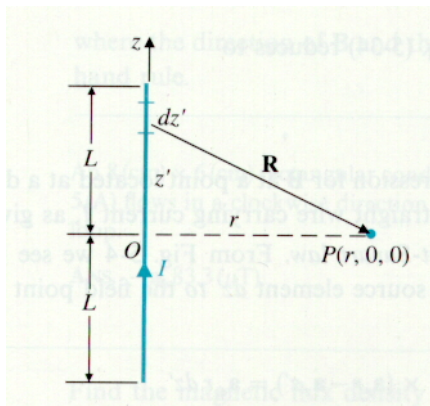


Electricité – ELEC-H-200

Séance 5 -- Corrigé

Exercice 1

a)



$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{\vec{1}_z}{R} dz \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{\vec{1}_z}{\sqrt{z^2 + r^2}} dz \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{\sqrt{L^2 + r^2} - L} \vec{1}_z\end{aligned}$$

Le champ magnétique s'obtient par $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$.
Le champ $\vec{B}$ est en $I d\vec{\ell} \times \vec{r}$ et il est donc dirigé suivant $\vec{1}_\varphi$: $\vec{B} = B_\varphi \vec{1}_\varphi$.

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} \vec{1}_r - \frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{1}_\varphi$$

$$\vec{B} = -\vec{1}_\varphi \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{\sqrt{L^2 + r^2} - L} \right]$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}} \vec{1}_\varphi \quad (1)$$

4) Pour le circuit, il faut sommer les contributions des 4 côtés :

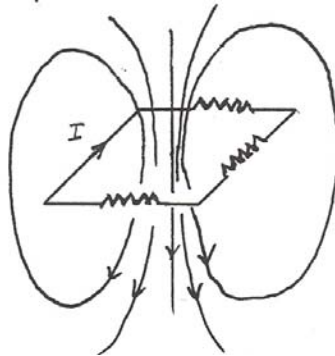
$$L = r = \frac{w}{2}$$

$$\vec{B} = 4 \times \frac{\mu_0 I}{\sqrt{2} \pi w} \vec{1}_z$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \mu_0 I}{\pi w} \vec{1}_z$$

avec $w = 10 \text{ cm}$ et $I = 0,5 \text{ A} \rightarrow |\vec{B}| = 5,66 \mu\text{T}$

Lignes de champ :



Dans le proche voisinage d'un fil, le champ produit par les autres fils devient négligeable et $\vec{B}$ est donné par (1) avec $r \ll L$:

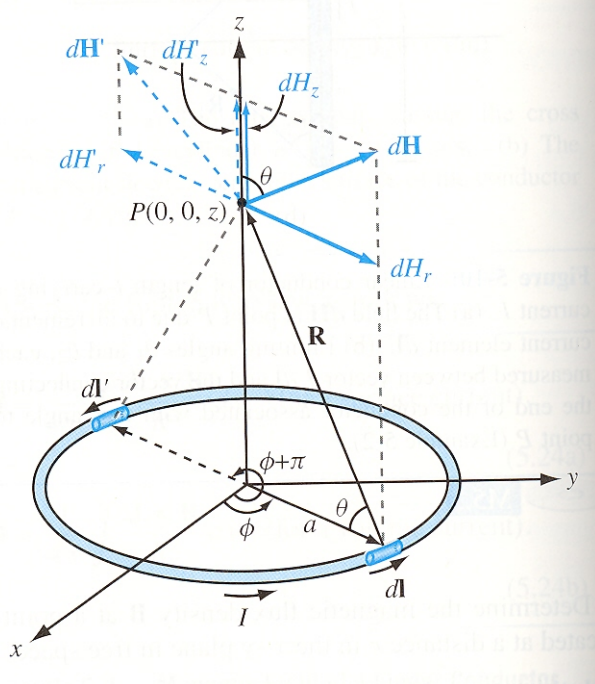
$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{où } r \text{ est la distance au fil}$$

Les lignes de champ forment alors des cercles autour du fil.



Pour un courant sinusoïdal basse fréquence, comme B est proportionnel à I , il variera également de façon sinusoïdale avec une amplitude égale à $5,66 \mu\text{T}$.

Exercice 2



En un point P de l'axe de la spire :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{l}}{R} \quad \text{où } I \text{ et } R \text{ sont des constantes.}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \oint_C d\vec{l} = 0$$

La connaissance de $\vec{A}$ sur l'axe ne suffit pas pour calculer $\vec{A}$.

$$\Rightarrow \text{Biot-Savart : } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}_R}{R^2}$$

$d\vec{l} \times \vec{r}_R$ se trouve dans le plan r, ϕ et la composante en r s'annule lors de l'intégration sur la spire.

Le champ $\vec{B}$ est donc dirigé suivant z ;

$d\vec{l}$ et $\vec{r}_R$ sont $\perp$; on multiplie par $\cos \theta$ pour obtenir la composante en z ; $R^2 = a^2 + z^2$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I dl \cos \theta}{a^2 + z^2} \vec{1}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \theta}{a^2 + z^2} \underbrace{\oint_C dl}_{2\pi a} \cdot \vec{1}_z$$

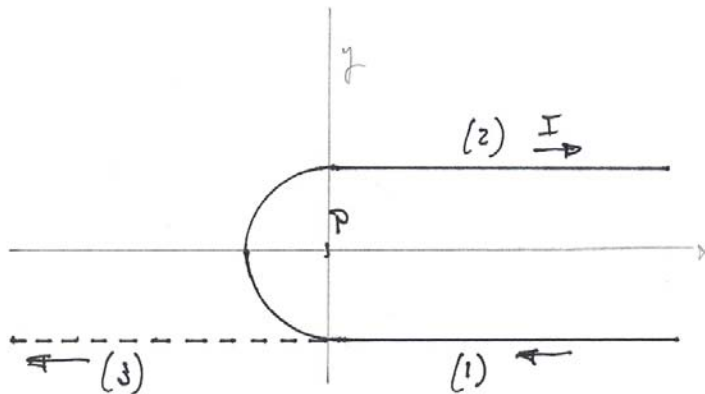
$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2 (a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{1}_z$$

Au centre de la spire, $z=0$, $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \vec{1}_z$

A grande distance (dipôle) $z \gg a$, $\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2 z^3} \vec{1}_z$

Exercice 3



On peut remplacer la demi-droite (2) par la demi-droite (3) qui donne la même contribution au point P.

On a alors un fil rectiligne infini :

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

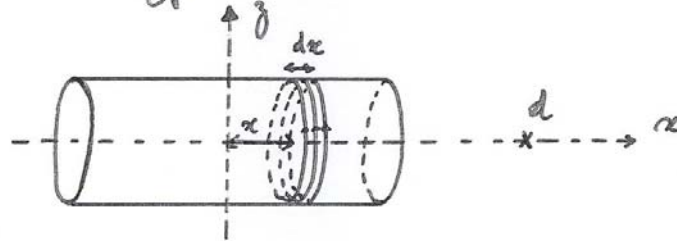
Et pour le demi-cercle :

$$B_z = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$\hookrightarrow \text{au total } B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R}$$

Exercice 4

Soit le solénoïde de longueur L :



Dans chaque élément dx situé en x , il y a $\frac{N}{L} dx$ spires.

↳ ces spires produisent au point $(d, 0, 0)$ un champ magnétique :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I N}{L} \frac{a^2}{[(d-x)^2 + a^2]^{3/2}} dx \vec{r}_x$$

↳ Le champ total :
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{L} \frac{NI}{L} a^2 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{[(d-x)^2 + a^2]^{3/2}} \vec{r}_x$$

Posons $u = d - x$

↳
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{L} \frac{NI}{L} a^2 \int_{d-L/2}^{d+L/2} \frac{du}{(u^2 + a^2)^{3/2}} \vec{r}_x$$

$$= \frac{\mu_0}{L} \frac{NI}{L} a^2 \left[\frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 + a^2}} \right]_{d-L/2}^{d+L/2} \vec{r}_x$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{L} \frac{NI}{L} \left(\frac{d+L/2}{\sqrt{(d+L/2)^2 + a^2}} - \frac{d-L/2}{\sqrt{(d-L/2)^2 + a^2}} \right) \vec{r}_x$$

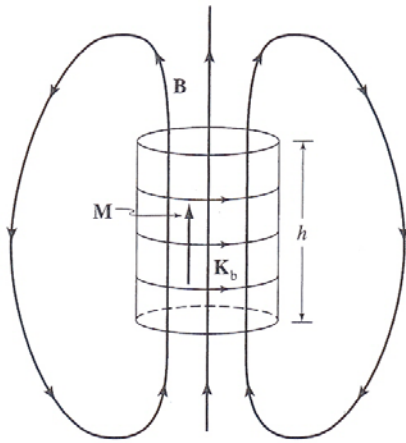
La valeur maximale de B est atteinte au centre du solénoïde ($d=0$) :

$$B_{\max} = \frac{\mu_0 NI}{\sqrt{L^2 + (2a)^2}}$$

et pour un solénoïde très long $L \gg a$:

$$B_{\max} \approx \frac{\mu_0 NI}{L}$$

Exercice 5



La magnétisation $\vec{M} = M \vec{e}_z$ est uniforme

$\hookrightarrow \text{rot } \vec{M} = 0 \quad \vec{J}_{\text{mag}} = 0$ pas de courant de magnétisation en volume.

$$\vec{K}_{\text{mag}} = \vec{M} \times \vec{e}_n = M \vec{e}_\phi$$

- il existe un courant de magnétisation en surface (sur la surface latérale)
(K_b sur le dessin)

- sur les surfaces de base en $z = \pm h/2$, le courant de surface est nul.

L'aimant est équivalent à un solénoïde de longueur h , de rayon a et de courant par unité de longueur M .

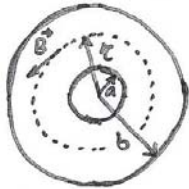
Si l'origine de l'axe z se trouve au centre de l'aimant, on a (cf. exercice 4), sur l'axe z :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} M \left(\frac{z + h/2}{\sqrt{(z + h/2)^2 + a^2}} - \frac{z - h/2}{\sqrt{(z - h/2)^2 + a^2}} \right) \vec{e}_z$$

Le calcul de B en dehors de l'axe z est beaucoup plus difficile et doit se faire numériquement.

Exercice 6

Par symétrie, le champ $\vec{B}$ doit partout être dirigé selon $\vec{e}_\theta$ dans un système cylindrique (comme le champ créé par un simple fil). Il est donc facile d'utiliser la loi d'Ampère sur un cercle de rayon r



$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

$$r < a : \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow \vec{H} = \vec{B} = 0$$

$$a < r < b : \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \rightarrow 2\pi r H = I$$

$$\hookrightarrow \vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{où} \quad \mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$$

$$r > b : \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I - I = 0 \rightarrow \vec{H} = \vec{B} = 0$$

Pour calculer les courants de magnétisation, calculons d'abord $\vec{M}$:

$$r < a \text{ ou } r > b : \vec{M} = 0 \quad (\text{puisque pas de matériau})$$

$$a < r < b : \vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

Dans le matériau, la densité de courant de magnétisation vaut donc :

$$\vec{J}_{mag} = \text{rot } \vec{M} = -\frac{\partial M_\theta}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r M_\theta) \vec{e}_z = 0$$

$$\text{Sur la surface } r=a : \vec{K}_{mag} = \vec{M} \times \vec{e}_n = \chi_m \frac{I}{2\pi a} \vec{e}_\theta \times (-\vec{e}_r) = \chi_m \frac{I}{2\pi a} \vec{e}_z$$

$$r=b : \vec{K}_{mag} = \vec{M} \times \vec{e}_n = \chi_m \frac{I}{2\pi b} \vec{e}_\theta \times \vec{e}_r = \chi_m \frac{I}{2\pi b} (-\vec{e}_z)$$

$$\text{Sur ces surfaces, le courant de magnétisation total : } \vec{I}_{mag} = 2\pi a \vec{K}_{mag} = I \chi_m \vec{e}_z$$

$$\text{et en } r=b : \vec{I}_{mag} = 2\pi b \vec{K}_{mag} = -I \chi_m \vec{e}_z$$

En utilisant la loi d'Ampère (dans le vide), on vérifie bien que I et $\vec{I}_{mag}$ donnent $\vec{B}$:

$$r < a : \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow \vec{B} = 0$$

$$a < r < b : \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + \chi_m I) \rightarrow \vec{B} = \mu \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

$$r > b : \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + \chi_m I - I - \chi_m I) = 0 \rightarrow \vec{B} = 0$$