Electricité – ELEC-H-200

Séance 3 -- Corrigé

Exercice 1

Soit $\pm Q$ la charge portée par les armatures et V_0 la différence de potentiel entre les armatures. Par symétrie, le champ $\vec{E}$ ne peut dépendre que du rayon r et est dirigé selon $\vec{1}_r$.
Appliquons l'intégrale de Gauss sur un cylindre de rayon r et de hauteur h. En dehors du condensateur, $\vec{E}$ est supposé nul (on néglige les épanouissements).

$$\int_{\text{cylindre}} \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{a} = Q$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^h \int_0^{\pi/2} \varepsilon E(r)\, \vec{1}_r \cdot dz\, r\, d\theta\, \vec{1}_r = Q$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon h \frac{\pi}{2} r\, E(r) = Q \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon h \frac{\pi}{2} r} \vec{1}_r$$

$$\Leftrightarrow \quad V_0 = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{1}_r\, dr = \frac{Q}{\varepsilon h \pi/2} \ln b/a$$

$$\Leftrightarrow \quad C = \frac{\varepsilon h \pi/2}{\ln b/a}$$

Exercice 2

Pour $r < a$ $\quad D = E = P = 0$

Pour $a < r < b$

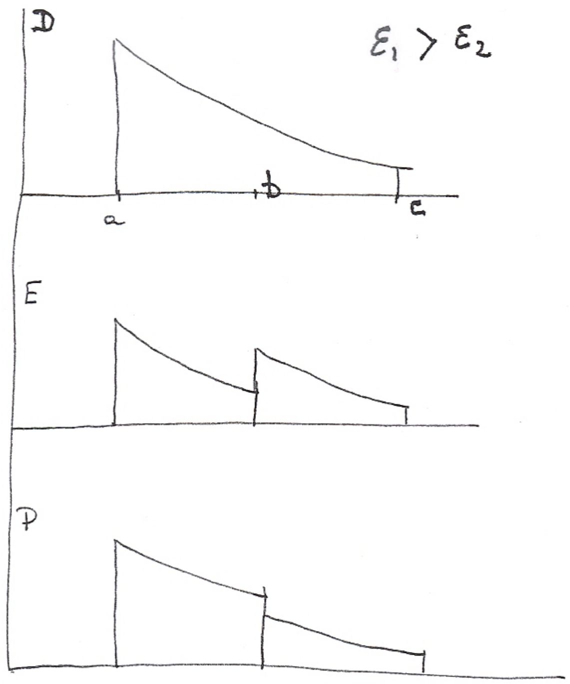
on applique Gauss sur un cylindre de rayon r et de longueur unité

$$D_r = \frac{Q}{2\pi r} \qquad E_r = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_1 r} \qquad P_r = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_r$$

Pour $b < r < c$

$$D_r = \frac{Q}{2\pi r} \qquad E_r = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_2 r} \qquad P_r = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_r$$

Pour $r > c$ $\quad D = E = P = 0$



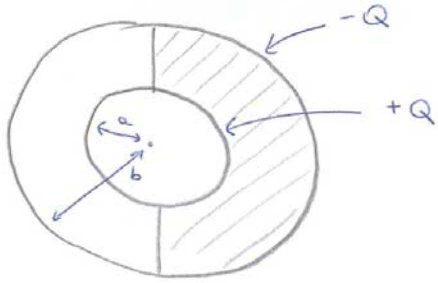
$$V_a - V_b = \int_a^b \frac{Q}{2\pi \varepsilon_1 r}\, dr = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_1} \ln \frac{b}{a}$$

$$V_b - V_c = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_2} \ln \frac{c}{b}$$

$$V_a - V_c = \frac{Q}{C}$$

$$C = \frac{2\pi}{\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{c}{b}}$$

Exercice 3



COEFFICIENT DE CAPACITE : $Q = C\,V \quad (*)$

milieu 1 = vide (à gauche)
milieu 2 = diélectrique (à droite)

$E_{tangentiel}$ est continu → même E dans les 2 milieux.

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{E}_1 = \bar{E}_2 = E(r)\,\bar{1}_r \\ \bar{D}_1 = \varepsilon_0\,\bar{E} \\ \bar{D}_2 = \varepsilon\,\bar{E} \end{array}}$$

↳ GAUSS

$$\oint \bar{D}\,d\bar{S} = Q_{libre} \Rightarrow D_1 \cdot \frac{(4\pi r^2)}{2} + D_2 \cdot \frac{(4\pi r^2)}{2} = +Q$$

$$\hookrightarrow \quad 2\pi r^2 \cdot E \cdot (\varepsilon_0 + \varepsilon) = Q$$

$$\hookrightarrow \quad \boxed{E = \frac{Q}{2\pi r^2(\varepsilon_0+\varepsilon)}} \qquad a < r < b$$

DIFFERENCE DE POTENTIEL

$$V = V_a - V_b = \int_a^b \frac{Q}{2\pi r^2(\varepsilon_0+\varepsilon)}\,dr = \left[\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_0+\varepsilon)} \cdot \left(-\frac{1}{r}\right)\right]_a^b$$

$$\hookrightarrow \quad \boxed{V = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_0+\varepsilon)} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

$$(*) \Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi(\varepsilon_0+\varepsilon) \cdot a \cdot b}{(b-a)}}$$

DENSITE DE CHARGES DE POLARISATION

$\bar{P}_1 = \bar{0}$ $\quad\quad\quad\quad$ $\bar{P}_2 = (\varepsilon - \varepsilon_0)\bar{E}$

↳ en $r = a$

$$\sigma_{P1} = 0$$

$$\sigma_{P2} = \bar{P}_2 \cdot \bar{1}_n = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{Q}{2\pi a^2(\varepsilon_0 + \varepsilon)}$$

les charges de polarisation sont de signe opposé aux charges libres

Densité de charges libres

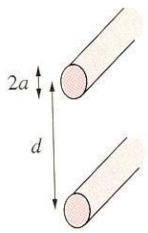
en $r = a$

$$\sigma_{\ell_1} = D_1(a) = \frac{Q\,\varepsilon_0}{(\varepsilon_0 + \varepsilon)\,2\pi a^2}$$

$$\sigma_{\ell_2} = D_2(a) = \frac{Q\,\varepsilon}{(\varepsilon_0 + \varepsilon)\,2\pi a^2}$$

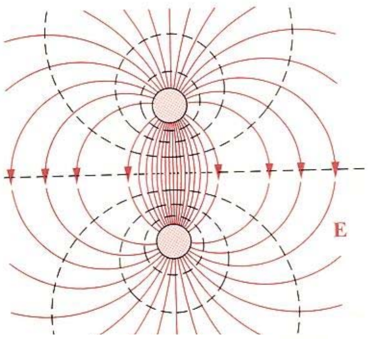
on vérifie que $\quad \sigma_{\ell_2} + \sigma_{p_2} = \sigma_{\ell_1} + 0$

Exercice 4



La solution générale est complexe à cause de l'effet de proximité. La distribution de charges sur les surfaces des conducteurs ne sera pas uniforme

Pour d>>a, on peut considérer que le champ électrique est celui de deux fils chargés, de polarités opposées (et donc négliger la non-uniformité de la distribution de charges).

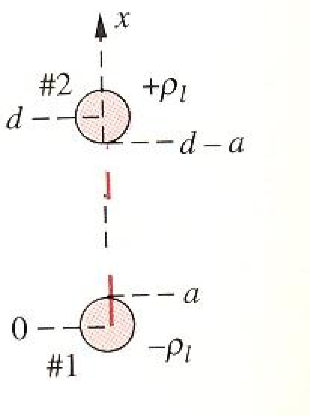


Le champ électrique d'un fil avec une densité linéique ρ_l (en C/m) est donnée par Gauss :

$$E_r = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

On considère que les conducteurs portent une charge $+\rho_l$ et $-\rho_l$.

Le champ électrique, sur l'axe x joignant les conducteurs est alors (voir dessin) :



$$E_x(x,0,0) = \frac{-\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 x} + \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 (x-d)}$$

Et il est orienté suivant x (E_y=E_z=0).

Pour trouver la diff de pot entre les conducteurs, il faut intégrer le champ E le long de n'importe quel chemin allant d'un conducteur à l'autre. Par facilité on choisit le chemin le long de l'axe x, de x=a à x=d-a.

$$\begin{aligned}
V &= -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^{d-a} \left(\frac{-\rho_l}{x} + \frac{\rho_l}{x-d}\right) dx \\
&= \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^{d-a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right) dx \\
&= \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln x - \ln(d-x)\right]_a^{d-a} \\
&= \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} 2\ln\frac{d-a}{a} \simeq \frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{a}
\end{aligned}$$

Comme ρ_l est une charge par unité de longueur, la capacité est :

$$C = \frac{\rho_l}{V} \simeq \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d}{a}} \qquad F/m$$

Exemple : ligne HT, d=3m, a=1.4 cm, C=5.2 nF/km.