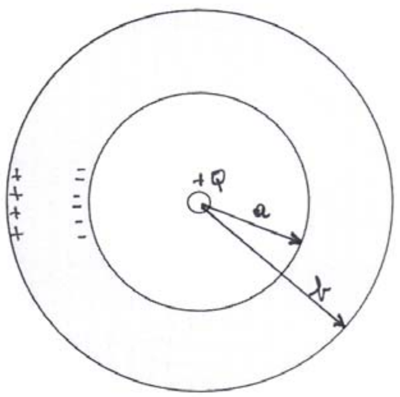
Université Libre de Bruxelles **Année académique 2011-2012**
Faculté des Sciences appliquées
Service LIST

Electricité – ELEC-H-200

Séance 2 -- Corrigé

Exercice 1



Symétrie sphérique, on applique Gauss.

Le champ est radial $\vec{E} = E_r \vec{1_r}$

$r < a \qquad E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$a < r < b$ Dans le conducteur, le champ est nul.

Des charges négatives vont se placer sur la surface intérieure du conducteur en $r = a$ avec une densité $\sigma_a = \frac{-Q}{4\pi a^2}$

$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = +Q - Q = 0 \Rightarrow E = 0$

Le conducteur reste neutre et donc des charges positives se placent en $r = b$ avec une densité $\sigma_b = \frac{+Q}{4\pi b^2}$

$r > b \quad \varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = +Q - Q + Q = Q \Rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Potentiel (par rapport à l'infini)

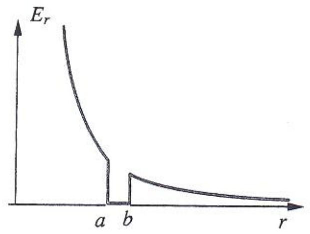
$r > b$ $\quad V = -\int_\infty^r E_r \, dr = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

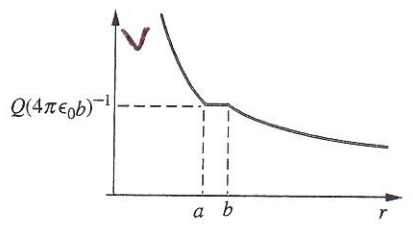
$a < r < b$ le conducteur est équipotentiel

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$r < a$ $\quad V = V(a) - \int_a^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \, dr$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{b} + \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right]$$





Exercice 2

On place une charge $+Q$ sur la sphère intérieure et une charge $-Q$ sur la sphère extérieure.

Le champ entre les sphères est :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R^2} \vec{1_R}$$

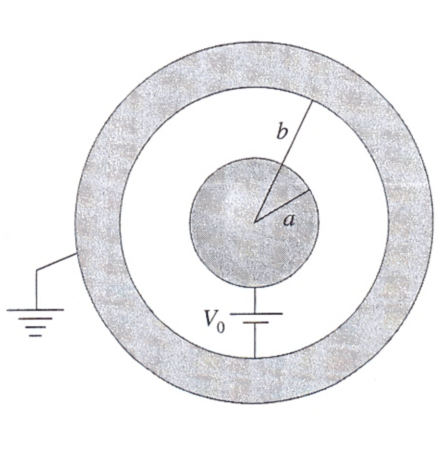
et la diff. de potentiel

$$V_0 = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{R} = -\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \int_b^a \frac{1}{R^2} dR$$

$$= \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Comme attendu, V_0 est bien proportionnel à Q et la capacité est :

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{4\pi \varepsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = 4\pi \varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$



Capacité propre d'une sphère :

$b \gg a$

$$C = 4\pi \varepsilon_0 a$$

Condensateur plan :

$b = a + d$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{a(a+d)}{d} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{a^2}{d}\left(1+\frac{d}{a}\right)$$

si $\frac{d}{a} \ll 1$

$$C = \frac{4\pi a^2 \varepsilon_0}{d}$$

$4\pi a^2$ est la surface de l'armature

↳ capacité par unité de surface

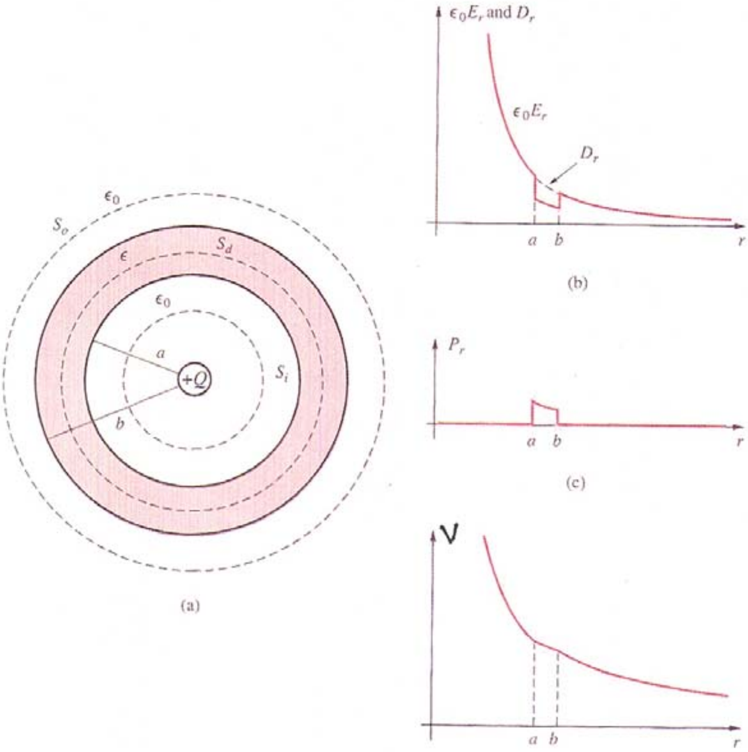
$$\frac{C}{S} = \frac{\varepsilon_0}{d}$$

vrai pour deux plans infinis parallèles

et approximativement vrai pour des plans finis si d est petit comparé aux dimensions des plans :

$$C \simeq \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Exercice 3



Symétrie sphérique, on applique Gauss.

Pour $r \geq b$ $\quad E_r = \dfrac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \qquad V = \dfrac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r}$

$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad P_r = 0$$

Pour $a \leq r < b$ (dans le diélectrique)

$$E_r = \frac{Q}{4\pi \varepsilon r^2} \qquad D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$P_r = D_r - \varepsilon_0 E_r = (\varepsilon - \varepsilon_0) E_r$$

$$V(r) = V(b) - \int_b^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon r}\right]_b^r$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$$

Pour $r < a$

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad D_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad P_r = 0$$

$$V(r) = V(a) - \int_a^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Charges de polarisation

en volume : $\rho_p = -\operatorname{div}\vec{P} = 0$

en surface :

en $r = a$ $\quad \sigma_{pa} = \vec{P}\cdot\vec{1_n} = \vec{P}\cdot(-\vec{1_r})$

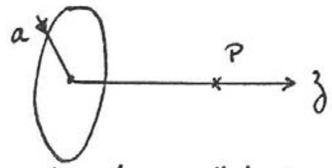
$$= -(\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{Q}{4\pi\varepsilon a^2}$$

en $r = b$ $\quad \sigma_{pb} = \vec{P}\cdot\vec{1_n} = \vec{P}\cdot\vec{1_r} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon b^2}$

ces charges de polarisation produisent à l'intérieur du diélectrique un champ électrique qui s'oppose à celui produit par la charge Q.

Exercice 4

Soit un disque uniformément chargé, de surface A, charge totale Q, d'axe z et situé en z = 0 :



La densité superficielle de charges portée par le disque = $\frac{Q}{A}$

Au point $P(0,0,z)$, le potentiel est donné par :

$$V(P) = \int_{disque} \frac{Q/A}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{Q/A}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{r\, dr\, d\theta}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{Q/A}{2\varepsilon_0}\int_0^{a}\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\, dr$$

$$= \frac{Q/A}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{r^2+z^2}\right]_0^a = \frac{Q/A}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2+z^2} - z\right) \qquad (z>0)$$

$$\hookrightarrow \boxed{\vec{E}(P) = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{1}_z = \frac{Q/A}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\vec{1}_z} \qquad (z>0)$$

Pour $z<0$, un calcul similaire donne :

$$V' = \frac{Q/A}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2+z^2} - |z|\right)$$

$$\vec{E} = -\frac{Q/A}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\vec{1}_z$$

Discontinuité de E_z : $\quad E_z(0^+) = \frac{Q/A}{2\varepsilon_0} \quad E_z(0^-) = -\frac{Q/A}{2\varepsilon_0} \quad \rightarrow E_z(0^+) - E_z(0^-) = \frac{Q/A}{\varepsilon_0}$