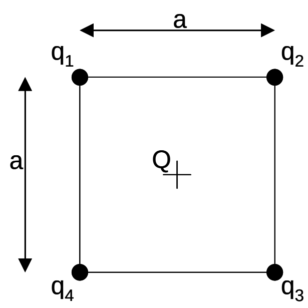
Université Libre de Bruxelles **Année académique 2011-2012**
Faculté des Sciences appliquées
Service LIST

Electricité – ELEC-H-200

Séance 1 -- Corrigé

Exercice 1

1.1



Détermination du potentiel électrique

Le potentiel résultant s'obtient par la superposition linéaire des contributions de chacune des charges q. Au centre du carré cela donne

$$V(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \frac{q_4}{r_4}\right]$$

où

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

et donc

$$V(0) = 4\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\sqrt{2}}{a}$$

Détermination du champ électrique

Le même principe de superposition s'applique dans ce cas, mais cette fois-ci en vectoriel.

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{q_1\left(\vec{R}-\vec{R}_1\right)}{\left|\vec{R}-\vec{R}_1\right|^3} + \frac{q_2\left(\vec{R}-\vec{R}_2\right)}{\left|\vec{R}-\vec{R}_2\right|^3} + \frac{q_3\left(\vec{R}-\vec{R}_3\right)}{\left|\vec{R}-\vec{R}_3\right|^3} + \frac{q_4\left(\vec{R}-\vec{R}_4\right)}{\left|\vec{R}-\vec{R}_4\right|^3}\right]$$

avec, si l'origine des coordonnées est au centre du carré

$$\vec{R} = 0$$

$$\vec{R}_1 = -\frac{a}{2}\vec{1}_x + \frac{a}{2}\vec{1}_y$$

$$\vec{R}_2 = +\frac{a}{2}\vec{1}_x + \frac{a}{2}\vec{1}_y$$

$$\vec{R}_3 = +\frac{a}{2}\vec{1}_x - \frac{a}{2}\vec{1}_y$$

$$\vec{R}_1 = -\frac{a}{2}\vec{1}_x - \frac{a}{2}\vec{1}_y$$

Dès lors on a

$$\vec{E}(0) = 0$$

et donc

$$\vec{F}_Q = Q\,\vec{E} = 0$$

On retrouve par un raisonnement physique le même résultat :

- si $qQ > 0$, les quatre forces sont de répulsion et s'annulent deux à deux ;
- tandis que si $qQ < 0$, les quatre forces sont d'attraction et s'annulent également deux à deux.

Si l'on supprime l'une des quatre charges q, la force résultante ne s'annule plus, et elle est égale à l'opposée de la force exercée par la charge supprimée.

Calcul du travail

Le travail pour amener la charge Q d'une position infiniment éloignée jusqu'au centre du carré :

$$T = Q\,V(0) = 4\frac{Qq}{4\pi\varepsilon}\frac{\sqrt{2}}{a}$$

1.2

Le potentiel électrique au centre du carré des quatre charges est nul.
En effet,

$$V(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \frac{q_4}{r_4}\right]$$

où

$$q_1 = -q_2 = q_3 = -q_4 = q$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

et donc

$$V(0) = 0$$

Ceci résulte du fait que les contributions des quatre charges s'annulent deux à deux.

Le champ électrique au centre du carré est également nul, comme dans le cas de l'exercice précédent, car les contributions des charges se situant sur des sommets diamétralement opposés du carré s'annulent.

$$\vec{E}(0) = 0$$

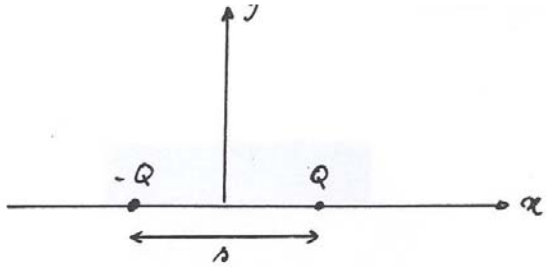
Il s'en suit que la force exercée sur la charge test Q est également nulle.

Le raisonnement concernant la situation qui s'établit si l'on supprime l'une des charges q (ou $-q$) reste valable : la force subie par la charge test Q est encore une fois égale à l'opposée de celle qu'aurait exercée la charge supprimée.

Le travail effectué, pour amener la charge test Q d'une position infiniment éloignée jusqu'au centre du carré des charges q et $-q$, est cette fois-ci nul parce que le potentiel électrique est nul aussi bien dans la position initiale que la position finale de cette charge.

$$\mathrm{T} = 0$$

Exercice 2



Le long de l'axe x : le champ dû à la charge Q : $\vec{E}_Q = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(x-\frac{s}{2}\right)^2}\,\vec{1}_x$

$(x > s/2)$

le champ dû à la charge $-Q$: $\vec{E}_{-Q} = \dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_0\left(x+\frac{s}{2}\right)^2}\,\vec{1}_x$

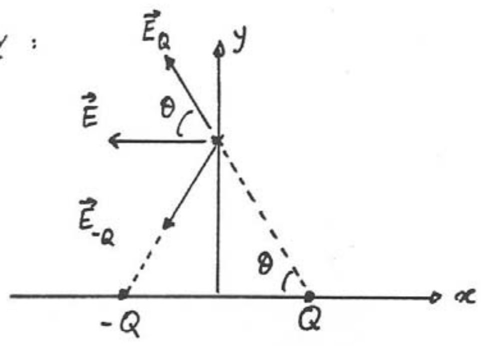
Le champ total vaut donc $\vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_{-Q}$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(x-\frac{s}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(x+\frac{s}{2}\right)^2}\right)\vec{1}_x$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\;\frac{2sx}{\left(x-\frac{s}{2}\right)^2\left(x+\frac{s}{2}\right)^2}\;\vec{1}_x$$

Lorsque $x \gg s$: $\vec{E} \simeq \dfrac{2Qs}{4\pi\varepsilon_0\, x^3}$ $\rightsquigarrow$ décroissance du champ en $1/x^3$

Le long de l'axe y :



Le champ résultant $\vec{E}$ est donc dirigé selon $-\vec{1}_x$

$\cos\theta = \dfrac{s/2}{\sqrt{y^2 + (s/2)^2}}$

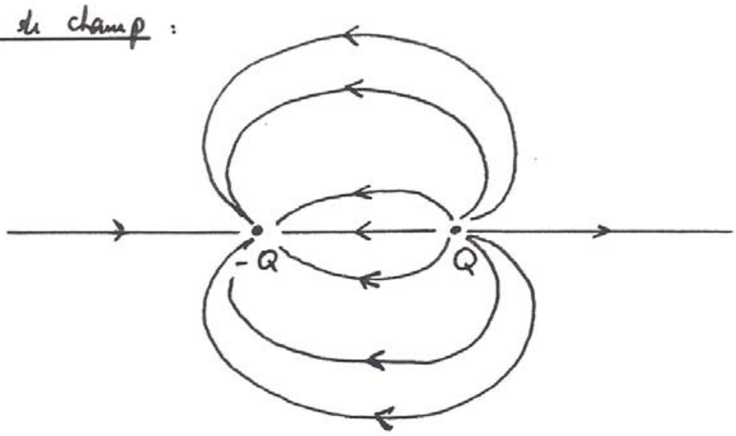
$|\vec{E}_Q| = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(y^2+(s/2)^2\right)}$ $\qquad |\vec{E}_{-Q}| = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(y^2+(s/2)^2\right)}$

$\hookrightarrow$ $|\vec{E}| = |\vec{E}_Q|\cos\theta + |\vec{E}_{-Q}|\cos\theta = \dfrac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\;\dfrac{s/2}{\left(y^2+(s/2)^2\right)^{3/2}}$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Qs}{4\pi\varepsilon_0\left(y^2+(s/2)^2\right)^{3/2}}\,(-\vec{1}_x)}$$

Lorsque $y \gg s$: $\vec{E} \simeq \dfrac{Qs}{4\pi\varepsilon_0\, y^3}$ $\rightarrow$ décroissance en $1/y^3$

Lignes de champ :



Comme $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$, les lignes de champ ne peuvent aboutir qu'aux charges ponctuelles Q et -Q (ou aller à l'infini). Proche de la charge négative -Q, le champ doit être radial et dirigé vers -Q. De même près de la charge positive mais cette fois le champ est orienté dans la direction opposée à la charge.

Exercice 3

Charge uniformément répartie en volume

Le densité volumique de charge est donnée par

Pour des raisons de symétrie, on a

$$\vec{E}(\vec{R}) = E_R(R)\,\vec{1}_R$$

Et on peut appliquer le théorème de Gauss

pour $R > a$

$$E_R(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}$$

$$\vec{E} = -grad\ V$$

$$V(R) = -\int_{\infty}^{R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dR}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} \qquad V(\infty) = 0$$

$$V(a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

On peut remarquer que le champ et le potentiel à l'extérieur de la sphère est celui d'une charge ponctuelle Q.

pour $R < a$

$$\oint \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{q(R)}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{a}\right)^3$$

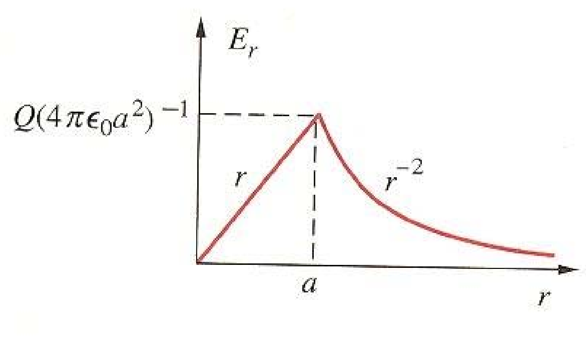
$$E\,4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{a}\right)^3$$

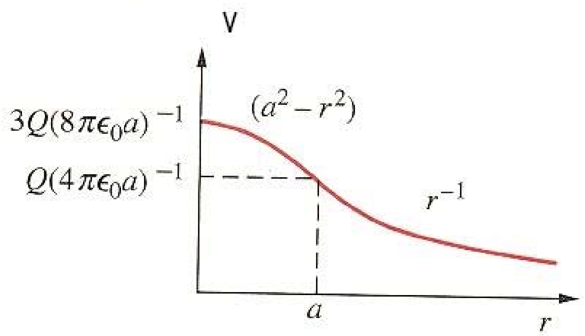
$$E_R(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{a^3}$$

$$V(R) = -\frac{QR^2}{8\pi\varepsilon_0 a^3} + V_0$$

Continuité en R=a => $V_0 = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 a}$

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a^3}(a^2 - R^2)$$





Charge uniformément répartie en surface

La densité superficielle de charge est donnée par

$$\rho_S = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

pour $R > a$

$$E_R(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}$$

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

pour $R < a$

$$E_R(R) = 0$$

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} = V(a) \qquad \text{(constant)}$$

Charge en R^2

$$\rho = \rho_0 \frac{R^2}{a^2}$$

$$Q = \int_0^a \rho_0 \frac{R^2}{a^2} 4\pi R^2 \, dR = \frac{4\pi\rho_0 a^3}{5}$$

$$\rho_0 = \frac{5Q}{4\pi a^3}$$

pour $R > a$ comme avant

pour $R < a$

$$E 4\pi R^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R \frac{5Q}{4\pi a^3}\frac{R^2}{a^2} 4\pi R^2 \, dR = Q\frac{R^5}{a^5}$$

$$E(R) = \frac{QR^3}{4\pi\varepsilon_0 a^5}$$

$$V(R) = -\frac{QR^4}{16\pi\varepsilon_0 a^5} + V_0$$

Continuité en R=a => $V_0 = \dfrac{5Q}{16\pi\varepsilon_0 a}$

$$V(R) = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a}\left(5 - \frac{R^4}{a^4}\right)$$

Exercice 4

Potentiel électrique au centre de l'anneau

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_L dl}{\left|\overrightarrow{R} - \overrightarrow{R'}\right|}$$

Au centre de l'anneau

$$dl = \frac{d}{2}\, d\phi$$

$$\left|\overrightarrow{R} - \overrightarrow{R'}\right| = \frac{d}{2}$$

$$V\left(r = 0\right) = \frac{\rho_L}{2\varepsilon_0}$$

Champ électrique au centre de l'anneau

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_L \left(\vec{R} - \vec{R}'\right) dl}{\left|\vec{R} - \vec{R}'\right|^3}$$

où, dans ce cas-ci, on a

$$\vec{R} - \vec{R}' = \frac{D}{2}\,\vec{1}_R$$

$$\left|\vec{R} - \vec{R}'\right|^3 = \left(\frac{D}{2}\right)^3$$

Le champ électrique est nul au centre de l'anneau, parce que toutes les contributions des charges élémentaires dq s'annulent par raison de symétrie.

$$\vec{E}\left(r = 0\right) = 0$$