverse** du même type que le système d'ordre direct, mais décalé dans l'autre sens.

Matrice d'impédance

La définition de cette matrice, donnée par (1.4-12) est :

$$\left[\underline{Z}_F \right] = \left[\underline{E} \right]^{-1} \left[\underline{Z}_T \right] \left[\underline{E} \right] \quad (1.4-21)$$

$$\left[\underline{Z}_F \right] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{\alpha} & \underline{\alpha}^2 \\ 1 & \underline{\alpha}^2 & \underline{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_{AA} & \underline{Z}_{AB} & \underline{Z}_{AC} \\ \underline{Z}_{BA} & \underline{Z}_{BB} & \underline{Z}_{BC} \\ \underline{Z}_{CA} & \underline{Z}_{CB} & \underline{Z}_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{\alpha}^2 & \underline{\alpha} \\ 1 & \underline{\alpha} & \underline{\alpha}^2 \end{bmatrix} \quad (1.4-22)$$

$$\left[\underline{Z}_F \right] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{\alpha} & \underline{\alpha}^2 \\ 1 & \underline{\alpha}^2 & \underline{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_{AA} + \underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{AC} & \underline{Z}_{AA} + \underline{\alpha}^2 \underline{Z}_{AB} + \underline{\alpha} \underline{Z}_{AC} & \underline{Z}_{AA} + \underline{\alpha} \underline{Z}_{AB} + \underline{\alpha}^2 \underline{Z}_{AC} \\ \underline{Z}_{BA} + \underline{Z}_{BB} + \underline{Z}_{BC} & \underline{Z}_{BA} + \underline{\alpha}^2 \underline{Z}_{BB} + \underline{\alpha} \underline{Z}_{BC} & \underline{Z}_{BA} + \underline{\alpha} \underline{Z}_{BB} + \underline{\alpha}^2 \underline{Z}_{BC} \\ \underline{Z}_{CA} + \underline{Z}_{CB} + \underline{Z}_{CC} & \underline{Z}_{CA} + \underline{\alpha}^2 \underline{Z}_{CB} + \underline{\alpha} \underline{Z}_{CC} & \underline{Z}_{CA} + \underline{\alpha} \underline{Z}_{CB} + \underline{\alpha}^2 \underline{Z}_{CC} \end{bmatrix} \quad (1.4-23)$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \underline{Z}_{AA} + \underline{Z}_{BB} + \underline{Z}_{CC} & \underline{Z}_{AA} + \alpha^2 \underline{Z}_{BB} + \alpha \underline{Z}_{CC} & \underline{Z}_{AA} + \alpha \underline{Z}_{BB} + \alpha^2 \underline{Z}_{CC} \\ + \underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA} & + \alpha^2 (\underline{Z}_{AB} + \alpha^2 \underline{Z}_{BC} + \alpha \underline{Z}_{CA}) & + \alpha (\underline{Z}_{AB} + \alpha \underline{Z}_{BC} + \alpha^2 \underline{Z}_{CA}) \\ + \underline{Z}_{BA} + \underline{Z}_{AC} + \underline{Z}_{CB} & + (\underline{Z}_{BA} + \alpha \underline{Z}_{AC} + \alpha^2 \underline{Z}_{CB}) & + (\underline{Z}_{BA} + \alpha^2 \underline{Z}_{AC} + \alpha \underline{Z}_{CB}) \\ \underline{Z}_{AA} + \alpha \underline{Z}_{BB} + \alpha^2 \underline{Z}_{CC} & \underline{Z}_{AA} + \underline{Z}_{BB} + \underline{Z}_{CC} & \underline{Z}_{AA} + \alpha^2 \underline{Z}_{BB} + \alpha \underline{Z}_{CC} \\ + (\underline{Z}_{AB} + \alpha \underline{Z}_{BC} + \alpha^2 \underline{Z}_{CA}) & + \alpha^2 (\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}) & + \alpha (\underline{Z}_{AB} + \alpha^2 \underline{Z}_{BC} + \alpha \underline{Z}_{CA}) \\ + \alpha (\underline{Z}_{BA} + \alpha^2 \underline{Z}_{AC} + \alpha \underline{Z}_{CB}) & + \alpha (\underline{Z}_{BA} + \underline{Z}_{AC} + \underline{Z}_{CB}) & + \alpha (\underline{Z}_{BA} + \alpha \underline{Z}_{AC} + \alpha^2 \underline{Z}_{CB}) \\ \underline{Z}_{AA} + \alpha^2 \underline{Z}_{BB} + \alpha \underline{Z}_{CC} & \underline{Z}_{AA} + \alpha \underline{Z}_{BB} + \alpha^2 \underline{Z}_{CC} & \underline{Z}_{AA} + \underline{Z}_{BB} + \underline{Z}_{CC} \\ + (\underline{Z}_{AB} + \alpha^2 \underline{Z}_{BC} + \alpha \underline{Z}_{CA}) & + \alpha^2 (\underline{Z}_{AB} + \alpha \underline{Z}_{BC} + \alpha^2 \underline{Z}_{CA}) & + \alpha (\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}) \\ + \alpha^2 (\underline{Z}_{BA} + \alpha \underline{Z}_{AC} + \alpha^2 \underline{Z}_{CB}) & + \alpha^2 (\underline{Z}_{BA} + \alpha^2 \underline{Z}_{AC} + \alpha \underline{Z}_{CB}) & + \alpha^2 (\underline{Z}_{BA} + \underline{Z}_{AC} + \underline{Z}_{CB}) \end{bmatrix} \quad (1.4-24)$$

Conditions de diagonalisation

$$\begin{aligned}
\text{si } \underline{Z}_{AA} &= \underline{Z}_{BB} = \underline{Z}_{CC} \\
\underline{Z}_{AB} &= \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} \\
\underline{Z}_{AC} &= \underline{Z}_{CB} = \underline{Z}_{BA}
\end{aligned} \quad (1.4-25)$$

la matrice est diagonale et s'écrit simplement :

$$[\underline{Z}_F] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_o & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{Z}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{Z}_i \end{bmatrix} \quad (1.4-26)$$

en posant :

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_o &\triangleq \text{impédance homopolaire} = \underline{Z}_{AA} + \underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BA} \\
\underline{Z}_d &\triangleq \text{impédance directe} = \underline{Z}_{AA} + \alpha^2 \underline{Z}_{AB} + \alpha \underline{Z}_{BA} \\
\underline{Z}_i &\triangleq \text{impédance inverse} = \underline{Z}_{AA} + \alpha \underline{Z}_{AB} + \alpha^2 \underline{Z}_{BA}
\end{aligned} \quad (1.4-27)$$

les conditions (1.4-25) imposent :

- l'égalité des trois impédances propres;
- l'égalité des impédances mutuelles pour un sens de succession;
- l'égalité des mutuelles pour l'autre sens de succession.

Lorsque ces conditions sont réalisées, on parle de symétrie cyclique. De manière condensée, on peut dire que les conditions (1.4-25) imposent l'égalité des trois éléments situés respectivement sur la diagonale principale de $[\underline{Z}_T]$ et sur ses deux parallèles.

Ces conditions sont pratiquement toujours réalisées dans les machines électriques du fait de leur symétrie. A cause de la présence de circuits fermés et couplés sur le rotor en rotation, $\underline{Z}_{AB} \neq \underline{Z}_{BA}$ mais les conditions de diagonalisation sont remplies.

Dans les systèmes immobiles, comme par exemple les lignes aériennes ou les câbles, on a $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BA}$. Les conducteurs doivent être placés de manière symétrique, aux sommets d'un triangle équilatéral.

Dans ces conditions, les impédances directes et inverses sont égales :

$$\underline{Z}_d = \underline{Z}_i = \underline{Z}_{AA} - \underline{Z}_{AB} \quad (1.4-28)$$

Dans les lignes, la disposition symétrique est rarement réalisée de sorte que la matrice n'est pas diagonale.

Les impédances symétriques

On appelle impédance homopolaire/directe/inverse, l'impédance qui s'oppose à la circulation d'un système homopolaire/direct/inverse de courant.

Par exemple, le système homopolaire de courant étant constitué par trois courants égaux dans chacune des phases, l'impédance homopolaire d'un circuit triphasé est égale à l'infini s'il n'est pas connecte au neutre.

L'impédance directe est celle qui s'oppose à la circulation d'un système direct de courant, c'est-à-dire de trois courants égaux en module mais décalés de $2\pi/3$ en arrière l'un par rapport à l'autre.

De même pour l'impédance inverse si ce n'est que les courants successifs sont décalés en avant.

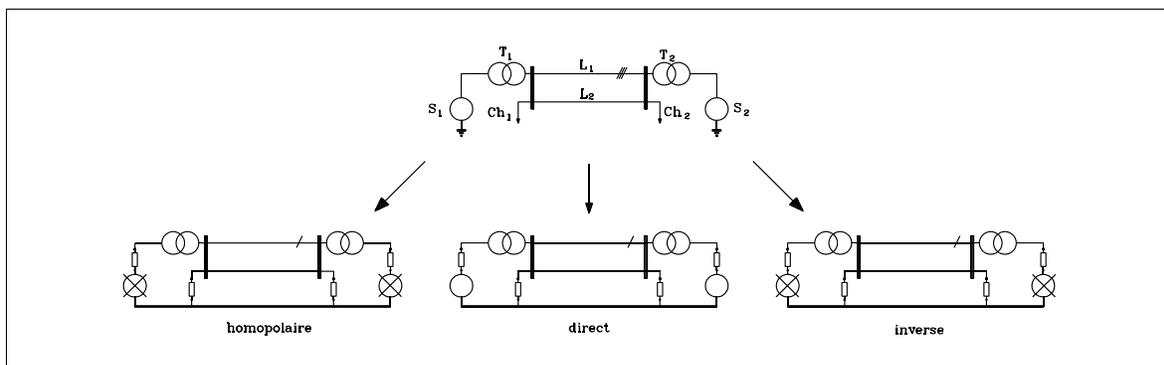


Figure 1.4-5

Considérons, à titre d'exemple, le circuit triphasé de la Figure 1.4-5 qui comprend deux sources (S_1 et S_2), deux transformateurs (T_1 et T_2), deux charges (Ch_1 et Ch_2) et deux lignes (L_1 et L_2). Si les conditions de symétrie sont remplies, il lui correspond trois circuits monophasés

d'ordre homopolaire, direct, inverse.

Tous les éléments sont représentés par leur schéma équivalent dans le système des composantes.

En utilisant le théorème de Thévenin, les sources sont représentées par une f.e.m. et une impédance en série. Comme les alternateurs constituent des sources de tension équilibrées, les f.e.m. homopolaires et inverses sont nulles et seules les impédances subsistent dans ces réseaux. Il n'y a donc pas de composantes homopolaires ou inverses en fonctionnement normal. Les modèles de lignes et de transformateurs seront établis dans la suite de ce cours.

Si le neutre n'est pas connecté, l'impédance homopolaire est infinie.

Application : calcul des courants de court-circuit

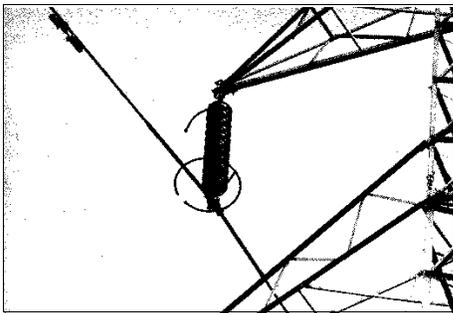


Figure 1.4-6

Lorsque la foudre tombe sur un conducteur de ligne aérienne, elle y cause une surtension qui provoque un amorçage de l'éclateur placé en parallèle sur la chaîne d'isolateurs et constitué par une corne et un anneau de garde (Figure 1.4-6). Le courant est dérivé vers le sol par un conducteur qui court le long de la structure en treillis du pylône. Le coup de foudre est un phénomène très bref : quelques dizaines de μs . Malheureusement, l'arc ne s'éteint pas car il reste alimenté par les sources du réseau. Il importe de dimensionner le réseau pour que ces courants ne produisent pas de dégâts avant que

les disjoncteurs (interrupteurs automatiques) n'aient eu le temps de les couper. Il importe donc d'en calculer l'amplitude. Il existe évidemment d'autres causes de défaut que la foudre : pollution sur un isolateur, arrachage d'un câble souterrain par un engin de génie civil, etc ... Très peu de défauts sont triphasés symétriques. Le calcul nécessite donc le recours à un système de composantes.

Considérons un réseau **linéaire** quelconque et particularisons un point X quelconque de la ligne (Figure 1.4-7). En ce point, un défaut **dissymétrique** est appliqué. Un système déséquilibré de courants circule dans le défaut.

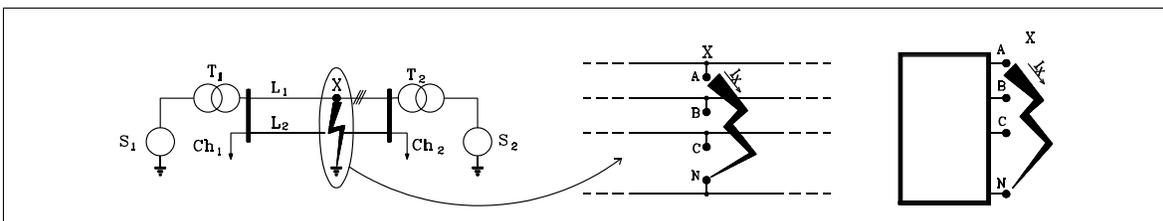


Figure 1.4-7

L'accès X est reporté sur chacun des réseaux homopolaire, direct et inverse (Figure 1.4-8) qui

peuvent bien entendu être défini puisque, à part pour le défaut, les conditions de symétrie sont respectées.

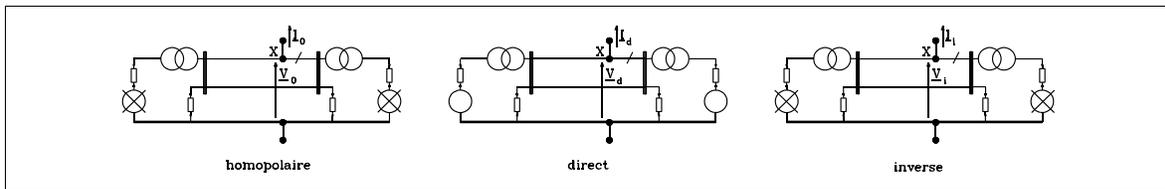
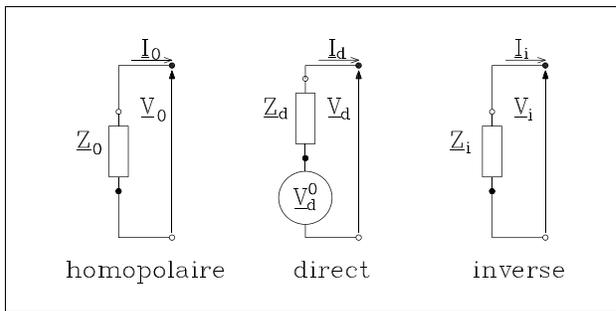


Figure 1.4-8

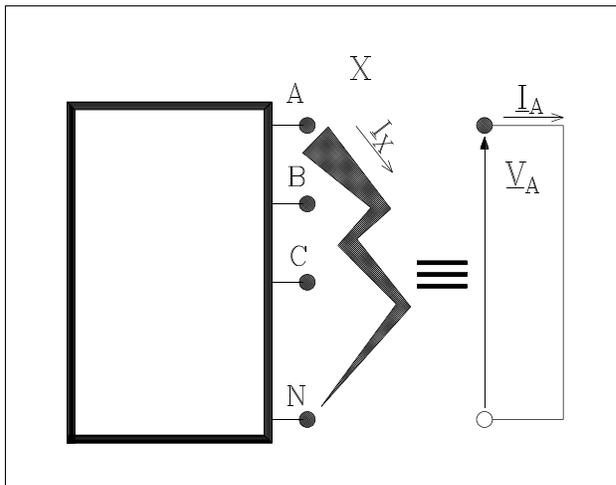


Pour chacun des réseaux, on définit l'impédance à l'accès X, en utilisant le théorème de Thévenin : Figure 1.4-9

Pour simplifier cet exposé, l'impédance du défaut sera supposée nulle.

Figure 1.4-9

1. Défaut monophasé franc sur la phase A



Dans ce cas (Figure 1.4-10),

$$\begin{aligned} \underline{V}_A &= \mathbf{0} \\ \underline{I}_B &= \underline{I}_C = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.4-29)$$

Posons $\underline{I}_A = \underline{I}_X = \text{inconnue}$

Figure 1.4-10

La matrice des courants de phase dans le défaut a comme expression :

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_A \\ \underline{I}_B \\ \underline{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \underline{I}_X \quad (1.4-30)$$

Les composantes de Fortescue valent donc :

$$\begin{aligned} \left[\underline{I}_F \right] &= \left[\underline{E} \right]^{-1} \left[\underline{I}_T \right] \\ \text{soit : } \begin{bmatrix} \underline{I}_o \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \underline{I}_X \end{aligned} \quad (1.4-31)$$

Si l'on pose $\underline{I}_Y = \underline{I}_X/3 = \underline{I}_A/3 = \text{nouvelle inconnue}$,

$$\left[\underline{C} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \text{matrice de connexion} \quad (1.4-32)$$

la relation (1.4-31) s'écrit encore :

$$\begin{aligned} \left[\underline{I}_F \right] &= \left[\underline{C} \right] \underline{I}_Y \\ \text{ou } \underline{I}_o &= \underline{I}_d = \underline{I}_i (= \underline{I}_Y) \end{aligned} \quad (1.4-33)$$

Les trois composantes de Fortescue du courant dans le défaut sont donc égales.

La relation sur les tensions donne :

$$\underline{V}_A = \underline{V}_o + \underline{V}_d + \underline{V}_i = \mathbf{0} \quad (1.4-34)$$

Les relations (1.4-33) et (1.4-34) sont vérifiées lorsque les trois réseaux sont placés en série ((1.4-34)).

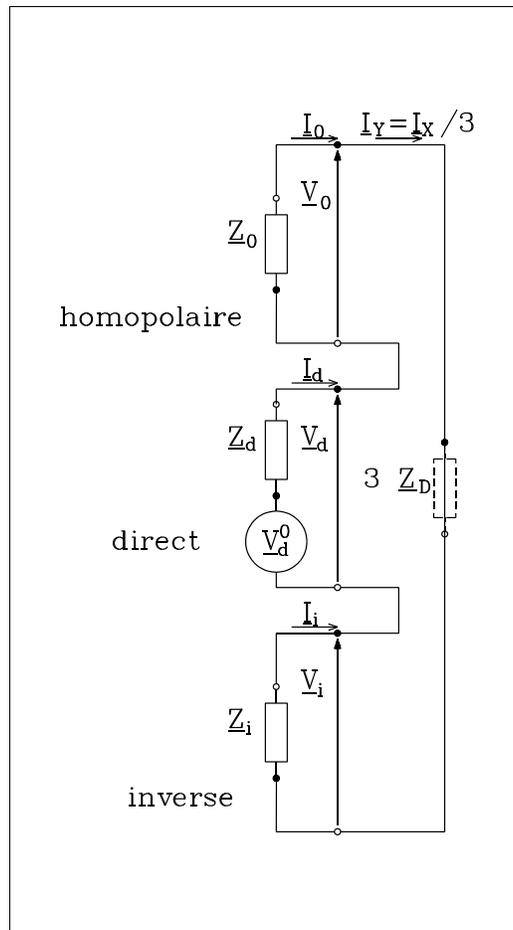


Figure 1.4-11

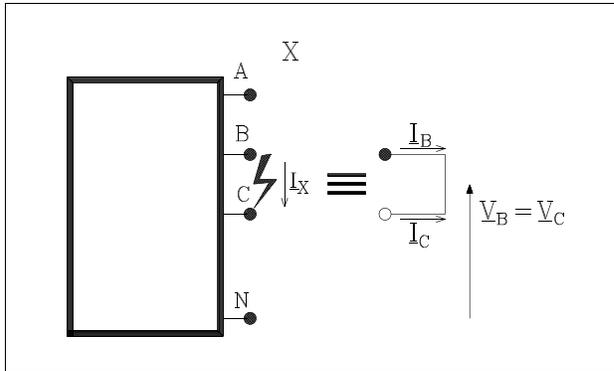
Il est immédiat de déduire la valeur du courant dans le défaut :

$$\underline{I}_A = 3 \underline{I}_Y = \frac{3 \underline{V}_d^0}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i} \quad (1.4-35)$$

Le schéma de la (1.4-34) peut servir à calculer les tensions sur les phases saines, les courants et les tensions en un point quelconque du réseau.

Il n'est pas nécessaire de supposer que l'impédance du défaut est nulle. Pour un défaut monophasé d'impédance \underline{Z}_D , on se ramène au cas du défaut franc en introduisant cette impédance \underline{Z}_D sur chacune des phases à l'accès. Il suffit donc d'insérer $3 \underline{Z}_D$ dans la connexion série de la (1.4-34).

2. Défaut biphasé franc entre les phases B et C



Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \underline{V}_B &= \underline{V}_C \\ \underline{I}_A &= \mathbf{0} \\ \underline{I}_B &= -\underline{I}_C = \underline{I}_X = \textit{inconnue} \end{aligned} \quad (1.4-36)$$

Figure 1.4-12

Le raisonnement se développe comme ci-dessus :

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_A \\ \underline{I}_B \\ \underline{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix} \underline{I}_X \quad (1.4-37)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{I}_E \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{E} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{I}_T \end{bmatrix} \\ \textit{soit : } \begin{bmatrix} \underline{I}_o \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \underline{\alpha} - \underline{\alpha}^2 \\ \underline{\alpha}^2 - \underline{\alpha} \end{bmatrix} \underline{I}_X \end{aligned} \quad (1.4-38)$$

On pose $\underline{I}_Y = \underline{I}_X (\underline{\alpha} - \underline{\alpha}^2)/3 = (j\sqrt{3}/3) \underline{I}_X = \textit{nouvelle inconnue}$,

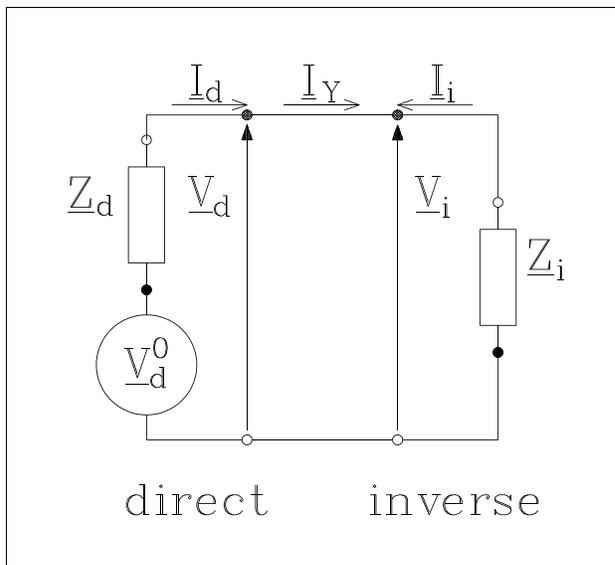
$$\begin{bmatrix} \underline{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix} = \textit{matrice de connexion} \quad (1.4-39)$$

d'où :

$$\begin{aligned} [\underline{I}_E] &= [C] \underline{I}_Y \\ \text{donc } \underline{I}_d &= -\underline{I}_i (= \underline{I}_Y) \\ \underline{I}_o &= \mathbf{0} \quad \text{évident puisque le défaut} \\ &\quad \text{ne fait pas intervenir le neutre} \end{aligned} \quad (1.4-40)$$

Pour les tensions :

$$\begin{aligned} \underline{V}_B &= \underline{V}_C \\ \text{d'où : } \underline{V}_o + \underline{\alpha}^2 \underline{V}_d + \underline{\alpha} \underline{V}_i &= \underline{V}_o + \underline{\alpha} \underline{V}_d + \underline{\alpha}^2 \underline{V}_i \\ \text{donc : } \underline{V}_d &= \underline{V}_i \end{aligned} \quad (1.4-41)$$



Les relations (1.4-40) et (1.4-41) sont vérifiées lorsque les réseaux direct et inverse sont placés en parallèle (Figure 1.4-13). Le réseau homopolaire n'intervient pas.

Figure 1.4-13

Il est immédiat de déduire la valeur du courant dans le défaut :

$$\underline{I}_B = -\underline{I}_C = \underline{I}_X = -j\sqrt{3} \underline{I}_Y = -j\sqrt{3} \frac{\underline{V}_d^0}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i} \quad (1.4-42)$$

3. Défaut triphasé

Comme ce défaut est symétrique, seul le système direct intervient.

$$\underline{I}_A = \frac{V_d^0}{\underline{Z}_d} \quad ; \quad \underline{I}_B = \underline{\alpha}^2 \underline{I}_A \quad ; \quad \underline{I}_C = \underline{\alpha} \underline{I}_A \quad (1.4-43)$$

4. Autres types de défauts

Une étude plus générale sera reprise au cours TDEE.

1.4.3. Composantes d'Edith Clarke

Les composantes de Fortescue sont particulièrement intéressantes pour l'étude des machines car la matrice d'impédance se diagonalise lorsque les conditions de symétrie cyclique sont vérifiées, ce qui est pratiquement toujours le cas. Lorsque le système triphasé étudié ne comporte pas de circuit couplé en mouvement, les impédances mutuelles sont réciproques (ou : égales "dans les deux sens"), c'est à dire $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BA}$. La diagonalisation de la matrice d'impédance n'est obtenue que si le système triphasé est parfaitement symétrique, ce qui oblige, par exemple, les conducteurs d'une ligne triphasée à se trouver au sommet d'un triangle équilatéral.

Un inconvénient des composantes de Fortescue est lié au fait que la matrice de transformation est complexe, ce qui posait de sérieuses difficultés pour les calculs et la simulation avant l'apparition des calculateurs numériques. Dans le système d'Edith CLARKE, présenté ici à titre d'exemple, la matrice de transformation est réelle. Il est donc très simple de passer des grandeurs triphasées aux composantes par de simples transformateurs dans les simulations et par des opérations élémentaires dans les calculs. La transformation est également valable pour les valeurs instantanées et pas uniquement pour les phaseurs.

Définition

$$\left[\underline{A}_C \right] = \begin{bmatrix} \underline{A}_\alpha \\ \underline{A}_\alpha \\ \underline{A}_\beta \end{bmatrix} \quad (1.4-44)$$

La transformation est identique¹ pour les courants et les tensions et vaut :

¹ Il existe une variante où la matrice de transformation est différente pour les courants et les tensions

$$[C] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & \sqrt{3} \\ 2 & -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (1.4-45)$$

de sorte que :

$$[\underline{A}_T] = [C][\underline{A}_C] \quad (1.4-46)$$

De même pour la transformée inverse :

$$[C]^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (1.4-47)$$

de sorte que :

$$[\underline{A}_C] = [C]^{-1}[\underline{A}_T] \quad (1.4-48)$$

Il est utile de faire les remarques suivantes :

- Si le système est équilibré d'ordre **direct** :
 $\underline{A}_0 = 0$
 $\underline{A}_\alpha = \underline{A}_d$
 $\underline{A}_\beta = -j \underline{A}_d$
- Si le système est équilibré d'ordre **inverse** :
 $\underline{A}_0 = 0$
 $\underline{A}_\alpha = \underline{A}_i$
 $\underline{A}_\beta = -j \underline{A}_i$
- Si le système est équilibré d'ordre **homopolaire** :
 $\underline{A}_0 = \underline{A}_o$
 $\underline{A}_\alpha = \underline{A}_\beta = 0$

Matrice d'impédance

La définition de cette matrice, donnée par (1.4-12), est :

$$[\underline{Z}_C] = [C]^{-1} [\underline{Z}_T] [C] \quad (1.4-49)$$

$$[\underline{Z}_C] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_{AA} & \underline{Z}_{AB} & \underline{Z}_{AC} \\ \underline{Z}_{BA} & \underline{Z}_{BB} & \underline{Z}_{BC} \\ \underline{Z}_{CA} & \underline{Z}_{CB} & \underline{Z}_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & \sqrt{3} \\ 2 & -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (1.4-50)$$

$$[\underline{Z}_C] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\underline{Z}_{AA}+2\underline{Z}_{AB}+2\underline{Z}_{AC} & 2\underline{Z}_{AA}-\underline{Z}_{AB}-\underline{Z}_{AC} & \sqrt{3}(\underline{Z}_{AB}-\underline{Z}_{AC}) \\ 2\underline{Z}_{BA}+2\underline{Z}_{BB}+2\underline{Z}_{BC} & 2\underline{Z}_{BA}-\underline{Z}_{BB}-\underline{Z}_{BC} & \sqrt{3}(\underline{Z}_{BB}-\underline{Z}_{BC}) \\ 2\underline{Z}_{CA}+2\underline{Z}_{CB}+2\underline{Z}_{CC} & 2\underline{Z}_{CA}-\underline{Z}_{CB}-\underline{Z}_{CC} & \sqrt{3}(\underline{Z}_{CB}-\underline{Z}_{CC}) \end{bmatrix} \quad (1.4-51)$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2\underline{Z}_{AA}+2\underline{Z}_{BB}+2\underline{Z}_{CC} & 2\underline{Z}_{AA}-\underline{Z}_{BB}-\underline{Z}_{CC} & \sqrt{3}(\underline{Z}_{BB}-\underline{Z}_{CC}) \\ +2\underline{Z}_{AB}+2\underline{Z}_{BC}+2\underline{Z}_{CA} & -\underline{Z}_{AB}-\underline{Z}_{BC}+2\underline{Z}_{CA} & +\underline{Z}_{AB}-\underline{Z}_{BC} \\ +2\underline{Z}_{BA}+2\underline{Z}_{AC}+2\underline{Z}_{CB} & +2\underline{Z}_{BA}-\underline{Z}_{AC}-\underline{Z}_{CB} & -\underline{Z}_{AC}+\underline{Z}_{CB} \\ 4\underline{Z}_{AA}-2\underline{Z}_{BB}-2\underline{Z}_{CC} & 4\underline{Z}_{AA}+\underline{Z}_{BB}+\underline{Z}_{CC} & \sqrt{3}(-\underline{Z}_{BB}+\underline{Z}_{CC}) \\ +4\underline{Z}_{AB}-2\underline{Z}_{BC}-2\underline{Z}_{CA} & -2\underline{Z}_{AB}+\underline{Z}_{BC}-2\underline{Z}_{CA} & +2\underline{Z}_{AB}+\underline{Z}_{BC} \\ -2\underline{Z}_{BA}+4\underline{Z}_{AC}-2\underline{Z}_{CB} & -2\underline{Z}_{BA}-2\underline{Z}_{AC}+\underline{Z}_{CB} & -2\underline{Z}_{AC}-\underline{Z}_{CB} \\ \sqrt{3}(+2\underline{Z}_{BB}-2\underline{Z}_{CC}) & \sqrt{3}(-\underline{Z}_{BB}+\underline{Z}_{CC}) & 3(+\underline{Z}_{BB}+\underline{Z}_{CC}) \\ +2\underline{Z}_{BC}-2\underline{Z}_{CA} & -\underline{Z}_{BC}-2\underline{Z}_{CA} & -\underline{Z}_{BC} \\ +2\underline{Z}_{BA}-2\underline{Z}_{CB} & +2\underline{Z}_{BA}+\underline{Z}_{CB} & -\underline{Z}_{CB} \end{bmatrix} \quad (1.4-52)$$

Si les conditions de symétrie sont respectées, la composante \underline{A}_0 devient indépendante des deux autres mais les composantes \underline{A}_α et \underline{A}_β restent couplées. *Les composantes de Clarke ne sont pas intéressantes pour l'étude des machines.* On peut d'ailleurs montrer que la machine triphasée est transformée en une machine diphasée et un enroulement homopolaire indépendant (voir § 5.6.).

Pour les circuits qui ne comportent pas d'enroulements couplés en mouvement, les impédances

mutuelles sont égales “dans les deux sens” : $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BA}$. La matrice d'impédance s'écrit :

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2\underline{Z}_{AA} + 2\underline{Z}_{BB} + 2\underline{Z}_{CC} & 2\underline{Z}_{AA} - \underline{Z}_{BB} - \underline{Z}_{CC} & \sqrt{3}(\underline{Z}_{BB} - \underline{Z}_{CC} \\ + 4\underline{Z}_{AB} + 4\underline{Z}_{BC} + 4\underline{Z}_{CA} & + \underline{Z}_{AB} - 2\underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA} & + \underline{Z}_{AB} - \underline{Z}_{CA}) \\ 4\underline{Z}_{AA} - 2\underline{Z}_{BB} - 2\underline{Z}_{CC} & 4\underline{Z}_{AA} + \underline{Z}_{BB} + \underline{Z}_{CC} & \sqrt{3}(-\underline{Z}_{BB} + \underline{Z}_{CC} \\ + 2\underline{Z}_{AB} - 4\underline{Z}_{BC} + 2\underline{Z}_{CA} & - 4\underline{Z}_{AB} + 2\underline{Z}_{BC} - 4\underline{Z}_{CA} & + 2\underline{Z}_{AB} + -2\underline{Z}_{CA}) \\ \sqrt{3}(+2\underline{Z}_{BB} - 2\underline{Z}_{CC} & \sqrt{3}(-\underline{Z}_{BB} + \underline{Z}_{CC} & 3 (+\underline{Z}_{BB} + \underline{Z}_{CC} \\ + 2\underline{Z}_{AB} - 2\underline{Z}_{CA}) & - \underline{Z}_{AB} - 2\underline{Z}_{CA}) & - 2\underline{Z}_{BC}) \end{bmatrix} \quad (1.4-53)$$

La matrice est diagonale si :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{BB} &= \underline{Z}_{CC} \\ \underline{Z}_{AB} &= \underline{Z}_{AC} \\ \text{et si : } \underline{Z}_{AA} - \underline{Z}_{BB} + \underline{Z}_{AB} - \underline{Z}_{BC} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4-54)$$

Il est donc possible d'obtenir la diagonalisation si les phases **B** et **C** sont identiques et disposées symétriquement par rapport à la phase **A** (par exemple en nappe horizontale ou verticale comme c'est fréquemment le cas dans les lignes aériennes) à la condition que la dernière relation soit vérifiée. Si l'impédance propre de la phase **A** est égale à celle des deux autres, il doit en être de même des impédances mutuelles entre toutes les phases. Pour une ligne, ceci impose que les conducteurs soient situés aux sommets d'un triangle équilatéral. Le fait que la matrice de transformation soit réelle n'est plus un avantage primordial à l'heure actuelle mais le maintien d'un couplage entre les composantes α et β dans les machines reste un inconvénient majeur de sorte que les composantes de Clarke ne sont plus guère utilisées avec les phaseurs (mais le sont encore en valeurs instantanées).